

随机热方程的拟似然估计

盖子若, 杨晗璐, 闫理坦*

东华大学数学与统计学院, 上海

收稿日期: 2025 年 2 月 27 日; 录用日期: 2025 年 4 月 15 日; 发布日期: 2025 年 4 月 29 日

摘要

我们使用拟似然方法研究了随机热方程的参数估计问题, 该方程为:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + \sqrt{\theta} \dot{W}(t, x) \quad (t \geq 0, x \in \mathbb{R})$$

其初始条件 $u(0, x) = 0$, $\dot{W}$ 是时空白噪声, Δ 为拉普拉斯算子。假设解关于时间可以离散观测, 我们给出了参数 θ 的估计量, 并基于 Malliavin 微积分得到估计量的渐近行为。

关键词

随机热方程, 时空白噪声, 马列万分析, 拟似然, 参数估计

Quasi-Likelihood Estimation of Stochastic Heat Equation

Ziruo Gai, Hanlu Yang, Litan Yan*

Department of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai

Received: Feb. 27th, 2025; accepted: Apr. 15th, 2025; published: Apr. 29th, 2025

* 通讯作者。

Abstract

In this paper, we investigate the parameter estimation of stochastic heat equation by using the quasi-likelihood method. The equation is given by:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \frac{1}{2}\Delta u(t, x) + \sqrt{\theta}\dot{W}(t, x) \quad (t \geq 0, x \in \mathbb{R})$$

with $u(0, x) = 0$, where $\dot{W}$ is a space-time white noise and Δ is Laplacian. Assuming that the temporal process can be discretely observed, we provide an estimator for the parameter θ and derive the asymptotic behavior of the estimator based on Malliavin calculus.

Keywords

Stochastic Heat Equation, Space-Time White Noise, Malliavin Calculus, Quasi-Likelihood, Parameter Estimates

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在本文中，我们研究以下随机热方程的参数估计问题，该方程表示为：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \frac{1}{2}\Delta u(t, x) + \sqrt{\theta}\dot{W}(t, x), & t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 Δ 是拉普拉斯算子， $\dot{W}$ 是时空白噪声， $\theta > 0$ 是一个未知参数。事实上，许多学者已经研究了该方程的参数估计问题，包括谱方法、 p -变分方法、最小二乘法、极大似然方法等。我们参考了文献 Chong [1], Cialenco [2], Cialenco [3], Cialenco 及 Huang [4], Cialenco [5] [6], Hildebrandt 及 Trabs [7], Markussen [8], Maslowski 及 Pospisil [9], Pospisil 及 Tribe [10], Torresy [11] 以及文中的参考文献。作为一种尝试，本文通过拟似然方法研究方程 (1.1) 的参数估计问题。

假设时间过程 $t \mapsto u(t, \cdot)$ 可以在离散时间点 $\{t_i = \frac{i}{n}T, i = 1, 2, \dots, n\}$ (其中 $T > 0$) 上被观测到。记 $\xi_i = u(t_i, x) - u(t_{i-1}, x)$, 其中 $x \in \mathbb{R}$ 且 $t > 0$ 。由此得到参数 θ 的拟似然函数如下:

$$L(\theta) := \prod_{i=1}^n f_{\xi_i}(\xi_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi A(i)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 A(i)} (\xi_i)^2 \right\},$$

其中 $f_Y(\cdot)$ 是随机变量 Y 的密度函数, $A(i) = E[\xi_i^2]$ 。通过使用类似于极大似然的方法, 利用该拟似然函数, 我们得到参数 θ 的估计量:

$$\hat{\theta}_n = \sqrt{\frac{2\pi}{Tn}} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^2}{A(i)}, \quad (1.2)$$

本文主要结果是证明估计量 $\hat{\theta}_n$ 的相合性, 且估计量误差过程的分布有:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, 4\theta^2)$$

在 n 趋于无穷时成立。

2. 预备知识

本节中, 我们简要回顾随机热方程(1.1)的适定解 u 相关的性质, 并引入解 u 关于时间的过程 u^x 的马列万导数和多重随机积分。我们将在证明拟似然估计量的渐近正态性时使用这一工具。

2.1. 时间过程 u^x

我们已知

$$u(t, x) = \sqrt{\theta} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-r, x-y) W(dr, dy), \quad t \geq 0,$$

