Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(9), 52-60
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.149326

Hans汉斯

一个定义在半无穷区间上的希尔伯特空间及其基定理的函数论证明

颜嘉彤，刘建强*

宁夏大学数学统计学院，宁夏 银川

收稿日期：2024年8月2日；录用日期：2024年9月6日；发布日期：2024年9月19日

摘 要

定义在半无穷区间 $\mathcal{Z}=\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$ 上的有理函数系($\{g_{2n}:n\in\mathrm{N}\}$，其中N表示非负整数全体)，给出了区间 $\mathcal{Z}$ 上的希尔伯特空间($L^2(\mathcal{Z},w)$)是研究者最新提出的研究内容。该空间中的基定理证明了 $\{g_{2n}:n\in\mathrm{N}\}$ 是 $L^2(\mathcal{Z},w)$ 空间中的一组基。其定理的证明采用了等距同构的方法，未详细展开。本文首先给出 $L^2(\mathcal{Z},w)$ 空间中的另一个刻画，并利用此刻画，采用函数论的方法，给出基定理的一个新证明，以展现此空间中的函数逼近结构。

关键词

半无穷区间，标准正交基，有理函数

On a Hilbert Space Defined on a Semi-Infinite Interval with a Functional Theoretic Proof of a Relating Basis Theorem

Jiatong Yan, Jianqiang Liu*

School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan Ningxia

Received: Aug. 2nd, 2024; accepted: Sep. 6th, 2024; published: Sep. 19th, 2024

*通讯作者。

文章引用: 颜嘉彤, 刘建强. 一个定义在半无穷区间上的希尔伯特空间及其基定理的函数论证明[J]. 理论数学, 2024, 14(9): 52-60. DOI: 10.12677/pm.2024.149326

Abstract

A family of rational functions $\{g_{2n}: n \in \mathrm{N}\}$ (where N denotes the set of all nonnegative integers) defined on a semi-infinite interval $\mathcal{Z} = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$, and a Hilbert space ($L^2(\mathcal{Z}, w)$) on $\mathcal{Z}$ is a recently proposed research subject. $\{g_{2n}: n \in \mathrm{N}\}$ was proved to be an orthonormal basis for $L^2(\mathcal{Z}, w)$ in a theorem (the basis theorem) by using an isometry. The original proof is so brief that it might not have shown the hierarchy of function approximation relations clear enough. In this paper we give another characterization and raise examples of functions of several kinds in it. By taking advantages of this characterization, and by applying a function theory method, we offer a new proof for the basis theorem. We wish our deduction could show the hierarchical structurer of the function approximation in this space.

Keywords

Semi-Infinite Interval, Orthonormal Basis, Rational Function

1. 引言

再生核理论是人工智能和机器学习的重要理论基础。Kilmer 等人在[1]中提出了一类的正定多项式，为再生核的构造提供了新的方法。该多项式与著名的切比雪夫多项式有紧密关系，而正交性是切比雪夫多项式的精髓。正交逼近已经在科学的各个领域(包括但不限于数学、物理等)得到了广泛应用[2]-[4]。若进一步地，正定多项式同时具有正交性，则可在机器学习和正交逼近理论两个方面都发挥作用。文献[5]对该问题进行了探讨。然而结果表明，此正交性无法直接得到。为要得到正交性，需对上述正定多项式进行修正，修正后得到一族正交有理函数。下面就该文中部分结果进行总结。

在半无穷区间

$$\mathcal{Z} = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

上定义了如下的无理函数系：对于任何 $z \in \mathcal{Z}$， $n \in \mathrm{N}$，

$$g_n(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} z^{k-\frac{n}{2}}, \tag{1}$$

其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示取整函数。Boyd 曾给出过一个半无穷区间上的正交函数族[6]。沈捷等人进行了半无穷空间上谱逼近的若干研究[7]，Huseynov 研究了偏微分方程在半无穷区间上的特征级数问题[8]。这些成果为本研究的开展提供了动力。

$\{g_n: n \in \mathrm{N}\}$ 也可由如下的递归方式定义：对于任何 $z \in \mathcal{Z}$， $g_0 = 1$， $g_1 = \frac{1}{\sqrt{z}}$， 若 $n \geq 2$，则令

$$g_n(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}g_{n-1}(z)-g_{n-2}(z).$$

