

p -进域上奇异积分算子与 Lipschitz 函数生成的交换子的有界性

张雯雯

牡丹江师范学院数学科学学院, 黑龙江 牡丹江

收稿日期: 2025年3月3日; 录用日期: 2025年4月15日; 发布日期: 2025年4月29日

摘 要

本文讨论了 p -进域上的奇异积分算子与Lipschitz函数生成的交换子的有界性, 证明了交换子是从Lebesgue空间到Campanato空间有界的。

关键词

p -进域, 奇异积分算子, 交换子, Lipschitz空间, Campanato空间, Lebesgue空间

Boundedness of Commutator Generated by Singular Integral Operator and Lipschitz Function on the p -Adic Field

Wenwen Zhang

Department of Mathematics, Mudanjiang Normal University, Mudanjiang Heilongjiang

Received: Mar. 3rd, 2025; accepted: Apr. 15th, 2025; published: Apr. 29th, 2025

Abstract

In this paper, we discussed the boundedness of commutator generated by singular integral operator and Lipschitz function on the p -adic field. We proved that the commutator is bounded from Lebesgue space to certain Campanato space.

Keywords

p -Adic Field, Singular Integral Operator, Commutator, Lipschitz Space, Campanato Space, Lebesgue Space

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1897 年, Hensel [1] 为解决高次同余方程的局部解问题, 首次提出了 p -进数的概念. 对于一个素数 p , p -进数域 $\mathbb{Q}_p$ 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 对于 p -进非阿基米德范数 $|\cdot|_p$ 的完备化. 范数 $|\cdot|_p$ 的定义如下: 对于 $x = 0$, 则 $|0|_p = 0$; 对于任意非零有理数 x , 假设 x 可以唯一表示成 $x = p^\gamma(m/n)$, 其中 $\gamma \in \mathbb{Z}$ 且 m 和 n 是不被 p 整除的整数, 则 $|x|_p = p^{-\gamma}$. $|\cdot|_p$ 满足以下性质:

$$|xy|_p = |x|_p |y|_p, |x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

若 $|x|_p \neq |y|_p$, 则 $|x + y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$. 根据标准的 p -进分析 [2], 每个非零的 p -进数 $x \in \mathbb{Q}_p$ 都可以被唯一地表示为

$$x = p^\gamma \sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j, \quad (1)$$

其中 $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$, $a_j \in \mathbb{Z}$ 且 $0 \leq a_j \leq p-1$, $a_0 \neq 0$. 因为 $|a_j p^j|_p = p^{-j}$, 所以级数 (1) 在 p -进范数下收敛.

空间 $\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times \cdots \times \mathbb{Q}_p = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i \in \mathbb{Q}_p, i = 1, 2, \cdots, n\}$. 在 $\mathbb{Q}_p^n$ 上, p -进范数定义

为: $|x|_p := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|_p$. 对于 $\gamma \in \mathbb{Z}$, 定义 $B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p^n : |x - a|_p \leq p^\gamma\}$ 为以 $a \in \mathbb{Q}_p^n$ 为中心, 以 p^γ 为半径的球. 定义 $S_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p^n : |x - a|_p = p^\gamma\}$ 为以 $a \in \mathbb{Q}_p^n$ 为中心, 以 p^γ 为半径的球面. 显然, $S_\gamma(a) = B_\gamma(a) \setminus B_{\gamma-1}(a)$ 且 $B_\gamma(a) = \bigcup_{k \leq \gamma} S_k(a)$.

由于 $\mathbb{Q}_p^n$ 在加法运算下是一个局部紧的可交换群, 因此在 $\mathbb{Q}_p^n$ 上存在一个 Haar 测度 dx 保持平移不变性, 并满足

$$\int_{B_0(0)} dx = |B_0(0)|_H = 1,$$

其中 $|E|_H$ 表示 $\mathbb{Q}_p^n$ 上的可测子集 E 的 Haar 测度. 因此, 容易得出, 对任意的 $a \in \mathbb{Q}_p^n$, 有 $|B_\gamma(a)|_H = p^{\gamma n}$, $|S_\gamma(a)|_H = p^{\gamma n}(1 - p^{-n})$.