其中 $x \in \mathbb{R}$ 且 $t \geq 0$, $G(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ 为热核。显然, 有

$$E[u(t, x)u(s, y)] = \frac{\theta}{2\pi} \int_0^{t \wedge s} \frac{1}{\sqrt{t+s-2z}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t+s-2z)}} dz \quad (2.1)$$

对所有 $s, t \geq 0$ 和 $x, y \in \mathbb{R}$ 成立。关于上述结论的更多细节可以参考 Alós 等人, Nualart 及其参考文献。固定空间点 $x \in \mathbb{R}$, 我们将时间过程记为:

$$u^x = \{u(t, x), t \geq 0\},$$

则该时间过程 u^x 满足:

$$R_x(t, s) = E[u(t, x)u(s, x)] = \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}} (\sqrt{t+s} - \sqrt{t-s}),$$

其中 $t \geq s > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}$ 。并且 $u^x = \{u(t, x), t \geq 0\}$ 是一个双分数布朗运动, 其指数 $H = \frac{1}{2}$, $K = \frac{1}{2}$ 。此外, 我们知道过程 u^x 既不是半鞅也不是马尔可夫过程。

2.2. Malliavin 分析

假设 $\mathcal{H}_x$ 是与 $u^x = \{u(t, x), t \geq 0\}$ 相关的再生核希尔伯特空间, 于是, Wiener 积分

$$u^x(\varphi) := \int_0^T \varphi(s) du(ds, x), \quad \varphi \in \mathcal{H}_x$$

作为一个高斯随机变量存在, 且有

$$E \left(\int_0^T \varphi_1(s) du(ds, x) \int_0^T \varphi_2(r) du(dr, x) \right) = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mathcal{H}_x}, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_x,$$

成立。显然, 对于 $t, s > 0$, 我们有:

$$\langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}_x} = E(u(t, x)u(s, x)) = \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}} ((t+s)^{1/2} - |t-s|^{1/2}).$$

记 $\mathcal{S}_x$ 为形式如下的光滑泛函集合

$$F = f(u^x(\varphi_1), u^x(\varphi_2), \dots, u^x(\varphi_n)),$$

其中 $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ (f 及其所有导数有界), $\varphi_i \in \mathcal{H}_x$ 。

我们将上述形式泛函 F 的导数算子 D^x (Malliavin 导数) 定义为

$$D^x F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(u^x(\varphi_1), u^x(\varphi_2), \dots, u^x(\varphi_n)) \varphi_j.$$

该导数算子 D^x 是从 $L^2(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega; \mathcal{H}_x)$ 的可闭算子。我们用 $\mathbb{D}^{1,2}$ 表示 $\mathcal{S}_x$ 在范数

$$\|F\|_{1,2} := \sqrt{E|F|^2 + E\|D^x F\|_{\mathcal{H}_x}^2}$$

下的闭包。散度积分 δ^x 是导数算子 D^x 的伴随算子。如果

$$E |\langle D^x F, v \rangle_{\mathcal{H}_x}| \leq c \|F\|_{L^2(\Omega)}$$

对所有 $F \in \mathcal{S}_x$ 成立, 我们称随机变量 $v \in L^2(\Omega; \mathcal{H}_x)$ 属于散度算子 δ^x 的定义域, 记为 $\text{Dom}(\delta^x)$ 。在这种情况下, $\delta^x(v)$ 由对偶关系定义

$$E[F\delta^x(v)] = E\langle D^x F, v \rangle_{\mathcal{H}_x} \quad (2.2)$$

对任意 $v \in \mathbb{D}^{1,2}$ 成立。我们有 $\mathbb{D}^{1,2} \subset \text{Dom}(\delta^x)$ 。我们将使用记号

$$\delta^x(v) = \int_0^T v_s u(ds, x)$$

来表示 Skorohod 积分, 且不定 Skorohod 积分定义为

$$\int_0^t v_s u(ds, x) = \delta^x(v1_{[0,t]}).$$

为了将马列万分析应用于估计量渐近正态性的证明, 我们还需引入关于时间过程 $u^x = \{u(t, x), t \geq 0\}$ 的 $p \geq 1$ 阶多重积分 $I_p^x(f)$,

$$I_p^x(f) = \int_{[0, T]^p} f(t_1, t_2, \dots, t_p) u(dt_1, x) u(dt_2, x) \cdots u(dt_p, x)$$

