Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(9), 30-36
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.149323

高等数学中重积分的应用

骆俊任*，**闫彩红**

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年8月3日；录用日期：2024年9月9日；发布日期：2024年9月19日

摘　要

重积分是高等数学的重要组成部分，不仅在几何、物理上都有着重要的应用，而且在数学、物理学、工程学、统计学等多个学科中都有广泛应用。本文从微积分的思想起源为切入点介绍了重积分的定义和性质，接下来介绍了重积分在几何以及在物理上的应用，最后结合向量给出两类曲线积分的定义和联系。两类曲线积分的知识点在竞赛和考研中频频出现。用向量的观点来看两类曲线积分的联系，可以加深学生的理解，有助于培养学生的数学逻辑思维。

关键词

重积分，物理应用，几何应用，曲线积分，方向余弦

Application of Multiple Integrals in Advanced Mathematics

Junren Luo*, **Caihong Yan**

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Aug. 3rd, 2024; accepted: Sep. 9th, 2024; published: Sep. 19th, 2024

Abstract

Multiple integrals are an important component of advanced mathematics, with significant applications not only in geometry and physics, but also in various disciplines such as mathematics, physics, engineering, and statistics. This article introduces the definition and properties of multiple integrals from the perspective of the origin of calculus. Then, we introduce the applications of multiple integration in geometry and physics. Finally, the definitions and connections between two types of curve integrals are given by combining vectors. The knowledge of two types of curve integrals frequently appears in competitions and postgraduate entrance exams. It can deepen students' understanding and help cultivate their mathematical logical thinking by the perspective of vectors to find the connection

*通讯作者。

文章引用: 骆俊任, 闫彩红. 高等数学中重积分的应用[J]. 理论数学, 2024, 14(9): 30-36.
DOI: 10.12677/pm.2024.149323

between two types of curve integrals.

Keywords

Multiple Integrals, Physical Applications, Geometric Applications, Curvilinear Integral, Direction Cosine

1. 微积分的思想起源

在古希腊时期，大数学家阿基米德用内接正多边形的周长来穷尽圆的周长进而求得圆周率的近似值，用一连串三角形来填充抛物线的图形以求得其面积，这些都是穷竭法的古典例子。穷竭法的基本思想是将一个平面区域(如圆形、三角形等)分成数量无限多但面积无限小的小块，然后通过求出每个小块的面积之和来逼近这个平面区域的总面积。

2. 高等数学中的微积分

重积分，包括二重积分和三重积分，是定积分在多元函数上的扩展，用于计算二元或多元函数在特定区域上的积分值。要明确多重积分的定义，首先需要阐述定积分的定义。我们发现，定积分的定义和穷竭法是有一定联系的。

定义 1 [1] 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，将区间 $[a,b]$ 分成 n 个子区间

$$[x_0,x_1],(x_1,x_2],(x_2,x_3],\cdots,(x_{n-1},x_n]，其中 x_0=a, x_n=b。$$

不难得出第个区间长度依次为：

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}，其中 i=1,2,\cdots,n。$$

在每个子区间 $(x_{i-1},x_i]$ 中任取一点 τ_i，作和式：$A=\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i$，称该和式为 $f(x)$ 的积分和。令 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3,\cdots,\Delta x_n\}$，若当 $\lambda\to 0$ 时 A 的极限存在，则称该极限为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，并称函 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积。其中：a 被称为积分下限，b 被称为积分上限，区间 $[a,b]$ 被称为积分区间，函数 $f(x)$ 被称为积函数，x 为积分变量，$f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，$\int$ 为积分号。

我们发现，定积分的定义就是先用穷竭法，算出每个小矩形的面积，再计算当 $\lambda\to 0$ 时极限的值。所以在授课的过程中，老师可以先向学生介绍穷竭法这个思想方法，再给出定积分的定义，如此可以使学生更好地理解和掌握。授人以鱼不如授人以渔，只要学生知道了穷竭法，自己也可以慢慢推导出定积分的定义，而且会一直记住这个方法。

3. 重积分的定义

接下来，我们给出多重积分的定义，以二元函数为例。

定义 2 [2] 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数。将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n，$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积。在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，作乘积 $(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ ($i=1,2,\cdots,n$)，并做和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$。如果当各小闭区域的直径中的最大值 $\lambda\to 0$ 时，这和的极限

总存在，且与闭区域 D 的分法及点 (ξ_i,η_i) 的取法无关，那么称此极限为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分，记作 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \text{。}$$

其中 $f(x,y)$ 叫做被积函数，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 叫做被积表达式，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 叫做面积元素，x 和 y 叫做积分变量，D 叫做积分区域，$\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 叫做积分和。

多重积分具有很多与单变量函数的积分一样的性质：如线性，可加性，单调性等等。因此，老师们在授课的时候可以提醒学生回忆一重积分的性质，以便加强对重积分性质的理解和掌握。此外，重积分是高等数学中的重点和难点内容，它在线面积分的学习中起着非常重要的作用。因此它的计算问题一直备受学者的关注，张应奇在文献[3]中探讨了二重积分的计算方法和技巧。

