Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(9), 61-66
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.149327

退化Hessian商方程Neumann问题的梯度估计

孙文静*，韩　菲#，武春雨

新疆师范大学数学科学学院，新疆　乌鲁木齐

收稿日期：2024年8月12日；录用日期：2024年9月10日；发布日期：2024年9月19日

摘　要

研究一类退化Hessian商方程Neumann问题，通过选取恰当的辅助函数，利用极大值原理和基本对称函数的性质，在条件 $f^{1/k-l} \in C^1\left(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^n\right)$ 下得到该方程当 f 依赖于 x, Du 时解的全局梯度估计。

关键词

退化Hessian商方程，Neumann问题，梯度估计

Gradient Estimates on Degenerate Hessian Equations with Neumann Problem

Wenjing Sun*, Fei Han#, Chunyu Wu

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Aug. 12th, 2024; accepted: Sep. 10th, 2024; published: Sep. 19th, 2024

Abstract

In this paper, degenerate Hessian quotient equations with Neumann problem has studied. By choosing suitable auxiliary functions, using the maximum principle and the properties of basic symmetric functions, with the $f^{1/k-l} \in C^1\left(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^n\right)$ condition, the global gradient estimation for the admissible solution of the equations with dependent on x and Du has obtained.

Keywords

Degenerate Hessian Quotient Equations, Neumann Problem, Gradient Estimates

*第一作者。

#通讯作者。

文章引用: 孙文静, 韩菲, 武春雨. 退化 Hessian 商方程 Neumann 问题的梯度估计[J]. 理论数学, 2024, 14(9): 61-66.
DOI: 10.12677/pm.2024.149327

1. 引言

完全非线性方程在几何分析中扮演着重要角色。微分几何，复几何中许多问题可以约化为对完全非线性方程的解的存在性和唯一性的研究。如：著名 Calbi 猜想等价于在紧凯勒流形上求解一个复蒙日－安培方程。这使得我们可以通过对完全非线性偏微分方程的研究来推进相应领域的发展。

Hessian 商方程是一类经典的完全非线性方程。考虑如下方程

$$\frac{\sigma_k\left(D^2u\right)}{\sigma_l\left(D^2u\right)}=f\left(x\right),\quad \Omega\subset\mathbb{R}^n. \tag{1}$$

其中 $0\le l\le k\le n$，$\sigma_k\left(D^2u\right)$ 是 Hessian 矩阵 D^2u 的特征值的 k 阶基本对称函数。当 $l=0$ 时，(1)式是 k-Hessian 方程。当 $l=0,k=n$ 时，(1)式是 Monge-Ampere 方程。

解的先验估计是讨论 Hessian 商方程可解性问题的一个关键步骤。与非退化方程不同，在退化情形下解的先验估计的建立需要讨论 f 在 $\{f=0\}$ 附近的正则性。文献[1]研究了退化 Monge-Ampere 方程的 Dirichlet 问题，得到了在条件 $f^{1/n-1}\in C^{1,1}\left(\bar{\Omega}\right)$ 下 $C^{1,1}$ 解的先验估计。特别地，当所做估计与 $\inf_{\bar{\Omega}} f$ 无关时，则存在退化 Monge-Ampere 方程的唯一凸解 $u\in C^{1,1}\left(\bar{\Omega}\right)$。Ivochkina [2]研究了一类仅依赖于 Hessian 矩阵特征值的完全非线性椭圆方程，得到了在条件 $f^{1/k}\in C^{1,1}\left(\bar{\Omega}\right)$ 下解的存在性定理。随后，文献[3]研究了退化 k-Hessian 方程的 Dirichlet 问题，在条件 $f^{1/k-1}\in C^{1,1}\left(\bar{\Omega}\right)$ 下得到了在严格凸有界域下的 $C^{1,1}$ 解的先验估计。而对于退化 Hessian 商方程，文献[4]研究了如下退化 Hessian 商方程的 Neumann 边值问题，证明了在条件 $f^{1/k-l}\in C^{2}\left(\bar{\Omega}\right)$ 下 $C^{1,1}$ 解的存在性定理。

$$\begin{cases}\dfrac{\sigma_k\left(D^2u\right)}{\sigma_l\left(D^2u\right)}=f\left(x\right), & x\in\Omega,\\ u_\gamma=c+\varphi, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