对 $f \in \mathcal{H}_x^{\otimes p}$ 成立. 对所有正整数 p, q , 多重积分的等距可表示为:

$$E[I_p^x(f) I_q^x(g)] = \begin{cases} n! \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_x^{\otimes p}}, & p = q, \\ 0, & p \neq q. \end{cases}$$

该多重随机积分将在下文中计算 Kolmogorov 时使用。

另外, 我们有

$$E(|I_p^x(f)|^2) = p! \|f\|_{\mathcal{H}_x^{\otimes p}}^2. \quad (2.3)$$

对于任意 p, q 阶对称积分 $I_p^x(f) I_q^x(g)$:

$$I_p^x(f) I_q^x(g) = \sum_{r=0}^{p \wedge q} r! \binom{p}{r} \binom{q}{r} I_k(f \otimes_r g),$$

其中 $k = p + q - 2r$, $f \otimes_r g$ 为 $\mathcal{H}_x^{\otimes(p+q-2r)}$ 中的元素, 表示为:

$$\begin{aligned} & f \otimes_r g(s_1, \dots, s_{p-r}, t_1, \dots, t_{q-r}) \\ &= \int_{[0, T]^k} f(s_1, \dots, s_{p-r}, x_1, \dots, x_r) g(t_1, \dots, t_{q-r}, x_1, \dots, x_r) dx_1 dx_2 \dots dx_r. \end{aligned}$$

3. 参数估计

在本节中, 通过在固定空间点 x 下的时间采样, 我们考虑 (1.1) 中参数 θ 的估计. 定义

$$\xi_i = u(t_i, x) - u(t_{i-1}, x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R},$$

其中 $t_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, n$ 且 $h = \frac{T}{n}$, $T > 0$, 则 $\{\xi_i\}$ 是一组零均值高斯随机变量. 对于所有 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 其具有方差

$$\begin{aligned} \text{Var}(\xi_i) &= \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sqrt{2t_i} + \sqrt{2t_{i-1}} + 2\sqrt{t_i - t_{i-1}} - 2\sqrt{t_i + t_{i-1}} \right\} \\ &= \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{h} \left\{ \sqrt{2i} + \sqrt{2(i-1)} + 2 - 2\sqrt{2i-1} \right\} \equiv \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{h} \varphi(i). \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.1. 拟似然估计量

我们通过分析样本 $\{\xi_i\}$, 来求解参数 θ 的拟似然估计量。对于高斯随机变量 ξ_i , 我们有其概率密度函数如下:

$$f_{\Xi}(\xi_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Var(\xi_i)}} \exp\left\{-\frac{\xi_i^2}{2Var(\xi_i)}\right\}.$$

则拟似然函数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{\Xi}(\xi_i) = (\sqrt{2h\pi\theta})^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{\exp\left\{-\frac{\sqrt{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^2}{\varphi(i)}}{\sqrt{2h\theta}}\right\}}{\sqrt{\varphi(1) \dots \varphi(n)}}.$$

进一步, 对数拟似然函数为:

$$\log L(\theta) = -\frac{n}{2} \log \theta - \frac{n}{4} \log(2\pi h) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \log(\varphi(i)) - \sqrt{\frac{\pi}{2h}} \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^2}{\varphi(i)},$$

其中, $\varphi(i) = \sqrt{2i} + \sqrt{2(i-1)} + 2 - 2\sqrt{2i-1}$. 根据极大似然方法的思想, 我们利用:

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} = 0,$$

有

$$-\frac{n}{2\theta} + \theta^{-2} \sqrt{\frac{\pi}{2h}} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^2}{\varphi(i)} = 0,$$

进而求得参数 θ 的拟似然估计量如下:

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2\pi}{h}} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^2}{\varphi(i)}. \quad (3.2)$$

3.2. 估计量的收敛性和稳定性

在该小节中, 我们将要证明估计量的收敛性, 并且研究拟似然估计量误差的渐进行为。对于上文中得到的拟似然估计量 $\hat{\theta}_n$, 我们将证明其是弱相合的, 即对于 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\hat{\theta}_n - \theta \geq \varepsilon) = 0.$$