由(1)式可见每个 g_{2n} 都是有理函数. 如果令 $\theta=\arctan\left(\sqrt{4z-1}\right)$，则

$$g_{2n}(z)=D_n(2\theta)=\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta},\tag{2}$$

其中 D_n 表示第 n 阶狄利克雷核[9]。同时，定义权函数

$$w(z)=\frac{\sqrt{4z-1}}{2\pi z^2},$$

对任何 $\mathcal{Z}$ 上的勒贝格可测子集 E，定义概率测度[10]

$$\mu(E)=\int_E w(z)\mathrm{d}z\,.$$

在区间 $\mathcal{Z}$ 上，定义希尔伯特空间

$$L^2(\mathcal{Z},w)=\left\{f\text{ 在 }\mathcal{Z}\text{ 上勒贝格可测}:\int_{\mathcal{Z}}f^2(z)\mathrm{d}\mu<+\infty\right\}$$

带有内积

$$(f,g)=\int_{\mathcal{Z}}fg\mathrm{d}\mu,\quad f,g\in L^2(\mathcal{Z},w)$$

以及其引导的范数 $\|\cdot\|$。则 $\{g_n:n\in\mathrm{N}\}\subset L^2(\mathcal{Z},w)$。

基定理是说，$\{g_n:n\in\mathrm{N}\}$ 的偶子列 $\{g_{2n}:n\in\mathrm{N}\}$ 是空间 $L^2(\mathcal{Z},w)$ 的一组标准正交基。该偶子列是一族有理函数。使用有理函数进行的逼近称为有理逼近，它具有悠久的研究历史。常见有理逼近包括连分式逼近，Padé 逼近[11]，切比雪夫逼近等[12]。因此 $L^2(\mathcal{Z},w)$ 空间中使用基函数 $\{g_{2n}:n\in\mathrm{N}\}$ 对进行的逼近。这与切比雪夫逼近一样，是一种利用有理级数进行逼近的方式。两者的不同是，切比雪夫逼近是在一个有限区间上，而使用基函数 $\{g_{2n}:n\in\mathrm{N}\}$ 的逼近是在一个半无穷空间上。

基定理是 $L^2(\mathcal{Z},w)$ 研究的重要基础。原文中该定理的证明采用了两个空间等距同构的方法。因该证明简洁，尚未完全体现出此空间中函数逼近的层次结构。本文首先给出 $L^2(\mathcal{Z},w)$ 空间中的另一个刻画 $\mathcal{H}$，并利用此刻画，采用函数论的方法，依次证明连续函数、示性函数属于该刻画，给出基定理的一个新证明。同时，该证明可以展现此空间中的函数逼近结构，例如要逼近该空间中的可测函数，可用示性函数进行逼近，而示性函数根据本证明，转而依次可由基函数、连续函数逼近。在下一部分，将通过 $\{g_{2n}:n\in\mathrm{N}\}$ 给出空间 $L^2(\mathcal{Z},w)$ 中的子空间刻画，并在第三部分，给出基定理的证明。

2. $L^2(\mathcal{Z},w)$ 的另一个刻画 $\mathcal{H}$

由于 $\{g_{2n}:n\in\mathrm{N}\}\subset L^2(\mathcal{Z},w)$，定义 $L^2(\mathcal{Z},w)$ 的子空间 $\mathcal{H}$ 如下

$$\mathcal{H}=\overline{\mathrm{span}}\{g_{2n}:n\in\mathrm{N}\}.$$

利用基函数与三角函数的关系，即(2)式，可以得到下面的引理。

引理 1. $\{g_{2n}:n\in\mathrm{N}\}$ 是 $L^2(\mathcal{Z},w)$ 的一组正交集。

证明 对任何 $m,n\in\mathrm{N}$，

$$(g_{2m},g_{2n})=\int_{\mathcal{Z}}g_{2m}g_{2n}\mathrm{d}\mu.$$

注意到

$$\mathrm{d}\mu=\frac{4}{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta.$$