自然地，会好奇当右端函数 f 与 Du 有关时，退化 Hessian 商方程 Neumann 问题的解是否存在?作为重要的一步，文章先给出解的先验估计。

为此文章考虑带有梯度项的退化 Hessian 商方程 Neumann 问题，在 $f^{1/k-l}\in C^{1}\left(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^n\right)$ 和一般性条件下得到了解的 C^0，C^1 估计。

2. 主要结果

定理 1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是 C^3 严格凸区域，γ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向，设 $u\in C^3\left(\Omega\right)\cap C^2\left(\bar{\Omega}\right)$ 是如下方程的 k 阶容许解，

$$\begin{cases}\dfrac{\sigma_k\left(D^2u\right)}{\sigma_l\left(D^2u\right)}=f\left(x,Du\right), & x\in\Omega,\\ u_\gamma=c+\varphi, & x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{2}$$

并满足 $|u|\le M$。若 $\varphi\in C^2\left(\partial\Omega\right)$，$f\left(x,p\right)$ 是非负函数，$f^{1/k-l}\in C^{1}\left(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^n\right)$，且 f 满足

$$\left|f(x,p)\right|+\left|\sum_{1\le i\le n}u_{x_i}f_{p_i}(x,p)\right|\le\frac{L_1}{v},\quad x\in\bar\Omega\times\mathbb{R}^n.\tag{3}$$

则存在唯一常数 c， $M_1=M_1\left(n,k,l,M_0,\Omega,\varphi,\left|f^{1/k-l}\right|_{C^1\left(\bar\Omega\times\mathbb{R}^n\right)}\right)$ 使得

$$\sup_{\bar\Omega}\left|Du\right|\le M_1.\tag{4}$$

注 1 对于 Hessian 商方程(2)的 Neumann 问题，由于原方程的一个解加上任意常数仍是方程的一个解，故不能得到解的一致有界性，因此不能使用连续性方法得到解的存在性。为解决上述问题，通常考虑如下一族方程的解 u^ε [5] [6]。

$$\begin{cases}\dfrac{\sigma_k\left(D^2u\right)}{\sigma_l\left(D^2u\right)}=f(x,Du), & x\in\Omega,\\ u_\gamma=-\varepsilon u+\varphi, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{5}$$

对 $\forall\varepsilon>0$，需建立与 ε 无关的 u^ε 的先验估计，最后令 $\varepsilon\to0$ 即可证得(2)式解的先验估计。

3. 预备知识

下面介绍基本对称函数 $\sigma_k(\lambda)$ 的定义和基本性质。

定义 1 对 $\forall k=1,2,\cdots,n$， $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$， 定义

$$\sigma_k(\lambda)=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k},$$
$$\sigma_k(\lambda)=\sigma_k(\lambda|i)+\lambda_i\sigma_{k-1}(\lambda|i),\quad 1\le i\le n,$$
$$\sum_{i=1}^n\lambda\sigma_{k-1}(\lambda|i)=k\sigma_k(\lambda),$$
$$\sum_{i=1}^n\sigma_k(\lambda|i)=(n-k)\sigma_k(\lambda).$$

定义 2 Garding 锥定义为

$$\Gamma_k=\left\{\lambda\in\mathbb{R}^n:\sigma_i(\lambda)>0,\forall1\le i\le k\right\}.$$

并具有以下性质：

若 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\Gamma_k$， $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n$， 则有 $\lambda_k>0$，

$$\sigma_{k-1}(\lambda|n)\ge\cdots\ge\sigma_{k-1}(\lambda|k)\ge\cdots\ge\sigma_{k-1}(\lambda|1)>0,$$

和

$$\sigma_{k-1}(\lambda|k)\ge C(n,k)\sum_{i=1}^n\sigma_{k-1}(\lambda|i).\tag{6}$$

为简便，记

$$F\left(D^2u\right)=\frac{\sigma_k\left(D^2u\right)}{\sigma_l\left(D^2u\right)},F^{ij}=\frac{\partial F}{\partial u_{ij}},\tilde F\left(D^2u\right)=\left(\frac{\sigma_k\left(D^2u\right)}{\sigma_l\left(D^2u\right)}\right)^{\frac{1}{k-l}},\tilde F^{ij}=\frac{\partial\tilde F}{\partial u_{ij}},$$