另外, 样本量趋近于无穷大时, 我们会证明拟似然估计量误差的极限分布受到噪声的影响表现为正态性。

定理 3.1. 设 u 为方程 (1.1) 的适定解且令时间过程 $u^x = \{u(t, \cdot), t \in [0, T]\}$ 在离散时间点 $\{t_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ ($h = \frac{T}{n}$) 上被观测。我们有:

1. 估计量 $\hat{\theta}_n$ 是一致 (弱相合) 且无偏的。
2. 当 n 趋于无穷时, 我们有估计量误差的渐进分布:

$$n^{\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, 4T\theta^2).$$

为了证明该定理, 我们需要一些初步说明。

引理 3.1. 对于所有 $x \in \mathbb{R}$, 定义

$$I_1(n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{E\xi_i^2 \xi_j^2}{\varphi(i)\varphi(j)},$$

$$\text{则可以得到, 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{4\pi}{n^2 h} I_1 \sim \theta^2. \quad (3.3)$$

证明. 通过以下事实:

$$E\xi^2 \eta^2 = E\xi^2 E\eta^2 + 2[E(\xi\eta)]^2,$$

(其中 (ξ, η) 服从二维正态分布, $E\xi = E\eta = 0$), 我们有

$$\begin{aligned} E\xi_i^2 \xi_j^2 &= E[u(t_i, x) - u(t_{i-1}, x)]^2 E[u(t_j, x) - u(t_{j-1}, x)]^2 \\ &\quad + 2[E(u(t_i, x) - u(t_{i-1}, x))(u(t_j, x) - u(t_{j-1}, x))]^2 \\ &= \frac{\theta^2 h}{2\pi} \varphi(i)\varphi(j) + 2I_{12}(i, j) \end{aligned}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}$ 以及 $1 \leq i, j \leq n$ 成立。其中,

$$\begin{aligned} I_{12}(i, j) &= \frac{\theta^2}{2\pi} (\sqrt{t_i + t_j} - \sqrt{t_j - t_i} - \sqrt{t_i + t_{j-1}} + \sqrt{t_j - t_{i-1}} \\ &\quad - \sqrt{t_{i-1} + t_j} + \sqrt{t_{j-1} - t_i} + \sqrt{t_{i-1} + t_{j-1}} - \sqrt{t_{j-1} - t_{i-1}})^2 \\ &= \frac{\theta^2}{2\pi} h \left(\sqrt{i+j} - \sqrt{j-i} - \sqrt{i+j-1} + \sqrt{j-i+1} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{i+j-1} + \sqrt{j-i-1} + \sqrt{i+j-2} - \sqrt{j-i} \right)^2 \\ &= \frac{\theta^2}{2\pi} h \left(\sqrt{i+j} - 2\sqrt{i+j-1} + \sqrt{i+j-2} + \sqrt{j-i+1} + \sqrt{j-i-1} - 2\sqrt{j-i} \right)^2 \end{aligned}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}$ 以及 $1 \leq i, j \leq n$ 成立。定义函数 $f(x), g(x)$ 如下:

$$f(x) = 1 - 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x}, \quad g(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2, \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2}),$$

则由以上两个函数的泰勒展开, 有:

$$\begin{aligned} &\sqrt{i+j-2}\sqrt{i+j-1} + \sqrt{i+j-2} + \sqrt{j-i+1} + \sqrt{j-i-1} - 2\sqrt{j-i} \\ &= \sqrt{i+j} \{1 - 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x}\} + \sqrt{j-i} \{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2\} \\ &= \sqrt{i+j} f(x) + \sqrt{j-i} g(y) \\ &= -\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8}x^{\frac{5}{2}} + o(x^{\frac{5}{2}}) - \frac{1}{4}y^{\frac{3}{2}} + o(y^{\frac{5}{2}}), \end{aligned}$$