根据(2)式，我们得到

$$\begin{aligned}(g_{2m},g_{2n})&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2m+1)\theta\sin(2n+1)\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos(2m-2n)\theta-\cos(2m+2n+2)\theta\right]\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

当 $m\neq n$ 时，

$$(g_{2m},g_{2n})=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2m-2n)\theta}{2m-2n}-\frac{\sin(2m+2n+2)\theta}{2m+2n+2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

当 $m=n$ 时，

$$\begin{aligned}(g_{2m},g_{2n})&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\cos(4n+2)\theta\right]\mathrm{d}\theta\\&=1-\frac{\sin4n\theta}{(2n+1)\pi}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=1.\end{aligned}$$

因此，$\{g_{2n}:n\in\mathrm{N}\}$ 是 $L^2(\mathcal{Z},w)$ 的一组标准正交集。证毕。

现在我们定义

$$C(\mathcal{Z})=\left\{f\text{ 在 }\mathcal{Z}\text{ 上连续}: f(+\infty)\text{存在}\right\}.$$

那么，利用基函数和第二类切比雪夫多项式的关系，参考第二类切比雪夫多项式的正交性、对称性和逼近性质，有如下引理：

引理 2. $C(\mathcal{Z})\subset\mathcal{H}$。

证明 不妨设 $f(+\infty)=a$。令 $x=\frac{1}{2\sqrt{z}}$，则可将函数 $f\left(\frac{1}{4x^2}\right)$ 连续偶延拓到区间 $[-1,1]$ 上，记为 $F(x)$。即

$$F(x)=\begin{cases}f\left(\frac{1}{4x^2}\right), & 0<|x|\leq1,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

对任何 $n\in\mathrm{N}$，c_k 为实数，$0\leq k\leq n$，根据第二类切比雪夫多项式 U_{2k} 的对称性，我们有

$$\begin{aligned}\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_kg_{2k}\right\|^2&=\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty}\left[f(z)-\sum_{k=0}^{n}c_kg_{2k}(z)\right]^2\frac{\sqrt{4z-1}}{2\pi z^2}\mathrm{d}z\\&=\frac{4}{\pi}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\left[f\left(\frac{1}{4x^2}\right)-\sum_{k=0}^{n}c_kU_{2k}(x)\right]^2\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\left[F(x)-\sum_{k=0}^{n}c_kU_{2k}(x)\right]^2\mathrm{d}x\\&=\left\|F-\sum_{k=0}^{n}c_kU_{2k}\right\|_2^2,\end{aligned}$$

其中$\|\cdot\|_2$表示空间$L^2([-1,1],r)$的范数，权函数

$$r(x)=\sqrt{\frac{2-2x^2}{\pi}},x\in[-1,1].$$

第二类切比雪夫多项式属于该空间[13]。根据维尔斯特拉斯逼近定理关于空间$L^2([-1,1],r)$的一个版本(参见文献[13]，推论 3.2A)，对于任何事先给定的正数ε，存在整数m以及一组实系数$a_0,a_1,\cdots,a_m$，使得

$$\left\|F-\sum_{k=0}^{m}a_kU_k\right\|_2<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于F是偶函数，令$t=-x$，得到

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2}&>\left\|F-\sum_{k=0}^{m}a_kU_k\right\|_2\\&=\left\{\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\left[F(x)-\sum_{k=0}^{m}a_kU_k(x)\right]^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}\\&=\left\{\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\left[F(t)-\sum_{k=0}^{m}(-1)^ka_kU_k(t)\right]^2\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}}\\&=\left\|F-\sum_{k=0}^{m}(-1)^ka_kU_k\right\|_2.\end{aligned}$$

现在令$n=\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor$以及$c_k=a_{2k}$。则有

$$\begin{aligned}\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_kg_{2k}\right\|&=\left\|F-\sum_{k=0}^{n}c_kU_{2k}\right\|_2\\&=\left\|\frac{1}{2}\left(F-\sum_{k=0}^{m}a_kU_k\right)+\frac{1}{2}\left[F-\sum_{k=0}^{m}(-1)^ka_kU_k\right]\right\|_2.\end{aligned}$$

