

可压欧拉方程高精度数值格式耗散测度值解的收敛性

皇晓燕, 华嘉乐*

东华大学数学与统计学院, 上海

收稿日期: 2025 年 3 月 6 日; 录用日期: 2025 年 4 月 16 日; 发布日期: 2025 年 4 月 29 日

摘要

本文主要考虑可压欧拉方程组的初边值问题。研究了两类具有高阶精度的熵稳定有限体积格式的收敛性, 通过对数值解建立合适的一致性估计, 证明随着步长 $h \rightarrow 0$, 若数值解的密度是远离真空且有界的, 则由这两类熵稳定数值格式构造的解可以生成耗散测度值解。

关键词

可压欧拉系统, 耗散测度值解, 熵稳定数值格式, Weak BV 条件

Convergence of Dissipative Measure-Valued Solutions for High Order Numerical Schemes of the Compressible Euler Equations

Xiaoyan Huang, Jiale Hua*

School of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai

Received: Mar. 6th, 2025; accepted: Apr. 16th, 2025; published: Apr. 29th, 2025

* 通讯作者。

Abstract

In this paper, we primarily consider the initial boundary value problem for compressible Euler equations. We study the convergence of two classes of high-order accurate entropy stable finite volume schemes. By establishing appropriate the priori estimates for the numerical solutions, we prove that as the step size $h \rightarrow 0$, the solutions constructed by these two types of entropy stable numerical schemes can generate dissipative measure-valued solutions, provided that the density of the approximate solutions is bounded away from vacuum and bounded above.

Keywords

Compressible Euler Equations, Dissipative Measure-Valued Solution, Entropy Stable Numerical Schemes, Weak Bounded Variation Condition

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文主要研究定义在 $(0, T) \times \Omega$ 上的可压欧拉方程组的初边值问题:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x m = 0, \\ \partial_t(m) + \operatorname{div}_x \left(\frac{m \otimes m}{\rho} \right) + \nabla_x [p(\rho)] = 0, \\ (\rho(0, \cdot), m(0, \cdot)) = (\rho^0, m^0). \end{cases} \quad (1)$$

这里 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, 3$ 是空间区域, ρ 表示密度, $m = \rho u$ 表示动量, u 是速度, $p(\rho)$ 是常见的多方气体状态压强: $p(\rho) = a\rho^\gamma, \gamma > 1$.

为简便起见, 本文考虑单位立方体上的周期边界条件, 即

$$\Omega = ([0, 1]_{\{0,1\}})^N, \quad N = 1, 2, 3. \quad (2)$$

对于欧拉方程(1), 弱解需要满足分布意义下的能量不等式:

$$\partial_t \int_{\Omega} \left(\frac{|m|^2}{\rho} + P(\rho) \right) dx \leq 0.$$

这里 $P(\rho)$ 表示压强势, 定义为 $P(\rho) \equiv \rho \int_1^\rho \frac{p(r)}{r^2} dr$, 则有

$$P(\rho) = \frac{\rho}{\gamma - 1} \rho^\gamma. \quad (3)$$

对于欧拉方程组的初值问题, 即使给定初始数据是光滑的, 间断也会在有限时间内产生。因此, 寻找弱形式的解是必要的。这类弱解可能并不唯一, 需要补充熵条件筛选出具有物理相关性的解。对于一维情形, 解的适定性理论较为完整 [1], 但遗憾的是, 对于多维系统, 这类熵条件却是失效的 [2]-[4]。

鉴于这些弱解不唯一性的结果, 近年来, 有关欧拉系统及守恒律系统的测度值解有越来越多的学者进行研究探讨。测度值解的概念最初由 Diperna 在文章 [5] 中引入, 文中主要研究双曲守恒律的测度值解。文章 [6, 7] 中, 研究了高精度的熵守恒以及熵稳定的数值格式, 在对数值解 L^∞ 有界的假设条件下, 验证了相应数值格式的相容性, 并证明数值解可以收敛到一种测度值解。但本文更加关注所谓的耗散测度值解。这类解是在文章 [8] 中针对可压缩纳维-斯托克斯方程而引入的, 并且证明了只要对应经典解存在, 基于相同初始数据得到的耗散型测度值解和标准光滑经典解将完全一致, 这一性质被称为弱强 (weak-strong) 唯一性原理, 这意味着经典解在这类耗散型测度值解中是稳定的。对于不可压缩纳维-斯托克斯方程, 这种弱强唯一性准则已经在 Prodi [9] 和 Serrin [10] 研究工作中加以证明。Feireisl 等人 [11] [12] 对于纳维-斯托克斯方程以及欧拉方程组, 通过建立合适的一致性估计, 证明了数值解生成的杨氏测度为原方程的耗散型测度值解。与 [6] 中定义的测度值解不同, 这一耗散测度值解仅需密度函数 ρ 的有界性假设 [11]。[11] 中主要讨论了二阶精度的 Lax-Friedrichs 型格式, 并证明解满足相应的弱强唯一性准则。

本文主要研究具有高阶精度的 ELW (Entropy Lax-Wendroff) 和 TeCNO 数值格式, 并验证其收敛性, 进而证明在与 [11] 类似的假设下数值解可以生成耗散测度值解。为后文引入欧拉方程的数值格式, 首先将方程组写为守恒律形式

$$\partial_t U + \operatorname{div}_x f(U) = 0, \quad (4)$$

$$U(0, \cdot) = U^0. \quad (5)$$

这里 $U \in \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}, f(U) = (f_1, \dots, f_k), k = 1, 2, \dots, N$ 分别为守恒变量及通量函数。注意到, 令 $U = [\rho, m]$ 以及 $f(U) = [m, \frac{m \otimes m}{\rho} + pI]$, I 表示单位矩阵, 则欧拉方程组(1)可转化为守恒律形式。则相应半离散数值格式为

$$\frac{d}{dt} U_K(t) + (\operatorname{div}_h F_h(t))_K = 0, \quad t > 0, \quad K \in \mathcal{J}_h, \quad (6)$$

$$U_K(0) = (\mathcal{H}_h(U^0))_K. \quad (7)$$

$K \in \mathcal{J}_h$ 表示网格单元, 其中 $\mathcal{J}_h$ 为规则的正方形 ($N=2$) 或立方体 ($N=3$), h 为有限体积单元格大小。令 U_K 表示分段常数函数 U_h 在单元格 K 上的取值, $\mathcal{H}_h$ 表示从 L^1 到分段常数函数空间的投影算子。 $F_h(t)$ 表示数值通量函数。