其中 $x = \frac{1}{i+j}$ 且 $y = \frac{1}{j-i}$ 。则

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{n^2 h} I_1 &= \frac{4\pi}{n^2 h} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[\frac{\theta^2 h}{2\pi} + \frac{2I_{12}(i, j)}{\varphi(i)\varphi(j)} \right] = \frac{n-1}{n} \theta^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2 \cdot \frac{4\pi}{n^2 h} I_{12}(i, j)}{\varphi(i)\varphi(j)} \\ &= \frac{n-1}{n} \theta^2 + \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\frac{4\theta^2}{n^2} \left(-\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8}x^{\frac{5}{2}} + o(x^{\frac{5}{2}}) - \frac{1}{4}y^{\frac{3}{2}} + o(y^{\frac{5}{2}}) \right)}{\varphi(i)\varphi(j)} \\ &\sim \theta^2 \left(\frac{n-1}{n} + \frac{4(n-1) \left(-\frac{1}{4}(2n-1)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{8}(2n-1)^{-\frac{5}{2}} + o((2n-1)^{-\frac{5}{2}}) - \frac{1}{4} \right)}{n\varphi(n)\varphi(n-1)} \right) \sim \theta^2. \end{aligned}$$

即得到引理结论。 $\square$

另外，关于估计量的稳定性，我们将通过结合 Stein 方法和 Malliavin 微积分（参见 Nourdin 及 Peccati [12]）来研究。为此，我们需要简单介绍 Kolmogorov 距离：

$$d_{\text{Kol}}(X, Y) = \sup_{z \in \mathbb{R}} |P(X \leq z) - P(Y \leq z)|.$$

根据 Stein 方法的思想，为证明拟似然估计量 $\hat{\theta}_n$ 与参数的误差过程与正态分布足够接近，我们需要使用上述 Kolmogorov 距离来衡量分布之间的距离。即， d_{Kol} 能够度量依分布收敛：如果 F 的累积分布函数是连续的，那么 F_n 依分布收敛于 F 当且仅当 n 趋于无穷时，

$$d_{\text{Kol}}(F_n, F) \rightarrow 0.$$

下面的引理同样是 Nourdin 及 Peccati 的结果（另见其中的定理 5.2.6），而该引理巧妙地将 Stein 方法与 Malliavin 分析结合在一起，使得我们可以直接使用上节中引入的马列万导数以及多重随机积分来证明定理中有关估计量稳定性的部分。

引理 3.2. 设 $I_q(f)$ 是关于时间过程 $u^x = \{u(t, x), t \geq 0\}$ 的 $q \geq 1$ 阶多重积分，且满足 $E[I_q(f)^2] = \sigma^2$ 非零且有限。则对于所有 $x \in \mathbb{R}$ ，有：

$$d_{\text{Kol}}(I_q(f), N(0, \sigma^2)) \leq C \sqrt{\text{Var}(\|DI_q(f)\|_{\mathcal{H}_x}^2)},$$

其中 $\mathcal{H}_x$ 是时间过程 $u^x = \{u(t, x), t \in [0, T]\}$ 的再生核希尔伯特空间。

3.3. 定理的证明

定理 3.1 中 1. 的证明。我们很容易验证

$$E\hat{\theta}_n = \theta,$$

由此给出无偏性。为证明相合性，只需证明 n 趋于无穷时，

$$E(\hat{\theta}_n - \theta)^2 \rightarrow 0$$

成立。事实上,

$$E(\hat{\theta}_n - \theta)^2 = E(\hat{\theta}_n^2) - \theta^2 - 2\theta E(\hat{\theta}_n - \theta),$$

其中,

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}_n)^2 &= \frac{2\pi}{n^2 h} E\left(\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^2}{\varphi(i)}\right)^2 = \frac{2\pi}{n^2 h} E\left(\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^4}{\varphi(i)^2} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\xi_i^2 \xi_j^2}{\varphi(i)\varphi(j)}\right) \\ &= \frac{2\pi}{n^2 h} \sum_{i=1}^n \frac{E\xi_i^4}{\varphi(i)^2} + \frac{4\pi}{n^2 h} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{E(\xi_i^2 \xi_j^2)}{\varphi(i)\varphi(j)} = \frac{2\pi}{n^2 h} \sum_{i=1}^n \frac{E\xi_i^4}{\varphi(i)^2} + \frac{4\pi}{n^2 h} I_1. \end{aligned}$$

由正态分布的性质, 有

$$\begin{aligned} E\xi_i^4 &= E[(u(t_i, x) - u(t_{i-1}, x))^4] = 3[E(u(t_i, x) - u(t_{i-1}, x))^2]^2 \\ &= 3 \frac{\theta^2 h}{2\pi} \varphi(i)^2. \end{aligned}$$