应用闵可夫斯基不等式，我们有

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_kg_{2k}\right\|\le\frac{\sqrt{2}}{2}\left\|F-\sum_{k=0}^{m}a_kU_k\right\|_2+\frac{\sqrt{2}}{2}\left\|F-\sum_{k=0}^{m}(-1)^ka_kU_k\right\|_2.$$

由ε的任意性、引理 1 以及$\mathcal{H}$的完备性，我们得到$f\in\mathcal{H}$。证毕。

下面给出一个关于示性函数的引理。

引理 3. 设E是如下的集合之一：

(1) $E=\left[\frac{1}{4},a\right)$，其中$a\in\mathcal{Z}$；

(2) E是$\mathcal{Z}$上的开区间；

(3) E是$\mathcal{Z}$上的勒贝格可测集，

则示性函数$\mathbf{1}_E\in\mathcal{H}$。

证明 (1) 设$E=\left[\frac{1}{4},a\right)$。不失一般地，设$a>2$。对任何$n>1$，定义

$$f_{n,a}(z)=\begin{cases}1, & z\in\left[\frac{1}{4},a-\frac{1}{n}\right],\\ \frac{1}{2}(1+na-nz), & z\in\left(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}\right),\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

也就是说，$f_{n,a}$ 在 E 上为 1，在 $[2,+\infty)$ 上为零，中间用直线段连接起来。那么，就成立 $f_{n,a}\in C(\mathcal{Z})$。由引理 2，$f_{n,a}\in\mathcal{H}$。另外，$n\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{1}_E-f_{n,a}\right\|^2&=\int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}}\left[1-f_{n,a}(z)\right]^2\frac{\sqrt{4z-1}}{2\pi z^2}\mathrm{d}z\\&\le\frac{2}{n}\max_{z\in\left(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}\right)}\frac{\sqrt{4z-1}}{2\pi z^2}\\&\le\frac{2}{\pi n}\to 0.\end{aligned}$$

因此 $\mathbf{1}_E\in\mathcal{H}$。

(2) 设 $E=(b,c)$，其中 $\frac{1}{4}\le b<c$，我们知道 $\mathbf{1}_{\{z=b\}}\in\mathcal{H}$，因为它在 $\mathcal{Z}$ 上几乎处处等于零。根据第一种情形，我们有

$$\mathbf{1}_E=\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{4},c\right)}-\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{4},b\right)}-\mathbf{1}_{\{z=b\}}\in\mathcal{H}.$$

(3) 设 E 是 $\mathcal{Z}$ 上的勒贝格可测集。给定正数 ε，存在 $z_1>\frac{1}{4}$ 使得

$$\mu\left([z_1,+\infty)\right)<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

令 $E_0=E\cap\left[\frac{1}{4},z_1\right]$。根据文献[10]中关于勒贝格测度的一个定理(42 页，定理 12)，我们知道，存在互不相交的开区间 $E_k\subset\left[\frac{1}{4},z_1\right],0\le k\le n$，使得

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\setminus E_0\right)+\mu\left(E_0\setminus\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

根据第二种情形的结果，我们得到

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^{n}E_k}=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{E_k}\in\mathcal{H}.$$

因此可以推出

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^{n}E_k}-\mathbf{1}_E\right\|^2&=\int_{E_0\Delta\bigcup_{k=1}^{n}E_k}\left(\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^{n}E_k}-\mathbf{1}_{E_0}\right)^2\mathrm{d}\mu+\int_{[z_1,+\infty)}\left(\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^{n}E_k}-\mathbf{1}_E\right)^2\mathrm{d}\mu\\&=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\setminus E_0\right)+\mu\left(E_0\setminus\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)+\mu\left([z_1,+\infty)\right)\\&<\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}=\varepsilon^2.\end{aligned}$$

其中第一步右端第一个积分的积分域中，Δ 表示两个集合的对称差。由上式两边开根号可得

$$\left\| \mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^{n} E_k} - \mathbf{1}_{E_0} \right\| < \varepsilon .$$

这表明对任何 $\mathcal{Z}$ 上的勒贝格可测集 E，都成立 $\mathbf{1}_E \in \mathcal{H}$ 。证毕。

3. $L^2(\mathcal{Z},w)$ 空间中的基定理及其函数论证明

本部分，我们叙述并证明下面的定理：

定理 4. ($L^2(\mathcal{Z},w)$ 空间中的基定理) $\{g_{2n} : n \in \mathrm{N}\}$ 是 $L^2(\mathcal{Z},w)$ 的一组标准正交基。