4. 重积分的应用

4.1. 重积分的几何应用

若将被积函数看作是被积区域 D 内任意一点处的高，那么二重积分便可以刻画以 D 为底，$f(x,y)$ 为高的曲顶柱体的体积。

例 1 在空间中有一曲顶柱体，其底是矩形 $\{|x|\le 1, 0\le y\le 2\}$，曲顶由 $z=\sqrt{|y-x^2|}$ 决定，求该曲顶柱体的体积。

解：要求该曲顶柱体的体积，即求

$$I=\iint_D\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D:|x|\le 1, 0\le y\le 2.$$

首先，考虑 x 的范围，对 $|y-x^2|$ 去绝对值，得

$$\begin{aligned}I&=\iint_{|x|\le 1,x^2\le y\le 2}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{|x|\le 1,0\le y\le x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

若将被积函数看作 D 内密度，那么二重积分便可以刻画平面物体的质量。同理，如果将被积函数看作 Ω 内密度，那么三重积分便可以刻画立体物体的质量。

例 2 设平面有一圆盘 $D:(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$，圆盘上任意一点的密度同它到原点的距离成正比，比例系数为 k，求该圆盘的质量。

解：设 $\rho(x,y)=k\left(x^2+y^2\right)$，则 $I=\iint_D k\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，设 $\begin{cases}x=1+r\cos\theta\\ y=1+r\sin\theta\end{cases}$

可以得到，

$$\begin{aligned}I&=k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left[(1+r\cos\theta)^2+(1+r\sin\theta)^2\right]\cdot r\mathrm{d}r\\&=k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left[2+2(\sin\theta+\cos\theta)r+r^2\right]\cdot r\mathrm{d}r\\&=k\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{2}{3}\sin\theta+\frac{2}{3}\cos\theta+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{5}{2}k\pi.\end{aligned}$$

4.2. 重积分的物理应用

关于物理应用，我们首先计算不规则物体的质心。

例 3 设空间内由 $x+y+z=1$， $x=0$， $y=0$， $z=0$，所围成的位于第一象限内的密度均匀的几何体，求该物体的质心。

解：不失一般性，可以设密度为 1，则根据质心公式，可以得到，

$$M=\iiint_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{6},$$

再根据投影法，可以得到，

$$\begin{aligned}M_{yz}&=\iiint_V z\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y} z\mathrm{d}z\quad(\Omega: x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0)\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-y}(1-x-y)^2\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{24},\end{aligned}$$

所以 $\overline{x}=\frac{M_{yz}}{M}=\frac{1}{4}$。同理可得 $\overline{y}=\overline{z}=\frac{1}{4}$。所以质心 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$。

例 4 求半径为 R 的均匀球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 对位于点 $Q(0,0,a),(a>R)$ 的单位质点的引力。

解：设引力 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$，取小块区域：$\mathrm{d}v$，位于 $P(x,y,z)$，那么

$$方向: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{QP}=(x,y,z-a),$$

$$大小: |\mathrm{d}\boldsymbol{F}|=G\cdot\frac{1\cdot\mu\mathrm{d}v}{|\boldsymbol{r}|^2}=G\cdot\frac{\mu\mathrm{d}v}{r^2},$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=|\mathrm{d}\boldsymbol{F}|\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=G\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}v,$$

所以 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=G\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}v=G\mu\frac{(x,y,z-a)}{r^3}\mathrm{d}v$。由对称性知 $F_x=F_y=0$，且

$$\begin{aligned}F_z&=\iiint_\Omega G\mu\frac{z-a}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}v\\&=G\mu\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\iint_{D_z}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}\\&=G\mu\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\mathrm{d}r}{\left[r^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}\\&=2\pi\cdot G\mu\int_{-R}^{R}(z-a)\left(\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right)\mathrm{d}z\\&=2\pi G\mu\left[-2R-\frac{1}{a}\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}\sqrt{R^2-2az+a^2}\right]\\&=2\pi G\mu\left(-2R+2R-\frac{2R^3}{3a^2}\right)\\&=-G\frac{M}{a^2},\end{aligned}$$

其中 $M=\dfrac{4\pi R^3}{3}\mu$ 为球的质量。

5. 两类曲线积分之间的联系

这一部分，我们将通过向量的观点来看两类曲线积分之间的联系。根据重积分的定义，两类曲线积分的定义是容易给出的，在这里我们就不再赘述了。

定理 1 [2] 设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} (\alpha \le t \le \beta)$$

若 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在，且

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

定理 2 [2] 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 上连续，L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$t:\alpha\to\beta$，若 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]([\beta,\alpha])$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则对坐标的曲线积分存在，且

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t.$$

即 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$.