其中 $F=\sum_{i=1}^nF^{ii}$ 是矩阵 $\left(F^{ij}\right)_{n\times n}$ 的迹， $\tilde F=\sum_{i=1}^n\tilde F^{ii}$ 是矩阵 $\left(\tilde F^{ij}\right)_{n\times n}$ 的迹。

命题 1 对 $\forall\lambda\left(D^2u\right)\in\Gamma_k$， 则有

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{F}^{ii}\geq\left[\frac{C_n^k}{C_n^l}\right]^{\frac{1}{k-l}}. \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{F}^{ii}u_{ii}=\left(\frac{\sigma_k\left(D^2u\right)}{\sigma_l\left(D^2u\right)}\right)^{\frac{1}{k-l}}. \tag{8}$$

4. 退化 Hessian 商方程斜边值问题的 C^0 估计

定理 2 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n\,(n\geq3)$ 是 C^1 有界区域，γ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，若 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ 是方程的 k 阶容许解且 $\varepsilon\in(0,1)$，则存在常数 $M_0=M_0\left(k,n,\mathrm{diam}(\Omega),\varphi,|f|_{C^0(\Omega\times\mathbb{R}^n)}\right)$ 使得

$$\sup_{\bar{\Omega}}|\varepsilon u|\leq M_0. \tag{9}$$

证明 不妨设 $0\in\Omega$，取 $v=A|x|^2$，A 足够大且依赖于 n,k,l 和 $|f|_{C^0\times R^n}$。得

$$F\left(D^2u\right)=f\left(x,Du\right)\leq\max_{\Omega}f\leq F\left(D^2v\right).$$

由比较原理可知，$u-v$ 在边界点 $x_0\in\partial\Omega$ 处达到非正最小值，则有

$$0\geq(u-v)_\gamma(x_0)=-\varepsilon u(x_0)+\varphi(x_0)-2Ax_0\cdot\gamma.$$

对 $x\in\bar{\Omega}$，有

$$\varepsilon(u-v)(x)\geq\varepsilon(u-v)(x_0)\geq-|\varphi|_{C^0}-2A\left(\mathrm{diam}(\Omega)\right)^2-2A\mathrm{diam}(\Omega).$$

因此，

$$\min_{x\in\Omega}\varepsilon u\geq\min_{x\in\Omega}\varepsilon(u-v)\geq-|\varphi|_{C^0}-2A\left(\mathrm{diam}(\Omega)\right)^2-2A\mathrm{diam}(\Omega). \tag{10}$$

再由 $\lambda\left(D^2u\right)\in\Gamma_k$ 可知，u 是下调和的，故 u 在边界点 $x_1\in\partial\Omega$ 达到非负最大值，则有

$$0\leq u_\gamma(x_1)=-\varepsilon u(x_1)+\varphi(x_1).$$

因此，

$$\max_{\bar{\Omega}}\varepsilon u=\varepsilon u(x_1)\leq\sup_{\partial\Omega}\varphi. \tag{11}$$

由(10)式和(11)式可知定理得证。

5. 退化 Hessian 商方程斜边值问题的 C^1 估计

下面证明了与 ε 无关的全局梯度估计，证法与文献[6]中复 Monge-Ampere 的 C^1 估计证明类似。

定理 3 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是 C^3 严格凸区域，$\varphi\in C^2(\partial\Omega)$，$f(x,p)$ 是非负函数且 $f^{1/k-l}\in C^1\left(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^n\right)$ 并满足条件(3)，若 $u\in C^3(\Omega)\cap C^2(\bar{\Omega})$ 是方程(5)的 k 阶容许解，则存在 $M_1=M_1\left(n,k,l,M_0,\Omega,\varphi,\left|f^{1/k-l}\right|_{C^1\left(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^n\right)}\right)$ 使得

$$\sup_{\bar{\Omega}}|Du|\leq M_1. \tag{12}$$

证明 证(12)式等价于证

$$D_\xi u(x)\leq M_1,\quad (x,\xi)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{S}^{n-1}. \tag{13}$$

对 $\forall(x,\xi)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{S}^{n-1}$ 考虑辅助函数

$$W(x,\xi)=D_{\xi}u(x)-\langle\gamma,\xi\rangle(-\varepsilon u+\varphi(x))+\varepsilon^{2}u^{2}+K|x|^{2}, \tag{14}$$