令 $1 \leq q < \infty$. p -进 Lebesgue 空间 $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 定义为

$$L^q(\mathbb{Q}_p^n) = \left\{ f : \|f\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)} = \left(\int_{\mathbb{Q}_p^n} |f(x)|^q dx \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

并用 $L^\infty(\mathbb{Q}_p^n)$ 表示 $\mathbb{Q}_p^n$ 上所有(实值)可测函数 f 的全体, 其满足

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{Q}_p^n)} := \inf\{\alpha : |\{x \in \mathbb{Q}_p^n : |f(x)| > \alpha\}|_H = 0\} < \infty.$$

近年来, p -进分析已经广泛应用于数学物理和理论物理等领域. 例如, 将传统的量子力学理论推广到 p -进数域上; 在弦理论中, p -进数被用来描述某些物理现象等(见 [2] [3] 及相关文献). 在此期间, p -进域上的调和分析已经取得了许多有意义的成果. 例如, 经典积分算子在 p -进域上的推广; p -进 Lizorkin 空间的引入从而进一步深化了 p -进伪微分方程的研究等(见 [4]- [8] 及相关文献).

奇异积分算子理论在调和分析领域中具有重要地位. 1952 年, Calderón 和 Zygmund [9] 提出了 Calderón-Zygmund 奇异积分算子理论. 1956 年, Calderón 和 Zygmund [10] 进一步讨论了卷积型奇异积分算子, 证明了其在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$) 上的有界性. 随着理论体系的不断完善, 奇异积分算子的应用范围不断扩展, 例如非线性分析与小波分析、复分析、偏微分方程等, 见文 [11] [12].

交换子作为与奇异积分算子紧密关联的一类重要算子, 在揭示函数空间结构、分析算子正则性以及探究偏微分方程解的性质等方面具有重要的意义. 1976 年, Coifman, Rochberg 和 Weiss [13] 首次引入了交换子的概念, 并对其有界性进行了研究, 证明了奇异积分算子和 BMO 函数生成的交换子 T_b 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性. 令 T 为 Calderón-Zygmund 奇异积分算子且 $b \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 交换子 T_b 定义如下:

$$T_b f = bT(f) - T(bf),$$

在此之后, 函数空间上的算子交换子的有界性也被广泛研究(见 [14]- [16]).

1969 年, Phillips 和 Taibleson [17] 考虑了 p -进域上的 Calderón-Zygmund 型经典奇异积分算子.

定义 1.1. [17] 令 $\Omega \in L^\infty(\mathbb{Q}_p^n)$, $\Omega(p^j x) = \Omega(x)$, $j \in \mathbb{Z}$ 且 $\int_{|x|_p=1} \Omega(x) dx = 0$, p -进域上的奇异积分算子定义为

$$Tf(x) = \lim_{z \rightarrow -\infty} \int_{|x-y|_p > p^z} f(y) \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|_p^n} dy, \quad z \in \mathbb{Z}.$$

1975 年, Taibleson [18] 证明了当 Ω 满足光滑条件

$$\sup_{|y|_p=1} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|x|_p=1} |\Omega(x + p^j y) - \Omega(x)| dx < \infty$$

时, p -进奇异积分算子 T 是 (q, q) 型和弱 $(1, 1)$ 型算子, 其中 $1 < q < \infty$.

定义 1.2. 令 $\Omega \in L^\infty(\mathbb{Q}_p^n)$, $\Omega(p^j x) = \Omega(x)$, $j \in \mathbb{Z}$ 且 $\int_{|x|_p=1} \Omega(x) dx = 0$, 定义 p -进奇异积分算子 T_p 为

$$T_p f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|_p^n} f(y) dy.$$

考虑 Ω 满足下面条件

$$\left| \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|_p^n} - \frac{\Omega(x)}{|x|_p^n} \right| \leq \frac{|y|_p}{|x|_p^{n+1}}, |x|_p > |y|_p > 0 \quad (2)$$

时, 很容易可以推出 $\sup_{|y|_p=1} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|x|_p=1} |\Omega(x + p^j y) - \Omega(x)| dx < \infty$.

因此, 根据文 [18] 中的主要结果, 可以得到 T_p 是 (q, q) 型和弱 $(1, 1)$ 型算子, 其中 $1 < q < \infty$.