本文考虑两类高精度数值格式: ELW_p 数值格式

$$F_h^p = \tilde{F}_h^{2m} - C_\sigma |V_{h\sigma}|^{2m-1} V_{h\sigma}, \text{ 以及 } TeCNO_p \text{ 数值格式 } F_h^p = \tilde{F}_h^{2m} - D_\sigma V_{h\sigma}.$$

上标 p 表示熵稳定数值通量函数 $F_h^p(t)$ 具有 p 阶精度, $\tilde{F}_h^{2m}(t)$ 表示 $2m$ 阶精度的熵守恒数值通量函数; 并且 $m, p \in \mathbb{N}$ 满足关系: 当 p 为偶数时, $m = \frac{p}{2}$, p 为奇数时, $m = \frac{p+1}{2}$ 。对于数值扩散项 $C_\sigma |V_{h\sigma}|^{2m-1} V_{h\sigma}, D_\sigma V_{h\sigma}$ 具体定义, 将在后文给出。

为建立合适的一致先验估计, 与 [11] 类似, 本文需要做出以下假设

假设 1.1. 存在一个常数 $\underline{\rho} > 0$, 使得对于任意 h 一致有 $0 < \underline{\rho} < \rho_h(t)$ 。

假设 1.2. 当 $1 < \gamma < 3$ 时, 存在一个常数 $\bar{\rho} > 0$, 使得对于任意 h 一致有 $\rho_h(t) < \bar{\rho}$ 。

如文章 [6] 中假设, TeENO 格式中应用的 ENO 重构满足猜想: 取任意整数 $p > 1$, 令 $\tilde{u}_j(x)$ 表示关于 $\{\bar{u}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 定义在单元格 I_j 处的 p 阶 ENO 重构, 假设 $\{\bar{u}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 有紧支集, 则存在依赖于 p 的常数 $C > 0$, 使得下式成立

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j|^{p+1} \leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\tilde{u}_{j+1}^- - \tilde{u}_j^+) (\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j). \quad (8)$$

本文的结论主要有:

定理 1.1. 假设 1.1 和 1.2 成立, 对 $TeCNO$ 格式假设满足猜想 (8), 则当 $h \rightarrow 0+$ 时, 数值格式 ELW_p 以及 $TeCNO_p$ 与可压欧拉方程 (1) 是一致的, 并且有一致性公式:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} U_h(0) \cdot \varphi(0, \cdot) dx &= \int_0^T \int_{\Omega} f_h \cdot \nabla_x \varphi dx dt + \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2m+1}}), \\ \varphi(x, t) &\in C_c^\infty([0, T] \times \Omega; \mathbb{R}^d); \\ \left[\int_{\Omega} \eta(U_h(t)) dx \right]_{t=0}^{t=\tau} &\leq 0, \quad 0 \leq \tau \leq T. \end{aligned} \quad (9)$$

定理 1.2. 若定理 1.1 的假设条件成立, 设 $U_h = [\rho_h, m_h]$ 表示上述两种高精度数值格式的解, 则当 $h \rightarrow 0+$ 时, 数值解 U_h 可以生成具有定义 2.1 形式的耗散测度值解 $\mathcal{V}_{t,x}$ 。

2. 定义及引理

2.1. 耗散测度值解定义

欧拉方程组 (2) 的弱解与文章 [11] 中完全相同, 因此我们不再做多余重复, 这里主要给出耗散测度值解的定义。

定义 2.1. [耗散测度值解] 设 $\mathcal{F} = \{[\rho, m] | \rho \geq 0, m \in \mathbb{R}^N\}$. 若定义在空间 $\mathcal{F}$ 上的概率测度 $\{\mathcal{V}_{t,x}\}_{t \in (0, T), x \in \Omega}$ 满足初始数据 $\mathcal{V}_{0,x} \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$, 并且有下述等式成立, 则称为欧拉系统 (1) 的耗散测

度值解。这里 $(t, x) \rightarrow \mathcal{V}_{t,x}$ 是由空间 $(0, T) \times \Omega$ 到 $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ 的弱 (*) 可测映射; $\mathcal{P}$ 为概率测度集合。

- 设 $\tau \in (0, T)$, $\varphi \in C^1([0, T] \times \Omega)$, $r_C^1 \in \mathcal{M}([0, T] \times \Omega; \mathbb{R}^N)$

$$\left[\int_{\Omega} \langle \mathcal{V}_{t,x}; \rho \rangle \varphi \right]_{t=0}^{t=\tau} = \int_0^\tau \int_{\Omega} [\langle \mathcal{V}_{t,x}; \rho \rangle \partial_t \varphi + \langle \mathcal{V}_{t,x}; m \rangle \cdot \nabla_x \varphi] dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega} \nabla_x \varphi \cdot dr_C^1;$$

- 设 $\tau \in (0, T)$, $\varphi \in r_C^1([0, T] \times \Omega; \mathbb{R}^N)$, $r_C^2 \in \mathcal{M}([0, T] \times \Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\Omega} \langle \mathcal{V}_{t,x}; m \rangle \cdot \varphi \right]_{t=0}^{t=\tau} \\ &= \int_0^\tau \int_{\Omega} [\langle \mathcal{V}_{t,x}; m \rangle \cdot \partial_t \varphi + \langle \mathcal{V}_{t,x}; \frac{m \otimes m}{\rho} \rangle : \nabla_x \varphi + \langle \mathcal{V}_{t,x}; p(\rho) \rangle \operatorname{div}_x \varphi] dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega} \nabla_x \varphi : dr_C^2; \end{aligned}$$