因此, 结合该等式与引理3.1, 当 n 趋于无穷时, 我们有:

$$E(\hat{\theta}_n - \theta)^2 = \frac{3}{n} \theta^2 + \frac{4\pi}{n^2 h} I_1 - \theta^2 \longrightarrow 0. \quad (3.4)$$

对于 $x \in G$ 成立。由此给出了相合性。 $\square$

定理 3.1 中 2. 的证明. 下面我们引入估计量的渐进分布。记

$$\hat{\Phi}_n = n^{\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_n - E\hat{\theta}_n), \quad n \geq 1,$$

我们将第二章中引入的关于马列万导数的相关定义应用于引理 3.2, 即为证明定理结论, 我们只需证明:

$$d(\hat{\Phi}_n, N(0, 4\theta^2)) \leq C \sqrt{\text{Var}[\|D^x \hat{\Phi}_n\|_{\mathcal{H}_x}^2]} \longrightarrow 0.$$

我们将计算 $\text{Var}[\|D^x \hat{\Phi}_n\|_{\mathcal{H}_x}^2]$ 。由于

$$n^{\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_n - \theta) = \hat{\Phi}_n + n^{\frac{1}{2}}(E\hat{\theta}_n - \theta).$$

根据 (3.4) 可知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4\theta^2 + \frac{\theta^2(2n+1)^2}{n^2 \varphi(n)^2} \right) = 4\theta^2.$$

通过使用多重积分的乘积公式, 对于 $n \geq 1$, 我们有

$$\hat{\Phi}_n = n^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{h}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{[u(t_i, x) - u(t_{i-1}, x)]^2 - E[u(t_i, x) - u(t_{i-1}, x)]^2}{\varphi(i)} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= n^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{h}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{I_1(1_{[t_{i-1}, t_i]}) I_1(1_{[t_{i-1}, t_i]}) - E[u(t_i, x) - u(t_{i-1}, x)]^2}{\varphi(i)} \right) \\
 &= n^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{h}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{I_2(1_{[t_{i-1}, t_i]}^{\otimes 2})}{\varphi(i)} \right).
 \end{aligned}$$

另一方面, 对于 $n \geq 1$,

$$D^x \hat{\Phi}_n = 2n^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{h}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{I_1(1_{[t_{i-1}, t_i]})}{\varphi(i)} \right) 1_{[t_{i-1}, t_i]}, \quad n \geq 1.$$

由此得出, 对于 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 \|D^x \hat{\Phi}_n\|_{\mathcal{H}_x}^2 &= \frac{8\pi}{h} n^{-1} \sum_{i,j=1}^n \frac{I_1(1_{[t_{i-1}, t_i]}) I_1(1_{[t_{j-1}, t_j]}) \langle 1_{[t_{i-1}, t_i]}, 1_{[t_{j-1}, t_j]} \rangle_{\mathcal{H}_x}}{\varphi(i) \varphi(j)} \\
 &= \frac{8\pi}{h} n^{-1} \sum_{i,j=1}^n \frac{I_2(1_{[t_{i-1}, t_i]} \otimes 1_{[t_{j-1}, t_j]})}{\varphi(i) \varphi(j)} \langle 1_{[t_{i-1}, t_i]}, 1_{[t_{j-1}, t_j]} \rangle_{\mathcal{H}_x} \\
 &\equiv R(n) + E[\|D^x \hat{\Phi}_n\|_{\mathcal{H}_x}^2].
 \end{aligned}$$