定理 A. 令 $\Omega \in L^\infty(\mathbb{Q}_p^n)$, $\Omega(p^j x) = \Omega(x)$, $j \in \mathbb{Z}$, $\int_{|x|_p=1} \Omega(x) dx = 0$ 且 Ω 满足 (2), 则对于 $1 < q < \infty$, 存在与 f 无关的常数 $C > 0$, $\alpha > 0$ 使得

$$\|T_p(f)\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)} \leq C \|f\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)},$$

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{Q}_p^n : |T_p(f)(x)| > \alpha \right\} \right|_H \leq C \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

2019 年, Mo 等人在文 [19] 中证明了 p -进奇异积分算子与 Lipschitz 函数生成的多线性交换子在 p -进广义 Morrey 空间上的有界性. 2023 年, Shi 等人在文 [20] 中得到了 p -进奇异积分算子与 Lipschitz 函数生成的多线性交换子在 p -进 Morrey-Herz 空间上的有界性. p -进域上奇异积分算子的研究也取得了很多成果, 如 [21] [22] 等.

在欧氏空间上, 1978 年, Janson 在文 [23] 中针对交换子 $[b, T]$ 展开研究, 给出了交换子从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 有界的充要条件证明. 具体来说, 当 $0 < \beta < 1$, $1 < p < q < \infty$, $1/p - 1/q = \beta/n$ 时, 该充要条件为 $b \in \text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$. 1995 年, Paluszyński 在文 [24] 中得到了奇异积分算子与 Lipschitz 函数生成的交换子是从 Lebesgue 空间到 Triebel-Lizorkin 空间有界的. 2013 年, Shi 和 Lu 在文 [25] 中研究了奇异积分算子与 Lipschitz 函数生成的交换子在 Morrey 空间上的有界性, 并建立了 Lipschitz 空间的一种等价刻画. 2015 年, Zhang 等人在文 [16] 中给出了 Lipschitz 空间的一种新的刻画, 证明了奇异积分算子与 Lipschitz 函数生成的交换子从 Lebesgue 空间到 Campanato 空间的有界性.

由于欧氏空间中的奇异积分算子与 Lipschitz 函数生成的交换子在一些函数空间上已经得到了充分的研究, 而在 p -进域上, 奇异积分算子与 Lipschitz 函数生成的交换子在函数空间中的性质研究还不完善. 因此, 受上述文献的启发, 本文将研究 p -进域上奇异积分算子与 Lipschitz 函数生成的交换子的有界性.

为叙述本文的结果, 首先回顾 p -进域上的 Campanato 空间和 Lipschitz 空间的定义.

Campanato [26] 在 1963 年首次介绍了 Campanato 空间. Campanato 空间不仅为偏微分方程解的存在性与正则性提供了统一框架, 还在调和分析的算子理论与几何测度论中发挥重要作用. p -进 Campanato 空间定义如下:

定义1.3. 设 $1 \leq q < \infty$, $-n/q \leq \beta < 1$, p -进 Campanato 空间 $C^{q,\beta}(\mathbb{Q}_p^n)$ 定义为

$$C^{q,\beta}(\mathbb{Q}_p^n) = \{f : \|f\|_{C^{q,\beta}(\mathbb{Q}_p^n)} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{C^{q,\beta}(\mathbb{Q}_p^n)} := \sup_{\mathbb{Q}_p^n \ni x} \sup_{\gamma \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|B_\gamma(x)|_H^{\frac{\beta}{n}}} \left(\frac{1}{|B_\gamma(x)|_H} \int_{B_\gamma(x)} |f(y) - f_{B_\gamma(x)}|^q dy \right)^{1/q},$$

其中 $f_{B_\gamma(x)} = \frac{1}{|B_\gamma(x)|_H} \int_{B_\gamma(x)} f(y) dy$.

Lipschitz 空间对于刻画函数光滑性、研究算子有界性及偏微分方程解的正则性方面具有着重作用. p -进 Lipschitz 空间定义如下:

定义1.4. (1) 令 $0 < \beta < 1$, 则 p -进齐型 Lipschitz 空间 $\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)$ 定义为

$$\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n) := \{f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{Q}_p^n) : \|f\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} = \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{Q}_p^n \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|_p^\beta}.$$

(2) 令 $1 \leq q < \infty$, 且 $0 < \beta < 1$, 则 p -进 Lipschitz 空间 $\text{Lip}_\beta^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 定义为

$$\text{Lip}_\beta^q(\mathbb{Q}_p^n) := \{f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{Q}_p^n) : \|f\|_{\text{Lip}_\beta^q(\mathbb{Q}_p^n)} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{\text{Lip}_\beta^q(\mathbb{Q}_p^n)} = \sup_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z} \\ x \in \mathbb{Q}_p^n}} \frac{1}{|B_\gamma(x)|_H^{\frac{\beta}{n}}} \left(\frac{1}{|B_\gamma(x)|_H} \int_{B_\gamma(x)} |f(y) - f_{B_\gamma(x)}|^q dy \right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $f_{B_\gamma(x)} = \frac{1}{|B_\gamma(x)|_H} \int_{B_\gamma(x)} f(y) dy$. 如果 $q = 1$, 用 $\text{Lip}_\beta(\mathbb{Q}_p^n)$ 表示 $\text{Lip}_\beta^1(\mathbb{Q}_p^n)$.

