Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(9), 44-51
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.149325

Hans汉斯

剖析典型错解，强化教学重点

——以一元微积分为例

刘　丹，孙慧静，王丽英

海军航空大学，山东 烟台

收稿日期：2024年7月22日；录用日期：2024年8月19日；发布日期：2024年9月19日

摘　要

本文结合高等数学课程中一元函数微积分的教学实践，通过总结部分典型题目的常见错误解法，深入剖析学习者在解题思路、解法方法等方面的错因，以此为例，强化教学重点，提出教学建议，进一步完善课程教学设计。

关键词

高等数学，一元微积分，正解，错解

Analyze Typical Misconceptions and Strengthen Teaching Focus

—Taking Unary Calculus as an Example

Dan Liu, Huijing Sun, Liying Wang

Naval Aviation University, Yantai Shandong

Received: Jul. 22nd, 2024; accepted: Aug. 19th, 2024; published: Sep. 19th, 2024

Abstract

This article combines the teaching practice of calculus of univariate functions in higher mathematics courses, summarizes common incorrect solutions to some typical problems, and deeply analyzes the causes of learners' mistakes in problem-solving ideas, methods, and other aspects. Taking this as an example, it strengthens the teaching focus, proposes teaching suggestions, and further improves the teaching design of the course.

文章引用: 刘丹, 孙慧静, 王丽英. 剖析典型错解, 强化教学重点[J]. 理论数学, 2024, 14(9): 44-51.
DOI: 10.12677/pm.2024.149325

Keywords

Advanced Mathematics, Unary Calculus, Forward Solutions, Incorrect Solutions

1. 引言

微积分作为高等数学的主要内容，在该课程中具有重要地位。特别是一元函数微积分，其与多元函数微积分的联系十分紧密。学好微积分，或者说学好一元微积分，对于学习高等数学具有关键意义。一元微积分的主要内容包括：极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、微分方程。对于初学者来说，在课程入门的初级阶段，普遍容易感到“不好学”、“学不会”，甚至解题时屡屡出错。剖析典型常见错误，探究学习者在概念理解、方法运用等方面存在的问题，不仅有助于更好地把握教学重点，对于学习者而言，亦有助于其更好地掌握所学知识，有效避免错误认知。

本文选取了教材中具有代表性的一些典型易错习题，通过“错解”与“正解”的对比，站在学习者角度分析“错解”产生的原因，指出避免“错解”的关键所在。以期学习者在此过程中能够探寻规律，总结经验，提高能力。同时站在讲授者角度，通过剖析反哺教学，加强教学针对性，完善教学设计，提升教学效果。

2. 典型错解

2.1. 公式运用疏忽前提

例 1 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，有(　　)

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小　　(B) $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小　　(D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

错解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x-1)+(3^x-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln 2+x\ln 3}{x}=\ln 2+\ln 3$，故选(B)。

正解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)+(3^x-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 2}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 3}{x}=\ln 2+\ln 3,$$

故选(B)。

本题考查的是无穷小的等价替换及比较，讨论的主要环节为等价无穷小替换求极限。不难发现，错解第二步中直接将无穷小 (2^x-1) 与 (3^x-1) 进行了等价替换，显然违背了和差运算不能作等价替换的基本原则。此类错误大多是由于学习者过于急于套用公式结论，忽略使用前提所致。

但值得注意的是，错解虽然有误，却歪打正着地得出了正确答案。此处学生通常会提出疑问。事实上，对非数学类专业特别是工科生来说，对等价无穷小替换的严格条件不做深入要求。为避免解题时出错，教学中一律强调“和差运算不作替换”。当然，这并不意味着一旦替换必将出错。故在讲授这部分内容时，可借由本题对等价无穷小的替换条件作适当补充介绍，使学生明白“错解”并非巧合而是必然。由此一并作出提醒：歪打正着是小概率，使用公式不能乐此不疲，只记结果不重前提。

例 2 由 $y=x^3, x=2, y=0$ 所围成的图形绕 y 轴旋转，计算所得旋转体的体积。

错解 $V=\int_0^8 \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 \mathrm{d}y=\dfrac{96}{5}\pi$。