其中 K 是待定正常数，γ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。

设 W 在点 $(x_0,\xi_0)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{S}^{n-1}$ 达到最大值，则 $D_{\xi_0}u(x_0)>0$。断言：$x_0\in\partial\Omega$，否则，将得到下述矛盾。首先通过旋转坐标使得 $D^2u(x_0)$ 是对角的，易得 $\{\tilde{F}^{ij}\}$ 是对角的。取定 $\xi=\xi_0$，使得 $W(x,\xi_0)$ 在点 x_0 处达到最大值，则在点 x_0 处对 W 求导，利用最大值原理有，

$$0=W_i=u_{i\xi_0}-\langle\gamma,\xi\rangle_i(-\varepsilon u+\varphi(x))-\langle\gamma,\xi\rangle(-\varepsilon u_i+\varphi_i)+2\varepsilon^{2}uu_i+K|x|_i^{2}, \tag{15}$$

$$0\ge W_{ii}=u_{ii\xi_0}-\langle\gamma,\xi_0\rangle_{ii}(-\varepsilon u+\varphi)-\langle\gamma,\xi_0\rangle(-\varepsilon u_{ii}+\varphi_{ii})-2\langle\gamma,\xi_0\rangle_i(-\varepsilon u_i+\varphi_i)+2\varepsilon^{2}u_i^{2}+2\varepsilon^{2}uu_{ii}+K, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}0\ge\tilde{F}^{ii}W_{ii}&=-\left|(k-l)\tilde{f}_{x_l}+\tilde{f}_{p_k}u_{kl}\right|_{C^0}+\tilde{F}^{ii}\left[2\varepsilon^{2}u_i^{2}+2\langle\gamma,\xi_0\rangle_i\varepsilon u_i\right]+\tilde{F}^{ii}u_{ii}\left[\varepsilon\langle\gamma,\xi_0\rangle+2\varepsilon^{2}u\right]\\&\quad+\tilde{F}^{ii}\left[K-\langle\gamma,\xi_0\rangle_{ii}(-\varepsilon u+\varphi)-\langle\gamma,\xi_0\rangle\varphi_{ii}-2\langle\gamma,\xi_0\rangle_i\varphi_i\right]\\&\ge-\left|\tilde{f}_{x_l}\right|-\tilde{f}_{p_k}u_{kl}-\left|\tilde{f}\right|_{C^0}[1+2M_0]\\&\quad+\left[\frac{C_n^k}{C_n^l}\right]^{\frac{1}{k-l}}\left[K-\left|D\langle\gamma,\xi_0\rangle\right|^{2}-\left|D^{2}\langle\gamma,\xi_0\rangle\right|(M_0+|\varphi|)-\left|D^{2}\varphi\right|-2\left|D\langle\gamma,\xi_0\rangle\right||D\varphi|\right]\\&\ge 0.\end{aligned}$$

其中，对不等号右边第二项估计如下，由(15)式可知

$$\begin{aligned}u_{i\xi_0}&=\langle\gamma,\xi\rangle_i(-\varepsilon u+\varphi(x))+\langle\gamma,\xi\rangle(-\varepsilon u_i+\varphi_i)-2\varepsilon^{2}uu_i-K|x|_i^{2}\\&\ge-D\langle\gamma,\xi\rangle(M_0+|\varphi|)-\varepsilon u_i+\varphi_i-2\varepsilon M_0u_i-K|x|_i^{2}\\&\ge-(\varepsilon+2\varepsilon M_0)u_i-C\\&\ge-Cu_i-C.\end{aligned}$$

由(3)式可知

$$\tilde{f}_{p_k}u_{kl}\ge-C\tilde{f}_{p_k}|u_i|-C\ge-C. \tag{17}$$

其中，K 足够大且依赖于 $n,k,l,M_0,\Omega,|\varphi|_{C^2},\left|f^{\frac{1}{k-l}}\right|_{C^1(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^n)}$，矛盾！故有 $x_0\in\partial\Omega$。为证定理 2 需考虑如下 3 种情形。