显然, 当 $0 < \beta < 1$, $1 \leq q < \infty$, $C^{q,\beta}(\mathbb{Q}_p^n) = \text{Lip}_\beta^q(\mathbb{Q}_p^n)$.

本文主要结果如下:

定理1.1. 令 $\Omega \in L^\infty(\mathbb{Q}_p^n)$, $\Omega(p^j x) = \Omega(x)$, $j \in \mathbb{Z}$, $\int_{|x|_p=1} \Omega(x) dx = 0$ 且 Ω 满足 (2). 设 $1 < q < \infty$, $-n/q \leq \lambda < 0$, $\beta = \lambda + n/q < 1$. 如果 $b \in \Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)$, 则 $T_{p,b}$ 是从 $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 到 $C^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 有界的. 即: 存在常数 $C > 0$, 使得对任意的 $f \in L^q(\mathbb{Q}_p^n)$, 有

$$\|T_{p,b}(f)\|_{C^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)} \leq C \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

在本文中, 字母 C 在不同的式子中将表示不同的常数.

2. 预备知识

为了证明本文结果, 需介绍如下引理.

引理2.1.[27] 如果 $f \in \text{Lip}_\beta^q(\mathbb{Q}_p^n)$, 对于 $0 < \beta < 1$ 和 $1 \leq q < \infty$.

(i) 范数 $\|f\|_{\text{Lip}_\beta^q(\mathbb{Q}_p^n)}$ 与范数 $\|f\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{Q}_p^n)}$ 等价.

(ii) $\|f\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \approx \|f\|_{\text{Lip}_\beta^q(\mathbb{Q}_p^n)}$.

由 $\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)$ 的定义容易得到下面的点态估计. 如果 $0 < \beta < 1$, $b \in \Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)$, 那么

$$|b(x) - b(y)| \leq \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} |x - y|_p^\beta, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}_p^n, x \neq y. \quad (3)$$

设 $B_\gamma(x)$ 是 $\mathbb{Q}_p^n$ 上的球体, 则由上式, 有

$$\sup_{y \in B_\gamma(x)} |b(y) - b_{B_\gamma(x)}| \leq C |B_\gamma(x)|_H^{\beta/n} \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)}. \quad (4)$$

由文 [28] 中的结论, 可以得到下面的结论.

引理2.2. 设 $B_k(a)$, $B_j(a)$ 是 $\mathbb{Q}_p^n$ 上的球体, $k, j \in \mathbb{Z}$, 令 $B_k(a) \subset B_j(a)$, $0 < \beta < 1$, 如果 $b \in \Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)$, 则

$$|b_{B_k(a)} - b_{B_j(a)}| \leq C \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} |B_j(a)|_H^{\beta/n}.$$

3. 定理证明

定理 1.1 的证明 对任意的球 $B_\gamma(x_0) \subset \mathbb{Q}_p^n$, $f \in L^q(\mathbb{Q}_p^n)$, 需要估计

$$\frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H} \int_{B_\gamma(x_0)} |T_{p,b}f(y) - (T_{p,b}f)_{B_\gamma(x_0)}|^q dy \right)^{1/q} \leq C \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