正解一 $V=\pi\cdot 2^2\cdot 8-\int_0^8 \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 \mathrm{d}y=32\pi-\dfrac{96}{5}\pi=\dfrac{64}{5}\pi$。

正解二 $V=2\pi\int_0^2 x\cdot x^3 \mathrm{d}x=\dfrac{64}{5}\pi$。

本题错解采用的思路一目了然，即直接套用了旋转体体积公式，仍然是只记结论不重前提的做法。实际上，所给图形不论绕 x 轴或 y 轴旋转，均有相应的计算公式。但对于图形有明确要求，即与相应坐标轴所围。注意到，本题图形是与 x 轴所围而非 y 轴，仅凭题中字眼“绕 y 轴旋转”便盲目套用绕 y 轴旋转的体积计算公式，显然是不正确的。

以上错误常见于初学者之中，原因是不少学生在记公式时只关注结果而忽略了适用情形。这是讲授时需要着重强调之处。当然，错解虽然有误，但也引发思考：新问题是否有新思路？一般来说，本题转化(正解一)为间接地利用绕 x 轴旋转的体积公式是一种较易想到的思路。但相比之下，正解二中的方法更加简便。该方法本质上亦是由定积分的元素法推导得出。实际教学中，通过对该方法的细致讲解，可进一步促进学生对元素法思想的深入理解。同时将其作为公式加以掌握，也可使学生意识到“条条大路通罗马”。

2.2. 定理条件验证粗略

例 3 假定函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，并且对 $[0,1]$ 上任一点 x 有 $0\le f(x)\le 1$。试证明 $[0,1]$ 中必存在一点 c，使得 $f(c)=c$ (c 称为函数 $f(x)$ 的不动点)。

错解 设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(0)=f(0)\ge 0$，$F(1)=f(1)-1\le 0$。

又 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由零点定理，必存在 $c\in[0,1]$，使得 $F(c)=0$，即 $f(c)=c$。

正解[1] 设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(0)=f(0)\ge 0$，$F(1)=f(1)-1\le 0$。

(1) 若 $F(0)=0$ 或 $F(1)=0$，则 $f(0)=0$ 或 $f(1)=1$；

(2) 若 $F(0)>0$ 且 $F(1)<0$，又 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由零点定理，必存在 $c\in(0,1)$，

使得 $F(c)=0$，即 $f(c)=c$。

综上所述，在 $[0,1]$ 中必存在一点 c，使得 $f(c)=c$。

观察本题所需证明的结论不难想到零点定理。该定理的条件与结论虽不复杂，但对初学者来说，在使用定理进行证明时，往往对两个关键点的处理有失偏颇：一是定理条件中，闭区间端点处的函数值严格异号，而不应包含等号；二是定理结论中，函数的零点严格位于开区间内，而不应包含区间端点。“错解”不论是条件的验证或是结论的得出，两方面皆不严谨。特别是关于零点所在区间的描述，许多初学者认为，零点既然位于开区间内，自然也属于范围更大的闭区间。

通过错解中出现的以上问题，实际教学中在阐释该定理时，除着重强调上述细节外，还可结合反例，具象化指出区间端点的重要性，以加深学生对零点定理条件与结论的理解和掌握。从而使其意识到：条件与结论同样重要，差之毫厘谬以千里。

例 4 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\ x\in[a,b].$$

证明：(1) $F'(x)\ge 2$；(2) 方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根。

错解 (1) $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\ge 2\sqrt{f(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}}=2$；

(2) $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(a)=\int_b^a \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0$，$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$，

由零点定理 $\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $F(\xi)=0$，即方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根。

正解 (1) $\because f(x)>0$，$\therefore F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}=2$；

(2) 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，得 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

又在 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$，从而 $F(a)=\int_b^a \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0$，$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$。

由零点定理 $\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $F(\xi)=0$，即方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根。

本题证明思路单一，典型常见错误为条件验证不严谨。错解(1)中，均值不等式是大部分学生能够想到的证明工具，但不等式成立的条件是经常被忽略的。同样地，错解(2)中，虽有效利用了零点定理，也注意验证了定理的两个条件：函数在闭区间上连续、区间端点处函数值异号。但却忽略了一点，即函数 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的连续性并非题设条件。以上各细节貌似可有可无，实则不可或缺。本题实际上侧面体现了一些学生对证明题的一贯处理方式，即只重“奔赴”结论而不在乎细节验证。