- 对几乎所有 $\tau \in (0, T)$

$$\left[\int_{\Omega} \langle \mathcal{V}_{t,x}; \left(\frac{1}{2} \frac{|m|^2}{\rho} + P(\rho) \right) \rangle dx \right]_{t=0}^{t=\tau} \leq 0;$$

- 对几乎所有的 $\tau \in (0, T)$

$$\int_0^\tau \int_{\Omega} 1d|r_C^1| + \int_0^\tau \int_{\Omega} 1d|r_C^2| \lesssim \mathcal{D}.$$

其中耗散缺陷 $\mathcal{D}(\tau) = - \left[\int_{\Omega} \langle \mathcal{V}_{t,x}; \left(\frac{1}{2} \frac{|m|^2}{\rho} + P(\rho) \right) \rangle dx \right]_{t=0}^{t=\tau}$ 是非负函数, $A \lesssim B$ 等价于 $A \leq CB$, C 为任意正常数。

2.2. 熵稳定数值格式

设 $\Omega = \Omega_h \subset \mathbb{R}^N$ 表示空间离散区域, 将其离散为有限体积单元 K , 使得 $\Omega = \Omega_h = \bigcup_{K \in \mathcal{J}_h} \overline{K}$ 成立。以二维空间为例, 定义单元格为 $K := [x_{i+1/2,j}, x_{i-1/2,j}) \times [y_{i,j+1/2}, y_{i,j-1/2})$, 本文假设网格大小 h 在各方向相同且固定。定义 $X(\mathcal{J}_h)$ 是 $\mathcal{J}_h$ 上的分段常数函数空间, 对任意 $g_h \in X(\mathcal{J}_h)$, 设 $g_K = g_h|_K$, 使其满足 $\int_{\Omega} g_h dx = h^N \sum_{K \in \mathcal{J}_h} g_K$. 设投影算子

$$\mathcal{H}_h : L^1(\Omega) \rightarrow X(\mathcal{J}_h), (\mathcal{H}_h(\varphi))_K := \frac{1}{h^N} \int_K \varphi(x) dx.$$

记 $\sigma = K|L, L = K + he_k, k = 1, 2, \dots, N$ 表示相邻单元格 K 和 L 之间的面, ε 表示全部单元格所有面的集合, ∂K 表示单元格 K 的边界; 定义 g_σ 为函数 $g_h \in X(\mathcal{J}_h)$ 在面 $\sigma = K|L$ 上的值: $g_\sigma = \frac{g_K + g_L}{2}$. 令 $e_k, k = 1, 2, \dots, N$ 表示空间标准基向量, 对任意方向 $k = 1, 2, \dots, N$, 存在单元格 K 的两个面与外法向量平行, 分别将其定义为 σ_k^+, σ_k^- , 类比定义其面上的值为

$$g_{\sigma,k^+} = \frac{g_K + g_L}{2}, \sigma_k^+ = K|L, L = K + he_k, \quad (10)$$

$$g_{\sigma,k^-} = \frac{g_J + g_K}{2}, \sigma_k^- = J|K, J = K - he_k. \quad (11)$$

同样, 定义单元格 K 上的离散算子为

$$\begin{aligned} (\partial_h^k g_h)_K &:= \frac{g_{\sigma, k^+} - g_{\sigma, k^-}}{h}, (\partial_h^{k^+} g_h)_K := \frac{g_L - g_K}{h}, (\partial_h^{k^-} g_h)_K := \frac{g_L - g_J}{h}, \\ (\operatorname{div}_h G_h)_K &= \sum_{k=1}^N (\partial_h^k g_h^k)_K, G_h = (g_h^1, g_h^2, \dots, g_h^N), \\ (\nabla_h^+ g_h)_K &= ((\partial_h^{1^+} g_h)_K, \dots, (\partial_h^{N^+} g_h)_K). \end{aligned}$$

离散跳跃算子 $g_{h\sigma} := g_L n_K^+ + g_K n_K^-$, 以及均值算子 $(\bar{g}_h)_\sigma := \frac{g_K + g_L}{2}$. 这里 $n_K^+, n_K^- \equiv n_L^+$ 分别表示单元格 K 和 L 的外法向量.

定义 2.2. 若函数 $\eta(U) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 及 $Q(U) = (Q_1, Q_2, \dots, Q_N) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^N$ 满足条件 $(\nabla_U Q_k)^T = (\nabla_U \eta)^T \nabla_U f_k, k = 1, 2, \dots, N$. 则称函数对 (η, Q) 为熵对. 其中, 令 $V = \nabla_U \eta(U)$, 则称函数 V 为熵变量.

定义 2.3. 若熵对 (η, Q) 满足离散熵不等式

$$\frac{d}{dt} \eta(U_K(t)) + (\operatorname{div}_h Q_h(t))_K \leq 0, \quad K \in \mathcal{J}_h. \quad (12)$$

则称数值格式是熵稳定的. 特别地, 若等号成立, 则称数值格式是熵守恒的.

文章 [13] 中, Tador 介绍了二阶精度熵守恒数值通量函数 $\tilde{F}_\sigma = \tilde{F}_h(U_K, U_L), \sigma = K|L$, 具体表达式为

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\sigma, k} &= \tilde{F}_{h, k} = \int_0^1 f_k(U_K + \zeta(U_L - U_K)) d\zeta, \quad k = 1, 2, \dots, N \\ \tilde{F}_h &= (\tilde{F}_{h, 1}, \tilde{F}_{h, 2}, \dots, \tilde{F}_{h, N}). \end{aligned} \quad (13)$$

对应的数值熵通量函数为

$$\tilde{Q}_\sigma(U_K, U_L) = (\bar{V})_\sigma^T \tilde{F}_\sigma - (\bar{\psi})_\sigma. \quad (14)$$

这里 $\psi = V^T f(U) - Q(U)$ 表示熵势.