情形 1 若 ξ_0 是法向且 $x_0\in\partial\Omega$，有

$$W(x_0,\xi_0)=\varepsilon u^{2}+K|x_0|^{2}\le C.$$

情形 2 若 ξ_0 是任意方向且 $x_0\in\partial\Omega$，可设 $\xi_0=\alpha\tau+\beta\gamma=\langle\xi_0,\tau\rangle\tau+\langle\xi_0,\gamma\rangle\gamma$，其中 $\tau\in\mathbb{S}^{n-1}$ 是 x_0 的切向，且满足 $\langle\tau,\gamma\rangle=0$，$\alpha=\langle\xi_0,\tau\rangle>0$，$\beta=\langle\xi_0,\gamma\rangle<1$，$\alpha^2+\beta^2=1$。可得

$$\begin{aligned}W(x_0,\xi_0)&=D_{\xi_0}u-\langle\xi_0,\gamma\rangle(-\varepsilon u+\varphi)+\varepsilon u^{2}+K|x_0|^{2}\\&=\alpha D_{\tau}u++\varepsilon u^{2}+K|x_0|^{2}\\&\le\alpha W(x_0,\xi_0)+(1-\alpha)\left(\varepsilon u^{2}+K|x_0|^{2}\right).\end{aligned}$$

故有

$$W(x_0,\xi_0) \le \varepsilon u^2 + K|x_0|^2 \le C.$$

情形 3 若 ξ_0 是切向且 $x_0 \in \partial\Omega$，可设在 x_0 处外法向为 $(0,\cdots,0,1)$，通过旋转坐标可设 $\xi_0 = (1,0,\cdots,0) = e_1$，故 $W(x,\xi)$ 在 ξ_0 的方向处，$u_i(x_0) \le C, i>1$，设 $\xi(t) = \frac{(1,t,0,\cdots,0)}{\sqrt{1+t^2}}$，得

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}W(x_0,\xi(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = u_2(x_0) - \gamma^2(-\varepsilon u_1 + \varphi(x)),$$

$$|u_2|(x_0) \le C.$$

其中是 C 是依赖于 φ, M_0 的常数。同理可得 $|u_i(x_0)| \le C, i>1$。

$$\begin{aligned} 0 &\le D_\gamma W(x_0,\xi_0) = D_\gamma D_1 u - D_\gamma \langle \xi_0,\gamma\rangle(-\varepsilon u + \varphi) + 2u\cdot D_\gamma u + KD_\gamma |x|^2 \\ &\le D_\gamma D_1 u + C_1 = D_1 D_\gamma u - D_1\gamma_k D_k u + C_1 \\ &\le D_1\varphi - \kappa_{\min} W(x_0,\xi_0) + C_2 + C_1. \end{aligned} \tag{18}$$

故有

$$W(x_0,\xi_0) \le \frac{|D\varphi| + C_1 + C_2}{\kappa_{\min}}. \tag{19}$$

由定理 2 和定理 3 可知，定理 1 得证。

6. 结论

通过引入恰当的辅助函数，利用基本对称函数的性质和极大值原理得到了当右端函数 f 依赖于 x, Du 时退化 Hessian 商方程解的 C^0, C^1 估计。进一步还可以考虑此类方程解的 C^2 估计，从而去讨论解的存在性，唯一性及解的形态。

基金项目

国家自然科学基金项目(12061078)。

参考文献

[1] Guan, P., Trudinger, N.S. and Wang, X. (1999) On the Dirichlet Problem for Degenerate Monge-Ampère Equations. *Acta Mathematica*, **182**, 87-104. https://doi.org/10.1007/bf02392824

[2] Ivochkina, N., Trudinger, N. and Wang, X. (2005) The Dirichlet Problem for Degenerate Hessian Equations. *Communications in Partial Differential Equations*, **29**, 219-235. https://doi.org/10.1081/pde-120028851

[3] Jiao, H. and Wang, Z. (2024) Second Order Estimates for Convex Solutions of Degenerate *k*-Hessian Equations. *Journal of Functional Analysis*, **286**, 110248. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2023.110248

[4] Mei, X. (2021) The Neumann Problem for Degenerate Hessian Quotient Equations. *Communications in Contemporary Mathematics*, **24**, 2150006. https://doi.org/10.1142/s0219199721500061

[5] Lions, P.-L., Trudinger, N.S. and Urbas, J.I.E. (1986) The Neumann Problem for Equations of Monge-Ampère Type. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **39**, 539-563. https://doi.org/10.1002/cpa.3160390405

[6] Li, S.Y. (1994) On the Neumann Problems for Complex Monge-Ampere Equations. *Indiana University Mathematics Journal*, **43**, 1099-1122. https://doi.org/10.1512/iumj.1994.43.43048