均值不等式作为初等数学中的重要不等式，当其作为“主角”出现时，条件的验证当然必不可少。但当其运用于高等数学时，却甚少有学生注意验证条件。同理，在零点定理中，端点处函数值异号的证明虽为关键，但函数的连续性是基本前提。这就要求在讲授“积分上限函数”概念时，进一步强调被积函数与积分上限函数二者的连续性关系。由此使学生意识到：条件不分轻重，缺一不可。更加不能将“显然”当成“必然”。大胆假设、小心求证始终是证明题需严格遵循的宗旨。

2.3. 方法定义生搬硬套

例 5 假定 $f'(x_0)$ 存在，且

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A,$$

根据导数定义指出 A 表示什么。

错解 因为 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=2\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=2f'(x_0)$，

所以 $A=2f'(x_0)$。

正解 因为

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]-\left[f(x_0-h)-f(x_0)\right]}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h},\\&=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0)\end{aligned}$$

所以 $A=2f'(x_0)$。

本题考查的是函数在一点处的导数定义。该定义通常有三种不同的表示形式，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

一些初学者在观察比较了上述三种形式之后，自行总结出了三者的“共同点”：分子中两函数的自变量之差即为分母。该总结表面上准确，实则没有注意到另一个更为关键的共同点：分子中的减数只能是 $f(x_0)$，这也是导数定义本质的体现。也就是说，在利用导数定义讨论问题时，无论采取以上哪种形

式，都务必符合这一要求。本题错解所采取的思路，正是许多初学导数定义的学生最易产生误解之处。

事实上，导数概念的形成与实际问题有着密切联系。错解对于定义的浅表化理解，正是由于没有做到“透过现象看本质”。实际教学中，在进行引例(如速度问题、切线问题)分析时，借由问题的实际意义指出并强调上述关键，或许可以帮助学习者更好地理解导数定义。本题也再次提醒学生们：高等数学中任何一个定义的掌握，关键不在于能否倒背如流，而是要充分理解其实质，才能准确加以应用，有效解决问题。

例 6　设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是(　　)

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在　　(B) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

错解一　因为

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{\left[f(a+2h)-f(a)\right]-\left[f(a+h)-f(a)\right]}{h}\\&=2\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}-\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},\\&=2f'(a)-f'(a)=f'(a)\end{aligned}$$

即 $f'(a)$ 存在，所以选(B)。

错解二　因为

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}&=\lim_{h\to0}\frac{\left[f(a+h)-f(a)\right]-\left[f(a-h)-f(a)\right]}{2h}\\&=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right],\\&=\frac{1}{2}\left[f'(a)+f'(a)\right]=f'(a)\end{aligned}$$

即 $f'(a)$ 存在，所以选(C)。

正解　因为 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=f'(a)$，即 $f'(a)$ 存在，所以选(D)。

本题考查点依然是导数的定义。相较于例 5，错解一和错解二对导数定义的理解没有问题，然而却犯了共同的逻辑错误。根据题目所述，正确选项应在相关极限存在的前提下，保证 $f'(a)$ 存在，此为“充分条件”之意。然而错解各步推导看似流畅无误，实际逻辑不清。究其原因无非有二：一是生搬硬套极限四则运算法则；二是一味炫技导数定义变形。事实上，对极限的拆分务必小心谨慎。许多初学者在学习了极限的四则运算法则后，感觉该方法操作简便，屡试不爽。然而对本题来说，在不知 $f'(a)$ 是否存在的前提下，冒然对极限进行拆分显然不合理。紧接着再以“$f'(a)$ 存在”去证明 $f'(a)$ 存在，逻辑上更加行不通。

一道与导数相关的题目，暴露出的问题却是多方面的。本题进一步显示了导数与极限的密切关联，也再次表明“抛开条件谈结论”是不可取的。教学中，应使学生意识到极限四则运算法则“虽好用，勿乱用”。对该法则内容的讲授，在例题选取方面可考虑正、反例结合的方式，展现法则并不万能，培养学生树立“方法越简单，操作愈谨慎”的学习态度。

2.4. 计算讨论忽视细节

例 7　已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x, & x\geq0\end{cases}$，求 $f'(x)$.