证明 根据 $\mathcal{H}$ 的定义，只需证明 $L^2(\mathcal{Z},w) \subset \mathcal{H}$ 。假设 $f \in L^2(\mathcal{Z},w)$， $\varepsilon \in (0,1)$ 。那么我们有如下两个结论。

首先，根据均方收敛的意义，存在 $z_2 > \frac{1}{4}$ 使得

$$\int_{[z_2,+\infty)} f^2 \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

其次，设 $n \geq 1$，固定 f，令

$$A_n^f = \left\{ z \in \left[\frac{1}{4}, z_2\right] : \left| f(z) \right| \geq 2^n \right\},$$

那么 A_n^f 是勒贝格可测的，且随着 $n \to \infty$ 单调下降。我们断言：存在只依赖于 ε 和 z_2 的正整数 N_1 ，对任何 $n > N_1$ ，成立

$$\int_{A_n^f} f^2 \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

我们用反证法证明该断言。若不然，就必然存在某个 $\varepsilon_0 > 0$ 和递增正整数序列 $n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots$ ，使得

$$\int_{A_{n_k}^f} f^2 \mathrm{d}\mu \geq \frac{\varepsilon_0^2}{4}.$$

这时我们记

$$A_\infty^f = \left\{ z \in \left[\frac{1}{4}, z_2\right] : f(z) = \pm\infty \right\},$$

那么

$$\lim_{k\to\infty} A_{n_k}^f = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k}^f = A_\infty^f,$$

且

$$\int_{A_\infty^f} f^2 \mathrm{d}\mu \geq \frac{\varepsilon_0^2}{4}.$$

但这又可以推出

$$\mu\left(A_\infty^f\right) > 0,$$

并且进一步有

$$\int_{\mathcal{Z}} f^2 \mathrm{d}\mu \geq \int_{A_\infty^f} f^2 \mathrm{d}\mu = +\infty.$$

这与 $f\in L^2(\mathcal{Z},w)$ 的假设矛盾。因此断言成立。这里的证明利用了可测函数在某个集合上值为无穷的性质。当这样的集合勒贝格测度为零时，其平方的积分为零；否则，其平方的积分为无穷，不可能取中间正值。

接下来，我们需要利用上面两个结论，构造性地选取的特殊 n 值 n_0 和空间 $\mathcal{H}$ 中与 n_0 有关的函数 f_1，去证明 $f\in\mathcal{H}$，从而证明 $f-f_1\in\mathcal{H}$。为此，我们令

$$n_0=\max\left\{N_1+1,\left\lfloor\log_2\frac{2\sqrt{4z_2-1}}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\right\rfloor+1\right\}$$

以及

$$f_1(z)=\begin{cases}2^{-n_0}\left\lfloor f(z)2^{n_0}\right\rfloor, & z\in\left[\frac{1}{4},z_2\right]\setminus A_{n_0}^f,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

那么 f_1 是一个简单函数，即示性函数的线性组合。根据引理 3， $f_1\in\mathcal{H}$。另外，我们还有如下推理：

$$\begin{aligned}\int_{\left[\frac{1}{4},z_2\right]\setminus A_{n_0}^f}(f-f_1)^2\mathrm{d}\mu&=\int_{\left[\frac{1}{4},z_2\right]\setminus A_{n_0}^f}(f-f_1)^2(z)\frac{\sqrt{4z-1}}{2\pi z^2}\mathrm{dz}\\&<\int_{\left[\frac{1}{4},z_2\right]\setminus A_{n_0}^f}(f-f_1)^2(z)\frac{1}{\pi z^{\frac{3}{2}}}\mathrm{dz}\\&\le\int_{\left[\frac{1}{4},z_2\right]\setminus A_{n_0}^f}4^{-n_0}\frac{8}{\pi}\mathrm{dz}\\&\le\int_{\left[\frac{1}{4},z_2\right]}4^{-n_0}\frac{8}{\pi}\mathrm{dz}\\&\le\frac{8}{\pi}\left(z_2-\frac{1}{4}\right)4^{-n_0}\\&<\frac{8}{\pi}\left(z_2-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi\varepsilon^2}{16\left(z_2-\frac{1}{4}\right)}=\frac{\varepsilon^2}{2}.\end{aligned}$$