注意到, $Var[\|D^x \hat{\Phi}_n\|_{\mathcal{H}_x}^2] = E(R^2(n))$, 从而,

$$\begin{aligned}
 E(R(n)^2) &= \frac{64\pi^2}{h^2} n^{-2} \sum_{i,j,k,l=1}^n \frac{E[I_2(1_{[t_{j-1}, t_j]} \otimes 1_{[t_{i-1}, t_i]}) I_2(1_{[t_{k-1}, t_k]} \otimes 1_{[t_{l-1}, t_l]})]}{\varphi(j) \varphi(i) \varphi(k) \varphi(l)} \\
 &\quad \times \langle 1_{[t_{j-1}, t_j]}, 1_{[t_{i-1}, t_i]} \rangle_{\mathcal{H}_x} \langle 1_{[t_{k-1}, t_k]}, 1_{[t_{l-1}, t_l]} \rangle_{\mathcal{H}_x} \\
 &= \frac{64\pi^2}{h^2} n^{-2} \sum_{i,j,k,l=1}^n \frac{\langle 1_{[t_{i-1}, t_i]}, 1_{[t_{k-1}, t_k]} \rangle_{\mathcal{H}_x} \langle 1_{[t_{j-1}, t_j]}, 1_{[t_{l-1}, t_l]} \rangle_{\mathcal{H}_x}}{\varphi(j) \varphi(i) \varphi(k) \varphi(l)} \\
 &\quad \times \langle 1_{[t_{j-1}, t_j]}, 1_{[t_{i-1}, t_i]} \rangle_{\mathcal{H}_x} \langle 1_{[t_{k-1}, t_k]}, 1_{[t_{l-1}, t_l]} \rangle_{\mathcal{H}_x},
 \end{aligned}$$

其中 $x \in G$ 且 $n \geq 1$ 。注意到,

$$\langle 1_{[t_{j-1}, t_j]}, 1_{[t_{i-1}, t_i]} \rangle_{\mathcal{H}_x} = E[(u(t_j, x) - u(t_{j-1}, x))(u(t_i, x) - u(t_{i-1}, x))],$$

故而由引理3.1的证明, 当 n 趋于无穷时,

$$Var[\|D^x \hat{\Phi}_n\|_{\mathcal{H}_x}^2] = E(R^2(n)) \leq C \frac{64\pi^2}{h^2} n^{-2} h^2 = \frac{C}{n^2},$$

从而, 由引理3.2, $n \rightarrow \infty$ 时,

$$d(\hat{\Phi}_n, N(0, 4\theta^2)) \leq C \sqrt{Var[\|D^x \hat{\Phi}_n\|_{\mathcal{H}_x}^2]} \rightarrow 0.$$

结合以上结论、定理 (3.1) 以及 Slutsky's 定理, 我们可知以下的依分布收敛成立:

$$n^{\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_n - \theta) \longrightarrow N(0, 4\theta^2), \quad n \rightarrow \infty.$$

□

4. 数值模拟

对于时空白噪声驱动的随机热方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + \sqrt{\theta} \dot{W}(t, x), & t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

在区间 $[0, T]$ ($T = 100$) 上, 我们对本文得到的估计量进行了数值模拟。其中 $\dot{W}$ 是一个时空白噪声, Δ 是拉普拉斯算子。我们令 $\theta_0 = 2$ 并绘制了 $\theta_T = \hat{\theta}_n$ 随 T 变化的函数图 ($h = 0.05$, $T = nh$)。从图 1 可以看出, T 的值越大 (也就是样本量越大), 估计量对于 θ_0 的误差就越小。

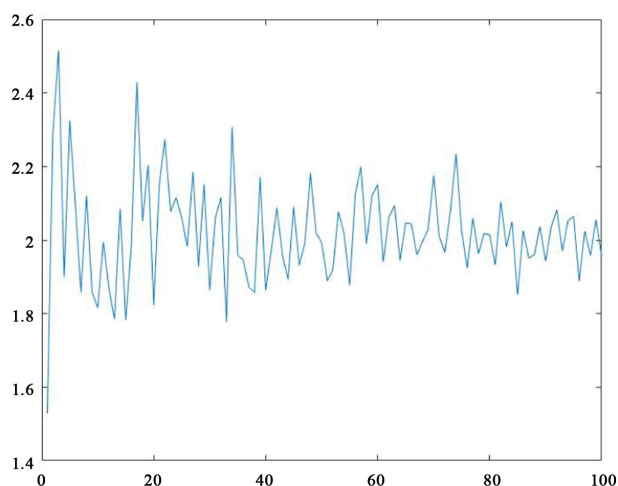


Figure 1. The function of $\hat{\theta}_n$ varying with T (when $h = 0.05$)

图 1. 估计量随 T 变化的函数 ($h=0.05$ 时)

Table 1. The numerical values of $\hat{\theta}_n$

表 1. 估计量 $\hat{\theta}_n$ 的数值

h	T				
	20	40	60	80	100
0.1000	1.8830	2.0688	2.0419	2.0084	2.0775
0.0500	2.1542	2.0988	2.0071	1.9414	1.8314
0.0250	1.9057	1.9471	1.9463	2.1185	2.0482
0.0200	1.8846	2.0397	1.9784	2.0399	2.0111
0.0125	1.9295	1.8553	1.9462	1.9585	1.9928