错解 $f'(x)=\begin{cases}(\sin x)', & x<0\\ x', & x\ge 0\end{cases}=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$.

正解 (1) 当 $x<0$ 时， $f'(x)=\cos x$；

(2) 当 $x>0$ 时， $f'(x)=1$；

(3) 当 $x=0$ 时，

$$\because f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1，\quad f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1，\quad \therefore f'(0)=1，$$

综上所述， $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$。

分段函数求导也是不少初学者较易出错的一类题目。错解通过对子区间上各函数分别求导便得分段函数的导数。所得结果虽与正确答案一致，但明显存在问题。事实上，对于分段函数而言，无论是求导还是讨论连续性，均不能对所有点一概而论。尤其当个别点处左右两侧函数表达式不一致时，更需具体情况具体分析。错解恰未注意到这一点，问题的根源是概念理解不到位。

鉴于此类错误时有发生，教学中不妨加强分段函数在求导、连续性讨论两方面的相关性分析。强调分段函数之所以在以上两类问题中较为“敏感”，一方面是由于连续也好，导数也罢，本质上都是通过极限来定义的，而函数表达式对极限结果有着重要影响；另一方面，函数在一点处是否连续、可导皆有各自相应的充分必要条件。换句话说，连续性与可导性的考察均需借助极限完成。所以对于分段函数，其函数表达式不一致的特性，自然要求个别点处单独讨论。

例 8 证明恒等式： $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(-1\le x\le 1)$。

错解 设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x, x\in[-1,1]$。

$$\because f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0，\quad \therefore f(x)\equiv C。$$

又 $f(0)=\frac{\pi}{2}$，故 $f(x)=\frac{\pi}{2}$，即 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(-1\le x\le 1)$。

正解 设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x, x\in[-1,1]$。

$$\because f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0(-1<x<1)，\quad \therefore f(x)\equiv C。$$

又 $f(0)=\frac{\pi}{2}$，故 $f(x)=\frac{\pi}{2}(-1<x<1)$。注意到 $f(-1)=f(1)=\frac{\pi}{2}$，

综上所述， $f(x)=\frac{\pi}{2}(-1\le x\le 1)$，即 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(-1\le x\le 1)$。

本题思路较为直接，证明工具不难想象。作为拉格朗日中值定理的应用，教材中给出了以下定理：如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续、I 内可导且导数恒为零，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数[2]。乍一看，就证明思路而言错解与正解并无实质差别，究竟错在何处？注意到，上述定理在给出的同时，特别强调了一点：“x 在区间 I 内指 $x\in I$，且 x 不是 I 的端点”。这意味着，虽然证明的关键是 $f'(x)\equiv 0$，但需明确自变量 x 的取值范围，对本题来说即 $-1<x<1$。此外，没有注意到函数 $\arcsin x$，$\arccos x$ 在 $x=-1$ 及 $x=1$ 处不可导，也是一个较严重的错误。以上种种皆是由于不够细致造成的。

通过错解与正解的鲜明对比，再次显示出数学语言的精妙，即没有多余字眼，字句皆含深意。实践中发现，不少学生为便于记忆，常以语句“导数等于零则函数恒为常数”对该定理加以片面概括。教学中对这种以偏概全的总结应及时予以纠正，同时再次强调：细节决定成败，“无足轻重”的区间端点或

可影响全局。

2.5. 概念不清牵强附会

例 9 求数列 $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ 的最大项.