这推理利用了集合的放缩，不同集合上的函数性质以及 n_0 选取的特殊性。因此

$$\|f-f_1\|<\varepsilon,$$

这意味着 $f-f_1\in\mathcal{H}$，以及 $f=f_1+(f-f_1)\in\mathcal{H}$。由 f 的任意性，我们得到 $L^2(\mathcal{Z},w)\subset\mathcal{H}$。证毕。

4. 结论

基函数是希尔伯特空间中的根本结构，基定理是空间 $L^2(\mathcal{Z},w)$ 中的基本定理。根据该定理，可以对空间其中的函数进行有效表示。不难看出，$\{g_{2n}:n\in\mathrm{N}\}$ 对 $L^2(\mathcal{Z},w)$ 中任意函数的逼近层次为：首先用基函数 $\{g_{2n}:n\in\mathrm{N}\}$ 逼近 $\mathcal{Z}$ 上所有连续函数，然后用连续函数逼近 $\mathcal{Z}$ 中勒贝格可测集上的示性函数，示性函数组合成简单函数，简单函数逼近了 $L^2(\mathcal{Z},w)$ 内所有函数。申明该空间中逼近的层次关系，有助于开展该空间的函数在逼近理论、计算数学及其它应用科学中的研究。

基金项目

宁夏自然科学基金项目(2021AAC03106)。

参考文献

[1] Kilmer, S., Liu, J., Sun, X. and Wright, M. (2023) Constructing Positive Definite Polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **151**, 4307-4316. https://doi.org/10.1090/proc/16429

[2] Romdhane, N.B. and Gaied, M. (2016) A Generalization of the Symmetric Classical Polynomials: Hermite and Gegenbauer Polynomials. *Integral Transforms and Special Functions*, **27**, 227-244. https://doi.org/10.1080/10652469.2015.1114483

[3] Van Assche, W. (2022) Orthogonal Polynomials, Toda Lattices and Painlevé Equations. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **434**, Article ID: 133214. https://doi.org/10.1016/j.physd.2022.133214

[4] Rivlin, T.J. (1990) Chebyshev Polynomials—From Approximation Theory to Algebra and Number Theory. 2nd Edition, John Wiley & Sons.

[5] Liu, J. (2024) Orthonormal Rational Functions on a Semi-Infinite Interval. *Applied Mathematics and Computation*, **479**, Article ID: 128887. https://doi.org/10.1016/j.amc.2024.128887

[6] Boyd, J.P. (1987) Orthogonal Rational Functions on a Semi-Infinite Interval. *Journal of Computational Physics*, **70**, 63-88. https://doi.org/10.1016/0021-9991(87)90002-7

[7] Shen, J and Wang, L. (2009) Some Recent Advances on Spectral Methods for Unbounded Domains. *Communications in Computational Physics*, **5**, 195-241.

[8] Huseynov, A. (2010) Eigenfunction Expansion Associated with the One-Dimensional Schrödinger Equation on Semi-Infinite Time Scale Intervals. *Reports on Mathematical Physics*, **66**, 207-235. https://doi.org/10.1016/s0034-4877(10)00026-1

[9] Rudin, W. (1976) Principles of Mathematical Analysis. 3rd Edition, McGraw-Hill Education.

[10] Royden, H.L. and Fitzpatrick P. (2010) Real Analysis. 4th Edition, Prentice-Hall.

[11] Wynn, P. (1960) The Rational Approximation of Functions Which Are Formally Defined by a Power Series Expansion. *Mathematics of Computation*, **14**, 147-186. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1960-0116457-2

[12] Eslahchi, M.R., Dehghan, M. and Amani, S. (2012) The Third and Fourth Kinds of Chebyshev Polynomials and Best Uniform Approximation. *Mathematical and Computer Modelling*, **55**, 1746-1762. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.11.023

[13] Mason, J.C. and Handscomb, D.C. (2002) Chebyshev Polynomials. CRC Press.