现在我们通过向量导出两类曲线积分计算方法之间的关系。

我们知道，$\mathrm{d}x=\cos\alpha\mathrm{d}s$，$\mathrm{d}y=\cos\beta\mathrm{d}s$，$\alpha$，$\beta$ 为 L 上点 (x,y) 处的切向量的方向角，($\cos\alpha$，$\cos\beta$)为方向余弦。根据参数方程，可以得到

$$\cos\alpha=\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},\quad \cos\beta=\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},$$

那么，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_L (P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta)\mathrm{d}s \\
&=\int_\alpha^\beta \left\{P[\varphi(t),\psi(t)]\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}+Q[\varphi(t),\psi(t)]\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right\}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t \\
&=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t \\
&=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y \\
&=\int_L (P(x,y),Q(x,y))\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y).
\end{aligned}$$

现在将上式改写为

$$P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta=(P,Q)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta),$$

把 (P,Q) 看作 $\bar{a}$，$(\cos\alpha,\cos\beta)$ 看作 $\bar{b}$，$(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ 看作 $\mathrm{d}\bar{r}$，结合 $\mathrm{d}x=\cos\alpha\mathrm{d}s$，$\mathrm{d}y=\cos\beta\mathrm{d}s$，可以得到 $\mathrm{d}\bar{r}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=(\cos\alpha,\cos\beta)\mathrm{d}s=\bar{b}\mathrm{d}s$，从而有

$$\int_L \left(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\right)\mathrm{d}s = \int_L \overline{a}\cdot\overline{b}\mathrm{d}s = \int_L \overline{a}\cdot\mathrm{d}\overline{r},$$

就是非常自然且简单的向量运算了，并且可以马上推广到高维空间，

$$\begin{aligned}&\int_L \left(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta + R(x,y)\cos\gamma\right)\mathrm{d}s\\&= \int_L (P,Q,R)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\mathrm{d}s\\&= \int_L (P,Q,R)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z).\end{aligned}$$

因此用向量的观点来看待这两类曲线积分之间的关系，不仅简洁明了，方便学生记忆，便于推广，而且可以将积分和向量之间结合起来，使学生明白数学知识是一个完整的整体。此外，在导出方向余弦的过程中，需要用数形结合的方式，得到角度的表达式。

下面两个例题为全国硕士研究生入学统一考试的题目，考察的是学生对于曲线积分以及相关性质的灵活应用。

例 1 (2018，数 1)设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，求 $\oint xy\mathrm{d}s$ 。

解：根据对称性，我们知道 $\oint xy\mathrm{d}s = \oint yz\mathrm{d}s = \oint zx\mathrm{d}s$ 。又

$$2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 - \left(x^2+y^2+z^2\right)\text{。}$$

所以

$$\oint xy\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint (xy+yz+zx)\mathrm{d}s = -\frac{1}{6}\oint \mathrm{d}s = -\frac{\pi}{3}\text{。}$$

上题应用对称性性质会非常简洁方便，计算简单，过程清晰，如果用参数方程，计算量大，还需要投影和联立方程，学生容易出错。因此，在平时的教学过程中，老师们需要向学生强调先观察积分，考虑相关性质，从而减少计算量，避免出错。

例 2 (2024，数 1)已知有向曲线 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=2x$ 与平面 $2x-z-1=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看为逆时针方向，计算：

$$\int_L \left(6xyz - yz^2\right)\mathrm{d}x + 2x^2z\mathrm{d}y + xyz\mathrm{d}z\text{。}$$

解：根据 $2x-z-1=0$，可以得到 $2x-1=z$，从而 $\mathrm{d}z = 2\mathrm{d}x$ 。所以

$$\begin{aligned}&\int_L \left(6xyz - yz^2\right)\mathrm{d}x + 2x^2z\mathrm{d}y + xyz\mathrm{d}z\\&= \int_L \left(8xyz - yz^2\right)\mathrm{d}x + 2x^2z\mathrm{d}y\\&= \int_L (8x-z)yz\mathrm{d}x + 2x^2z\mathrm{d}y\\&= \int_L \left(12x^2-4x-1\right)y\mathrm{d}x + \left(4x^3-2x^2\right)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

应用格林公式，令 $P = \left(12x^2-4x-1\right)y$， $Q = 4x^3-2x^2$，可以知道

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1\text{。}$$

我们有

$$\int_L \left(12x^2-4x-1\right)y\mathrm{d}x + \left(4x^3-2x^2\right)\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 为 L 投影到 xoy 平面所围的图形面积。

易得球心为 $(1,0,0)$，球心到平面 $2x-z-1=0$ 的距离为 $d = \frac{1}{\sqrt{5}}$，所以 L 所围的圆面积为

$$S=\pi\left(R^2-d^2\right)=\frac{4}{5}\pi \text{ 。}$$

另一方面，平面法向量为$(2,0,-1)$，对应的方向余弦为$\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)$，所以 L 所围圆投影到 xoy 平面的图形面积为

$$S_1=S\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{25}\pi \text{ 。}$$

基金项目

上海理工大学本科教学研究与改革项目(JGXM202310)。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析(上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[2] 同济大学数学科学学院. 高等数学(下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2023.

[3] 张应奇. 二重积分的计算方法与技巧之我见[J]. 数学学习与研究, 2016(3): 85.