错解 设 $f(n)=\sqrt[n]{n}$，则 $f'(n)=\left(\sqrt[n]{n}\right)'=\left(n^{\frac{1}{n}}\right)'=n^{\frac{1}{n}-2}(1-\ln n)$。

令 $f'(n)=0$，得唯一驻点 $n=\mathrm{e}$。

当 $1<n<\mathrm{e}$ 时， $f'(n)>0$；当 $n>\mathrm{e}$ 时， $f'(n)<0$，

故 $n=\mathrm{e}$ 为 $f(n)$ 的极大值点亦为最大值点，从而 $f(n)$ 的最大值为 $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$，

即数列 $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ 的最大项为 $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$。

正解 设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x\geq 1)$，则 $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$。

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=\mathrm{e}$。

当 $1<x<\mathrm{e}$ 时， $f'(x)>0$；当 $x>\mathrm{e}$ 时， $f'(x)<0$，

$x=\mathrm{e}$ 为 $f(x)$ 的极大值点亦为最大值点，故数列 $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ 的最大项可能为 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt[3]{3}$。

经比较 $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$，从而数列 $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ 的最大项为 $\sqrt[3]{3}$。

本题错解的解题思路是不少初学者常用的一种方法。错因在于，虽然求导是讨论最值问题的主要环节，然而仅看到“最大”、“最小”等字眼，便一味地盲目求导，无视问题的本质显然是不正确的。事实上，此类错误不仅常现于最值问题的讨论中，在计算数列极限时也经常出现。如求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$，当 $\frac{f(n)}{g(n)}$ 为 $n\to\infty$ 的 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式时，就有不少学生直接对其使用洛必达法则。

数列与函数是高等数学中有着千丝万缕联系的两个重要研究对象，高等数学中一些重要的方法、结论是同时适用于二者的。这就不免导致许多学生在讨论问题时，往往简单地对二者进行等价处理，认为数列与函数不分彼此，可以互相替代。产生以上错误认知的根本原因在于，没有深刻理解数列与函数的关系，这也是高等数学学习初期的一个典型重难点。由此可见，打牢基础、理清概念对学好高等数学是十分必要的。教学过程中，加强数列与函数的相关性分析、理论工具的适用性对比，使学生对数列与函数两者所共有的一些理论、方法有较为深刻的认识，一定程度上可有效减少此类错误的发生。

例 10 设 $f''(x_0)$ 存在，证明：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$。

错解

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}\\
&=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}f''(x_0+h)+\lim_{h\to 0}f''(x_0-h)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[f''(x_0)+f''(x_0)\right]=f''(x_0).
\end{aligned}
$$

正解[3]

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}&=\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\\
&=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[f''(x_0)+f''(x_0)\right]=f''(x_0).
\end{aligned}
$$

对比本题错解与正解的异同之处不难发现，二者在求解思路上的分歧主要在于：一方面，错解中连续两次使用了洛必达法则，而正解只使用了一次；另一方面，错解在第二次使用洛必达法则后，是利用“$f''(x)$在点x_0处连续”得到了相应结果，而正解则是通过导数的定义。两种解法都得到了正确答案，看似殊途同归，实则大相径庭。

值得指出的是，错解的思路具有较强迷惑性，不少学生即使逐步检查也很难发现其错处。然而，仔细分析不难发现，由题设条件“$f''(x_0)$存在”，连续两次使用洛必达法则理论上是可行的，但对于问题的解决毫无意义。因“$f''(x_0)$存在”未必意味着$f''(x)$在点x_0处连续，这也是许多学生概念上时常产生混淆之处。实际上，可导与连续间的关系是一元微积分的重要结论之一。讲授时，除需特别强调结论的掌握，也应使学生对其证明思路有较为透彻的理解。由此便可避免学生仅凭简单、机械的口诀“可导必连续”，而产生出“$f''(x_0)$存在则$f''(x)$在点x_0处连续”的错误认知。

3. 结论

充分理解和掌握概念是学好高等数学的根本，一些错误的解法往往源于对概念的一知半解；条件与结论是任何一个定理密不可分的两个重要部分，不存在孰轻孰重问题。努力提升自身的基本数学素养，可以有效避免不少“错解”。在教学过程中，如何培养学生养成严谨的逻辑思维习惯，不失为一个值得深思的问题。

此外，本文仅以一元函数微积分为例进行了较为浅显的分析，所选例题亦为教材诸多习题中之部分。后续将进一步探索关于多元微积分典型错解的相关研究。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学习题全解指导[M]. 北京: 高等教育出版社, 2023.

[2] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2023.

[3] 同济大学数学系. 高等数学习题全解指南[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.