Lefloch 等人 [14] 通过将二阶精度 $\tilde{F}_\sigma$ (13) 作为构建块得到了任意高阶精度的熵守恒数值通量, 数值通量函数 $\tilde{F}_\sigma^{2m} = (\tilde{F}_{\sigma, 1}^{2m}, \tilde{F}_{\sigma, 2}^{2m}, \dots, \tilde{F}_{\sigma, N}^{2m})$ 是 $2m, m \in \mathbb{N}$ 阶精度的

$$\tilde{F}_{h, k}^{2m} = \sum_{i=1}^m \alpha_i^m \sum_{t=0}^{i-1} \tilde{F}_{h, k}(U_{K-te_k}, U_{K-te_s+ie_k}), \quad K \in \mathcal{J}_h. \quad (15)$$

这里 $\alpha_1^m, \alpha_2^m, \dots, \alpha_m^m$ 是以下 m 个线性方程的解

$$2 \sum_{i=1}^m i \alpha_i^m = 1, \quad \sum_{i=1}^m i^{2t-1} \alpha_i^m = 0; \quad (t = 2, \dots, m). \quad (16)$$

同样, 熵函数 $\tilde{Q}_\sigma^{2m} = (\tilde{Q}_{\sigma, 1}^{2m}, \tilde{Q}_{\sigma, 2}^{2m}, \dots, \tilde{Q}_{\sigma, N}^{2m})$ 是 (14) 的线性组合

$$\tilde{Q}_\sigma^{2m} = \sum_{i=1}^m \alpha_i^m \sum_{t=0}^{i-1} \tilde{Q}_\sigma(U_{K-te_k}, U_{K-te_k+ie_k}), \quad K \in \mathcal{J}_h. \quad (17)$$

这样构造的数值熵通量形式上是 $2m$ 阶精度的, 即

引理 2.1 (LeFloch [14]). 对任意 $m \in \mathbb{N}$, 设 $\alpha_1^m, \alpha_2^m, \dots, \alpha_m^m$ 是线性方程(16)的解, 则数值格式 $\tilde{F}_{h,k}^{2m}$ (15) 满足

1. $\tilde{F}_{h,k}^{2m}(U_K, U_K, \dots, U_K) = f_k(U_K)$,
2. $\frac{\tilde{F}_{h,k}^{2m}(U_{K-(m+1)he_k}, \dots, U_{K+mhe_k}) - \tilde{F}_{h,k}^{2m}(U_{K-mhe_k}, \dots, U_{K+(m-1)he_k})}{h} = \partial_{x_k} f_k(U_K) + \mathcal{O}(h^{2m})$.

本文主要考虑 $p \in \mathbb{N}$ 阶精度的 ELW 数值格式 $F_\sigma^p = (F_{\sigma,1}^p, F_{\sigma,2}^p, \dots, F_{\sigma,N}^p)$

$$F_{\sigma,k}^p = \tilde{F}_{\sigma,k}^{2m} - C_\sigma^k |V_{h\sigma}|^{2m-1} V_{h\sigma}, \quad L = K + he_k. \quad (18)$$

其中 $C_\sigma^k = \frac{1}{2} \max_{1 \leq s \leq d} (|\lambda_s^k(U_K)|, |\lambda_s^k(U_L)|)$, $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_d^k$ 表示 $\nabla_U f_k$ 的特征值。则 ELW_k 半离散数值形式为

$$\frac{d}{dt} U_K + (\operatorname{div}_h \tilde{F}_h^{2m})_K - \frac{1}{h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^\pm \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} C_\sigma^k |V_{h\sigma}|^{2m-1} V_{h\sigma} (n_K^+ \cdot e_k) = 0, \quad (19)$$

对数值格式(19)等号两边同时乘以熵变量 V , 则有

引理 2.2 (Fjordholm [6]). ELW_p 离散熵不等式为

$$\frac{d}{dt} \eta(U_K(t)) + (\operatorname{div}_h \tilde{Q}_h(t))_K = -\frac{1}{2h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^\pm \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} C_\sigma^k |V_{h\sigma}|^{2m+1} \leq 0. \quad (20)$$

因此, 数值格式 ELW_p 是熵稳定的。

另一类高阶精度格式为 p 阶精度的 $TeCNO_p$ 数值形式 $F_\sigma^p = (F_{\sigma,1}^p, F_{\sigma,2}^p, \dots, F_{\sigma,N}^p)$

$$F_{\sigma,k}^p = \tilde{F}_{\sigma,k}^{2m} - D_{\sigma,k} V_{h\sigma}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (21)$$

其中 $D_{\sigma,k}$ 为任意半正定矩阵, $\tilde{F}_{\sigma,k}^{2m}$ 是熵守恒数值通量函数(15)。对于 $p, m \in \mathbb{N}$ 的关系, 与 ELW 数值形式一致。设 $\tilde{V}_k$ 表示 V_K 的 p 阶 ENO 重构函数 [15], 令

$$\tilde{V}_k(\sigma+) = \lim_{h \rightarrow 0+} \tilde{V}_k(\sigma + he_k), \quad \tilde{V}_k(\sigma-) = \lim_{h \rightarrow 0-} \tilde{V}_k(\sigma - he_k).$$

则 $V_{h\sigma} = \tilde{V}_k(\sigma+) - \tilde{V}_k(\sigma-)$ 表示重构函数 $\tilde{V}_k$ 在面 $\sigma = K|L$ 处的跳跃值; 则 $TeCNO_p$ 半离散形式为

$$\frac{d}{dt} U_K + (\operatorname{div}_h \tilde{F}_h^{2m})_K - \frac{1}{h} \sum_{\sigma \in \partial K} D_\sigma V_{h\sigma} (n_K^+ \cdot e_k) = 0. \quad (22)$$

文章中 [15] 介绍了 ENO 重构的完整过程, 通过对熵变量 V 引入放缩变量 $W = R^T V$ 并逐个分量进行重构, 每个分量 ENO 重构满足所谓的符号性质

引理 2.3 (Fjordholm [15]). $\forall p \in \mathbb{N}$, 设 $\widetilde{W}(x)$ 是 p 阶 ENO 重构函数, 令 $W_i^+ = \widetilde{W}_i(x_{i+1/2})$, $W_{i+1}^- = \widetilde{W}_{i+1}(x_{i+1/2})$ 分别为重构函数在 $x_{i+1/2}$ 两侧的函数值, 则 ENO 重构满足

$$\text{sign}(W_{i+1}^- - W_i^+) = \text{sign}(W_{i+1} - W_i). \quad (23)$$

更多地, 得到

$$0 \leq \frac{W_{i+1}^- - W_i^+}{W_{i+1} - W_i} \leq C_p. \quad (24)$$

其中, 常数 C_p 只依赖于 $p \in \mathbb{N}$.