表 1 描述了不同 h 值下的估计量 $\hat{\theta}(20), \hat{\theta}(40), \dots, \hat{\theta}(100)$ 的情况。表中数值表示, 仅固定 h 时, 估计量可能不会收敛, 当 $h \rightarrow 0$ 且 $T \rightarrow \infty$ 时, 估计量会很好地收敛。

5. 结论

本文通过对解过程关于时间上离散观测, 利用拟似然方法得到了时空白噪声驱动的随机热方程的拟似然估计量。同时, 我们给出了该估计量的相合性并使用 Stein 方法和 Malliavin 分析讨论了估计量误差过程的渐近正态性。数值模拟的结果表明, 该估计量对于参数的估计是显著且有效的。另外, 拟似然的方法同样可以应用于纯空间噪声驱动的随机热方程的参数估计。更进一步地, 也可考虑对纯空间分数噪声驱动的随机热方程进行类似研究, 对方程解的导数过程 (而非直接利用解过程) 进行离散观测, 从而得到样本以构造关于参数的拟似然函数。我们将会在以后的工作中对其进行讨论。

参考文献

- [1] Chong, C. (2020) High-Frequency Analysis of Parabolic Stochastic PDEs. *The Annals of Statistics*, **48**, 1143-1167. <https://doi.org/10.1214/19-aos1841>
- [2] Cialenco, I. (2018) Statistical Inference for SPDEs: An Overview. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **21**, 309-329. <https://doi.org/10.1007/s11203-018-9177-9>
- [3] Cialenco, I. and Glatt-Holtz, N. (2011) Parameter Estimation for the Stochastically Perturbed Navier-Stokes Equations. *Stochastic Processes and their Applications*, **121**, 701-724. <https://doi.org/10.1016/j.spa.2010.12.007>
- [4] Cialenco, I. and Huang, Y. (2019) A Note on Parameter Estimation for Discretely Sampled SPDEs. *Stochastics and Dynamics*, **20**, 2050016. <https://doi.org/10.1142/s0219493720500161>
- [5] Cialenco, I., Kim, H. and Lototsky, S.V. (2019) Statistical Analysis of Some Evolution Equations Driven by Space-Only Noise. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **23**, 83-103. <https://doi.org/10.1007/s11203-019-09205-0>
- [6] Cialenco, I., Lototsky, S.V. and Pospíšil, J. (2009) Asymptotic Properties of the Maximum Likelihood Estimator For Stochastic Parabolic Equations with Additive Fractional Brownian Motion. *Stochastics and Dynamics*, **9**, 169-185. <https://doi.org/10.1142/s0219493709002610>
- [7] Hildebrandt, F. and Trabs, M. (2021) Parameter Estimation for SPDEs Based on Discrete Observations in Time and Space. *Electronic Journal of Statistics*, **15**, 2716-2776. <https://doi.org/10.1214/21-ejs1848>
- [8] Markussen, B. (2003) Likelihood Inference for a Discretely Observed Stable Process. *Bernoulli*, **9**, 745-762. <https://doi.org/10.3150/bj/1066418876>
- [9] Maslowski, B. and Pospíšil, J. (2007) Ergodicity and Parameter Estimates for Infinite-Dimensional Fractional Ornstein-Uhlenbeck Process. *Applied Mathematics and Optimization*, **57**, 401-429. <https://doi.org/10.1007/s00245-007-9028-3>

-
- [10] Pospíšil, J. and Tribe, R. (2007) Parameter Estimates and Exact Variations for Stochastic Heat Equations Driven by Space-Time White Noise. *Stochastic Analysis and Applications*, **25**, 593-611. <https://doi.org/10.1080/07362990701282849>
- [11] Torres, S., Tudor, C. and Viens, F. (2014) Quadratic Variations for the Fractional-Colored Stochastic Heat Equation. *Electronic Journal of Probability*, **19**, 1-51. <https://doi.org/10.1214/ejp.v19-2698>
- [12] Nourdin, I. and Peccati, G. (2012) Normal Approximations with Malliavin Calculus. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9781139084659>