引理 2.4 (Fjordholm [6]). 对任意 $j \in \mathbb{Z}$, 设 $K = K_0 + jhe_k$, 对于函数值 $\{V_K\}_{K \in \mathcal{J}_h}$, 令 $\widetilde{V}_k(x)$ 表示关于 $\{V_K\}_{K=K_0+jhe_k}$ 在单元格 K 处的多项式重构, 设 $R_{\sigma,k} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 为可逆矩阵, $A_{\sigma,k}$ 是任意非负对角矩阵, 对任意维度 $k = 1, 2, \dots, N$, 令 $D_{\sigma,k} = R_{\sigma,k} A_{\sigma,k} R_{\sigma,k}^T$, 存在一个对角矩阵 $B_{\sigma,k} \geq 0$ 使得

$$V_\sigma = (R_{\sigma,k}^T)^{-1} B_{\sigma,k} R_{\sigma,k}^T V_\sigma, \quad (25)$$

则数值形式(21)是熵稳定的, 相应的熵通量函数 $Q_\sigma^p = (Q_{\sigma,1}^p, Q_{\sigma,2}^p, \dots, Q_{\sigma,N}^p)$ 为 $Q_{\sigma,k}^p = \widetilde{Q}_{\sigma,k}^{2m} - \widetilde{V}_\sigma^T D_{\sigma,k} V_\sigma$. 这里 $\widetilde{Q}_{\sigma,k}^{2m}$ 为式(17)。

引理 2.5 (Fjordholm [6]). 若重构具有符号性质(23), 则重构值满足(25)。

因此数值格式 $TeCNO_p$ 的数值通量具有等价形式

$$F_{\sigma,k}^p = \widetilde{F}_{\sigma,k}^{2m} - R_{\sigma,k} A_{\sigma,k} B_{\sigma,k} R_{\sigma,k}^T V_h(t)_\sigma, \quad (26)$$

观察到对角矩阵 B 的对角元素即为引理2.3中的 C_p 。同样地, 对数值格式(21)等号两边同时乘以熵变量 V , 则数值格式 $TeCNO_p$ 的熵不等式为

$$\frac{d}{dt} \eta(U_K(t)) + (\text{div}_h \widetilde{Q}_h(t))_K = -\frac{1}{h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^\pm \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} V_h(t)_\sigma \cdot D_{\sigma,k} V_h(t)_\sigma \leq 0. \quad (27)$$

可知数值形式 $TeCNO_p$ 是熵稳定的。

引理 2.6 (Feireisl [8]). 设等可积函数列 $\{Z_n\}_{n=1}^\infty, Z_n: Q \rightarrow \mathbb{R}^N$ 产生了 Young 测度 $\mathcal{V}_x, x \in Q \subset \mathbb{R}^M$, Q 为有界域, 令 $G: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$ 、 $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, |F(Z)| \leq G(Z), \forall Z \in \mathbb{R}^N$ 为连续函数, 使其满足 $\sup_{n \geq 0} G(Z_n)_{L^1(Q)} < \infty$ 以及

$$F_\infty = \widetilde{F} - \langle \mathcal{V}_x, F(Z) \rangle dx, G_\infty = \widetilde{G} - \langle \mathcal{V}_x, G(Z) \rangle dx,$$

这里 $\widetilde{F}, \widetilde{G}$ 分别为序列 $\{F(Z_n)\}_{n \geq 1}, \{G(Z_n)\}_{n \geq 1}$ 在空间 $\mathcal{M}(\bar{Q})$ 的 weak-* 极限, 则有 $|F_\infty| \leq G_\infty$ 。

引理 2.7 (Feireisl [11]). 设密度函数 $\rho_h(t)$ 满足

1. 若 $\gamma \geq 3$ 时, 存在正常数 $\underline{\rho}$ 使得 $0 < \underline{\rho} \leq \rho_h(t)$,

2. 若 $1 < \gamma < 3$, 存在正常数 $\bar{\rho}$, 使得 $\rho_h(t) \leq \bar{\rho}$,

则存在常数 $\eta_0 > 0$, 使得 $\frac{d^2 \eta(U)}{d(U)^2} \geq \eta_0 I$.

2.3. 一致先验估计和 weak BV 条件

对全部单元格 $K \in \mathcal{J}_h$ 求和, 并对离散熵不等式(27)关于时间 $t \in (0, T)$ 积分, 可得 $\int_{\Omega} \eta(U_h(t)) dx \leq \int_{\Omega} \eta(U_h(0)) dx$. 因此有 $\eta(U_h) \in L^{\infty}(0, T; L^1(\Omega))$, 根据熵 $\eta(U_h) = \frac{|m_h|^2}{\rho_h} + P(\rho_h)$ 定义, 又由假设条件1.1, 即 ρ_h 远离真空, 则有下列估计

$$\rho_h \in L^{\infty}(0, T; L^{\gamma}(\Omega)), \gamma > 1, p_h \in L^{\infty}(0, T; L^1(\Omega)),$$

$$\sqrt{\rho_h} u_h \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)), \text{ 以及 } m_h = \rho_h u_h \in L^{\infty}(0, T; L^r(\Omega)), r = \frac{2\gamma}{1+\gamma} > 1.$$

引理 2.8. 若定理1.1中的假设条件成立, 则数值格式 ELW_p 满足 weak BV 条件, 即当 $h \rightarrow 0+$ 时, 其数值解满足

$$\int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma = \sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} C_{\sigma}^k |U_{h\sigma}|^{2m+1} h^N = \mathcal{O}(h) \rightarrow 0, \quad (28)$$

证明: 由于 ELW_p 是熵稳定的, 针对 $K \in \mathcal{J}_h$ 进行求和, 并关于时间积分, 有

$$\int_{\Omega} \eta(U_h(T)) dx - \int_{\Omega} \eta(U_h(0)) dx \leq - \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma = \sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} C_{\sigma}^k |V_{h\sigma}|^{2m+1} h^{N-1} \leq 0.$$

存在常数 C 使得 $\int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma = \sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} C_{\sigma}^k |V_{h\sigma}|^{2m+1} h^{N-1} \leq C$. 由引理2.7, $\frac{d^2 \eta}{dU^2} \geq \eta_0 I$, 则有

$$\eta_0^{2m+1} \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma = \sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} C_{\sigma}^k |U_{h\sigma}|^{2m+1} h^{N-1} \leq C. \quad (29)$$

则当 $h \rightarrow 0+$ 时, 则数值格式 ELW_p 满足弱 BV 条件。

引理 2.9. 若定理1.1中的假设条件成立, 则数值形式 $TeCNO_p$ 满足 weak BV 条件, 即当 $h \rightarrow 0+$ 时, 其数值解满足条件

$$\int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma = \sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} |D_{\sigma,k} V_h(t)|_{\sigma} h^N dt = \mathcal{O}(h^{1/2}) \rightarrow 0. \quad (30)$$

进一步, 若(8)成立, 则有

$$\int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma = \sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} C_{\sigma}^k |U_h(t)|_{\sigma}^{2m+1} h^N dt = \mathcal{O}(h) \rightarrow 0. \quad (31)$$

证明: 对熵不等式(27)积分可得

$$\int_{\Omega} \eta(U_h(T)) dx - \int_{\Omega} \eta(U_h(0)) dx \leq -h^{N-1} \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} V_h(t)_{\sigma} \cdot D_{\sigma,k} V_h(t)_{\sigma} dt \leq 0. \quad (32)$$

则存在常数 $C > 0$, 使得 $0 \leq h^{N-1} \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} V_h(t)_{\sigma} \cdot D_{\sigma,k} V_h(t)_{\sigma} dt \leq C$. 根据 $TeCNO_p$ 等价形式, 有

$$h^N \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} V_h(t)_{\sigma}^T M_{\sigma,k} V_h(t)_{\sigma} dt = \mathcal{O}(h) \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0+, \quad (33)$$

其中 $M_{\sigma,k} = R_{\sigma,k} A_{\sigma,k} B_{\sigma,k} R_{\sigma,k}^T$ 根据前文引理2.4 可知 M_k 同样为半正定矩阵, 则可定义 $M_{k,\sigma} = M_{\sigma,k}^{1/2} M_{\sigma,k}^{1/2}$, 这里 $M_{\sigma,k}^{1/2}$ 是矩阵 $M_{\sigma,k}$ 的平方根

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} |D_{\sigma,k} V_h(t)_{\sigma}| h^N dt = \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} h^N |M_{\sigma,k} V_h(t)_{\sigma}| dt \\ & \leq \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} h^N \|M_{\sigma,k}^{1/2}\| \cdot |M_{\sigma,k}^{1/2} V_h(t)_{\sigma}| dt = \mathcal{I}. \end{aligned}$$

于是应用 Hölder 不等式得到

$$\mathcal{I} \leq \underbrace{\left(\int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} h^N \|M_{\sigma,k}^{1/2}\|^2 dt \right)^{1/2}}_{I_1} \underbrace{\left(\int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} h^N V_h(t)_{\sigma}^T M_{\sigma,k} V_h(t)_{\sigma} dt \right)^{1/2}}_{I_2}.$$

当 $h \rightarrow 0+$ 时, 根据式(33), $I_2 \rightarrow 0$ 直接成立. I_1 则可用如下不等式估计

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} h^N \|M_{\sigma,k}^{1/2}\|^2 dt = \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^{\pm} \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} h^N |\lambda_{\max}(M_{\sigma,k})| dt \\ &\leq C \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \int_K |\lambda_{\max}((M_k)_K)| dx dt. \end{aligned} \quad (34)$$

对于多维 ($N > 1$) 欧拉方程组, $f(U) = (m, \frac{m \otimes m}{\rho} + p(\rho)I)^T$, $U = (\rho, m)^T$, 结合前文数值解的先验估计, 则特征值满足 $\max_d \{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_d^k\} = \frac{|m_k|}{\rho} + \sqrt{\frac{dp(\rho)}{d\rho}} \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$, $k = 1, \dots, N$. 因此 $\int_0^T \sum_{k=1,2,\dots,N} \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \int_K |\lambda_{\max}((M_k)_K)| dx dt \leq C$. 根据(2.3)-(34)则得到 $TeCNO_p$ 满足弱 BV 性质(30). 结合引理2.7以及猜想(8), 则有(31) 成立。

3. 定理证明

3.1. 定理1.1的证明

对数值形式(22)同时乘以 $h^N(\mathcal{H}_h\varphi(t))_K$, 对所有的单元格 $K \in \mathcal{J}_h$ 求和并关于时间积分, 则可分为下列三项, 分别为时间项、对流项、以及数值扩散项

时间项:

$$\begin{aligned} & h^N \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \frac{d}{dt} U_K(t) \cdot (\mathcal{H}_h\varphi(t, x))_K dt \\ &= \left[\int_{\Omega} U_h(\tau) \cdot \varphi(\tau, \cdot) dx \right]_{\tau=0}^{\tau=T} - \int_0^T \int_{\Omega} U_h(t) \cdot \partial_t \varphi(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (35)$$

对流项: 由离散分部积分公式推出

$$h^N \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} (\operatorname{div}_h \tilde{F}_h^{2m})_K (\mathcal{H}_h\varphi)_K dt = -h^N \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} (\tilde{F}_h^{2m})_K \cdot (\nabla_h^+ \varphi_h)_K dt = -\mathcal{T}. \quad (36)$$

可将等号右侧转化为

$$\mathcal{T} = \int_0^T \int_{\Omega} f(U_h) \cdot \nabla \varphi dx dt + h^N \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \left((\tilde{F}_h^{2m})_K - f(U_h) \right) \cdot (\nabla_h^+ \varphi_h)_K dt + \mathcal{T}_1, \quad (37)$$

其中 $\mathcal{T}_1 = h \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \big|_{C(0,T)} \{m_h(t)_{L^\infty(L^1)} + \sqrt{\rho_h(t)} u_h(t)_{L^\infty(L^2)} + p_h(t)_{L^\infty(L^1)}\}$.

接下来, 我们验证(37)右端的第二项随着 $h \rightarrow 0+$ 也会趋近于 0。由于不同于 [6] 中假设 $U_{hL^\infty} < +\infty$, 我们不假设数值通量 F_h 如 [6] 中直接满足李普希兹条件, 而是有下述估计

$$\tilde{F}_{\sigma,k} - f_k(U_K) \lesssim C_\sigma^k U_K - U_L, \quad (38)$$

其中 $C_\sigma^k = \frac{1}{2} \max_{1 \leq s \leq d} (|\lambda_s^k(U_K)|, |\lambda_s^k(U_L)|)$, 将单元格 $K - i h e_k$ 和 $K - (i+1) h e_k$ 之间的面定义为 $\sigma_{i,i+1}$, 由高阶精度数值通量函数 $\tilde{F}_{\sigma,k}^{2m}$ 的构造, 得到

$$\tilde{F}_{h,k}^{2m}(U_{K-(m-1)he_k}, \dots, U_{K+mhe_k}) - f_k(U_K) \lesssim \sum_{i=m-1}^m C_{\sigma_{i,i+1}}^k U_h(t)_{\sigma_{i,i+1}}, \quad (39)$$

则有

$$h^N \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \left((\tilde{F}_h^{2m})_K - f(U_h) \right) \cdot (\nabla_h^+ \varphi_h)_K dt \lesssim h^N \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{k=1}^N \sum_{i=m-1}^m C_{\sigma_{i,i+1}}^k U_h(t)_{\sigma_{i,i+1}} dt \nabla \varphi_{L^\infty}$$

利用 Holder 不等式 $\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{m'} = 1$, 得到

$$\begin{aligned} & h^N \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{k=1}^N \sum_{i=m-1}^m C_{\sigma_{i,i+1}}^k U_h(t)_{\sigma_{i,i+1}} dt \nabla \varphi_{L^\infty} \\ & \lesssim \left(\int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^\pm \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} C_\sigma^k U_h(t)_\sigma^{2m+1} h^N dt \right)^{\frac{1}{2m+1}} \left(\int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^\pm \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} C_{\sigma_{i,i+1}}^k h^N dt \right)^{\frac{1}{m'}} \nabla \varphi_{L^\infty}. \end{aligned}$$

这里计算可得 $m' = \frac{2m+1}{2m}$ 。由两类数值格式都满足弱 BV 条件, 且根据前文先验估计 $\max_d \{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_d^k\} \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$, 则当 $h \rightarrow 0+$ 时, 等式(37)第二项也会趋近于 0。

数值扩散项: 回顾两类 p 阶精度数值格式, 设 $\tilde{D}_\sigma^k V_{h\sigma} = C_\sigma^k |V_{h\sigma}|^{p-1} V_{h\sigma}$ 以及 $\tilde{D}_\sigma^k V_h(t)_\sigma = R_{\sigma,k} A_{\sigma,k} B_{\sigma,k} R_{\sigma,k}^T V_h(t)_\sigma$, 则数值扩散项为

$$h^{N-1} \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^\pm \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} (\tilde{D}_\sigma^k V_h(t)_\sigma)_K (n_K^+ \cdot e_k) (\mathcal{H}_h \varphi(x, t))_K dt. \quad (40)$$

对任意但固定面 $\sigma = K|L$, 有

$$\frac{1}{h} \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^\pm \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} (\tilde{D}_\sigma^k V_h(t)_\sigma)_K \int_K \varphi(x, t) dx - \tilde{D}_\sigma^k V_h(t)_\sigma \int_L \varphi(x, t) dx dt. \quad (41)$$

不失一般性, 设单元格 K、L 沿 $e_k, k = 1, 2, \dots, N$ 方向; 令 $\tilde{x} = (\tilde{x}_k, x') \in \sigma = K|L, k = 1, 2, \dots, N$ 及 $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, 取 $\xi \in (0, h)$ 将函数 $\varphi(x, t)$ 在点 $x = (x_k, x') \in K$ 泰勒展开

$$\varphi(x_k, x') = \varphi(\tilde{x}_k, x') - \xi \partial_{x_k} \varphi(\tilde{x}_k, x') + \mathcal{O}(h^2),$$

同理, 单元格 L 上有 $\varphi(x_k, x') = \varphi(\tilde{x}_k, x') + \xi \partial_{x_k} \varphi(\tilde{x}_k, x') + \mathcal{O}(h^2)$, 则式(41)转化为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left| \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^\pm \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} \left[\tilde{D}_\sigma^k V_h(t)_\sigma \int_0^h \int_\sigma (-\xi \partial_{x_k} \varphi(\tilde{x}_k, x')) d\xi dx' - \tilde{D}_\sigma^k V_h(t)_\sigma \int_0^h \int_\sigma \xi \partial_{x_k} \varphi(\tilde{x}_k, x') d\xi dx' \right] dt \right| \\ & \leq \frac{2}{h} \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^\pm \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} |\tilde{D}_\sigma^k V_h(t)_\sigma| \int_0^h \int_\sigma \xi \partial_{x_k} \varphi(\tilde{x}_k, x') d\xi dx' | dt \\ & \lesssim h^N \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{J}_h} \sum_{\substack{\sigma=\sigma_k^\pm \in \partial K \\ k=1,2,\dots,N}} |\tilde{D}_\sigma^k V_h(t)_\sigma| dt \|\varphi\|_{C^1([0,T] \times \Omega)} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

最后一项不等式源于两类数值格式定义 $\tilde{D}_\sigma^k V_h(t)_\sigma$ 和弱 BV 性质, 至此完成定理1.1的证明。

3.2. 定理1.2的证明

关于定理1.2的证明与文章 [11] 中 7.1 节相同, 因此这里我们只做简要说明, 由前文一致先验估计, 则有

$$\begin{aligned}\rho_h(t) &\rightarrow \rho \text{ weakly} - (*) \text{ 在 } L^\infty(0, T; L^\gamma(\Omega)), \\ m_h &\rightarrow m \text{ weakly} - (*) \text{ 在 } L^\infty(0, T; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega; \mathbb{R}^N)), \\ \frac{m_h \otimes m_h}{\rho_h} + p_h(t)I &\rightarrow \overline{\frac{m \otimes m}{\rho}} + p(\rho)I \text{ weakly} - (*) \text{ 在 } L^\infty(0, T; \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})).\end{aligned}$$

因此, 随着 $h \rightarrow 0+$ 时, 根据 Young 测度基本定理 [16], 对于一致性公式(9)得到极限

$$\left[\int_{\Omega} \langle \mathcal{V}_{t,x}; \rho \rangle \varphi(t, \cdot) \right]_{t=0}^{t=\tau} = \int_0^\tau \int_{\Omega} \langle \mathcal{V}_{t,x}; \rho \rangle \partial_t \varphi(t, \cdot) + \langle \mathcal{V}_{t,x}; m \rangle \cdot \nabla_x \varphi dx dt,$$

对比耗散测度值解定义, 发现此时 $r_C^1 = 0$. 同理, 取 $r_C^2 = \overline{\frac{m \otimes m}{\rho}} + p(\rho)I - \langle \mathcal{V}_{t,x}; \frac{m \otimes m}{\rho} + p(\rho)I \rangle \in L^\infty(0, T; \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}))$ 则有

$$\begin{aligned}\left[\int_{\Omega} \langle \mathcal{V}_{t,x}; m \rangle \cdot \varphi(t, \cdot) \right]_{t=0}^{t=\tau} &= \int_0^\tau \int_{\Omega} \langle \mathcal{V}_{t,x}; m \rangle \cdot \partial_t \varphi(t, \cdot) + \langle \mathcal{V}_{t,x}; \frac{m \otimes m}{\rho} \rangle : \nabla_x \varphi \\ &\quad + \langle \mathcal{V}_{t,x}; p(\rho)I \rangle \operatorname{div}_x \varphi + r_C^2 : \nabla_x \varphi \, dx dt.\end{aligned}$$

令 $F(U_h) = \int_{\Omega} \frac{m_h \otimes m_h}{\rho_h} + p_h(t)I dx$, $G(U_h) = \int_{\Omega} \eta(U_h) dx$, 结合引理2.6, 则耗散测度值解定义中耗散缺陷不等式成立. 至此定理2定理证明成立.

参考文献

- [1] Evans, L. C. (1998) Partial Differential Equations (Graduate Studies in Mathematics). 2nd edition, American Mathematical Society.
- [2] de Lellis, C. and Székelyhidi, L. (2008) On Admissibility Criteria for Weak Solutions of the Euler Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **195**, 225-260. <https://doi.org/10.1007/s00205-008-0201-x>
- [3] de Lellis, C. and Székelyhidi, L. (2009) The Euler Equations as a Differential Inclusion. *Annals of Mathematics*, **170**, 1417-1436. <https://doi.org/10.4007/annals.2009.170.1417>
- [4] Chiodaroli, E., De Lellis, C. and Kreml, O. (2014) Global Ill-Posedness of the Isentropic System of Gas Dynamics. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **68**, 1157-1190. <https://doi.org/10.1002/cpa.21537>
- [5] DiPerna, R.J. (1985) Measure-Valued Solutions to Conservation Laws. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **88**, 223-270. <https://doi.org/10.1007/bf00752112>

- [6] Fjordholm, U. (2013) High-Order Accurate Entropy Stable Numerical Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. ETH Zürich Dissertation Nr. 21025.
- [7] Fjordholm, U.S., Käppeli, R., Mishra, S. and Tadmor, E. (2015) Construction of Approximate Entropy Measure-Valued Solutions for Hyperbolic Systems of Conservation Laws. *Foundations of Computational Mathematics*, **17**, 763-827. <https://doi.org/10.1007/s10208-015-9299-z>
- [8] Feireisl, E., Gwiazda, P., Świerczewska-Gwiazda, A. and Wiedemann, E. (2016) Dissipative Measure-Valued Solutions to the Compressible Navier-Stokes System. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **55**, Article No. 141. <https://doi.org/10.1007/s00526-016-1089-1>
- [9] Prodi, G. (1959) Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **48**, 173-182. <https://doi.org/10.1007/bf02410664>
- [10] Serrin, J. (1963) The Initial Value Problem for the Navier-Stokes Equations. In: Langer, R.E., Ed., *Nonlinear Problems*, University of Wisconsin Press, 69-98.
- [11] Feireisl, E., Lukáčová-Medvid'ová, M. and Mizerová, H. (2019) Convergence of Finite Volume Schemes for the Euler Equations via Dissipative Measure-Valued Solutions. *Foundations of Computational Mathematics*, **20**, 923-966. <https://doi.org/10.1007/s10208-019-09433-z>
- [12] Feireisl, E. and Lukáčová-Medvid'ová, M. (2017) Convergence of a Mixed Finite Element-Finite Volume Scheme for the Isentropic Navier-Stokes System via Dissipative Measure-Valued Solutions. *Foundations of Computational Mathematics*, **18**, 703-730. <https://doi.org/10.1007/s10208-017-9351-2>
- [13] Tadmor, E. (1987) The Numerical Viscosity of Entropy Stable Schemes for Systems of Conservation Laws. I. *Mathematics of Computation*, **49**, 91-103. <https://doi.org/10.2307/2008251>
- [14] LeFloch, P.G., Mercier, J.M. and Rohde, C. (2002) Fully Discrete, Entropy Conservative Schemes of Arbitrary Order. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **40**, 1968-1992. <https://doi.org/10.1137/s003614290240069x>
- [15] Fjordholm, U.S., Mishra, S. and Tadmor, E. (2012) ENO Reconstruction and ENO Interpolation Are Stable. *Foundations of Computational Mathematics*, **13**, 139-159. <https://doi.org/10.1007/s10208-012-9117-9>
- [16] Pedregal, P. (1997) Parametrized Measures and Variational Principles. Birkhäuser Basel.