令 $f = f_1 + f_2$, 其中 $f_1 = f \chi_{B_{\gamma+2}(x_0)}$, 则对任何实数 c , 由 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H} \int_{B_\gamma(x_0)} |T_{p,b}f(y) - (T_{p,b}f)_{B_\gamma(x_0)}|^q dy \right)^{1/q} \\ &= \frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H} \int_{B_\gamma(x_0)} |T_{p,b}f(y) - c + c - (T_{p,b}f)_{B_\gamma(x_0)}|^q dy \right)^{1/q} \\ &= \frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H} \int_{B_\gamma(x_0)} \left| T_{p,b}f(y) - c - \frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H} \int_{B_\gamma(x_0)} (T_{p,b}f(z) - c) dz \right|^q dy \right)^{1/q} \\ &\leq \frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H} \int_{B_\gamma(x_0)} |T_{p,b}f(y) - c|^q dy \right)^{1/q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H} \int_{B_\gamma(x_0)} \left| \frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H} \int_{B_\gamma(x_0)} (T_{p,b}f(z) - c) dz \right|^q dy \right)^{1/q} \\
& \leq \frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H} \int_{B_\gamma(x_0)} |T_{p,b}f(y) - c|^q dy \right)^{1/q} \\
& \quad + \frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H} \int_{B_\gamma(x_0)} |T_{p,b}f(z) - c| dz \\
& \leq \frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H} \int_{B_\gamma(x_0)} |T_{p,b}f(y) - c|^q dy \right)^{1/q} \\
& \quad + \frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H} \int_{B_\gamma(x_0)} |T_{p,b}f(z) - c|^q dz \right)^{1/q} \\
& \leq \frac{2}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H} \int_{B_\gamma(x_0)} |T_{p,b}f(y) - c|^q dy \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

取 $c = -(T_p((b - b_{B_\gamma(x_0)})f_2))_{B_\gamma(x_0)}$, 注意到 $T_{p,b}f = T_{p,(b-b_{B_\gamma(x_0)})}f$, 有

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H} \int_{B_\gamma(x_0)} |T_{p,b}f(y) - (T_{p,b}f)_{B_\gamma(x_0)}|^q dy \right)^{1/q} \\
& \leq \frac{2}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n+1/q}} \left(\int_{B_\gamma(x_0)} |T_{p,b}f(y) + (T_p((b - b_{B_\gamma(x_0)})f_2))_{B_\gamma(x_0)}|^q dy \right)^{1/q} \\
& \leq \frac{2}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n+1/q}} \left(\int_{B_\gamma(x_0)} |(b(y) - b_{B_\gamma(x_0)})T_p f(y)|^q dy \right)^{1/q} \\
& \quad + \frac{2}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n+1/q}} \left(\int_{B_\gamma(x_0)} |T_p((b - b_{B_\gamma(x_0)})f_1)(y)|^q dy \right)^{1/q} \\
& \quad + \frac{2}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n+1/q}} \left(\int_{B_\gamma(x_0)} |T_p((b - b_{B_\gamma(x_0)})f_2)(y) - (T_p((b - b_{B_\gamma(x_0)})f_2))_{B_\gamma(x_0)}|^q dy \right)^{1/q} \\
& := I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

对于 I_1 , 由 $1 < q < \infty$ 和 $\beta = \lambda + n/q$, 根据定理 A, 有

$$\begin{aligned}
I_1 & = \frac{2}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\beta/n}} \left(\int_{B_\gamma(x_0)} |(b(y) - b_{B_\gamma(x_0)})T_p f(y)|^q dy \right)^{1/q} \\
& \leq C \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|T_p f\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)} \\
& \leq C \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}.
\end{aligned}$$

对于 I_2 , 根据定理 A 和引理 2.2, 有

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{2}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\beta/n}} \left(\int_{B_\gamma(x_0)} |T_p((b - b_{B_\gamma(x_0)})f_1)(y)|^q dy \right)^{1/q} \\
&\leq \frac{2}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\beta/n}} \|T_p((b - b_{B_\gamma(x_0)})f_1)\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)} \\
&\leq \frac{C}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\beta/n}} \|(b - b_{B_\gamma(x_0)})f_1\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)} \\
&\leq \frac{C}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\beta/n}} (\|(b - b_{B_{\gamma+2}(x_0)})f\|_{L^q(B_{\gamma+2}(x_0))} + \|(b_{B_{\gamma+2}(x_0)} - b_{B_\gamma(x_0)})f\|_{L^q(B_{\gamma+2}(x_0))}) \\
&\leq \frac{C}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\beta/n}} \left(\|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \cdot |B_{\gamma+2}(x_0)|_H^{\beta/n} + \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \cdot |B_{\gamma+2}(x_0)|_H^{\beta/n} \right) \|f\|_{L^q(B_{\gamma+2}(x_0))} \\
&\leq C \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}.
\end{aligned}$$

下面估计 I_3 , 根据 p -进范数的性质, 则对于任意的 $w, y \in B_\gamma(x_0)$, $z \in B_{\gamma+2}^c(x_0)$, 有 $|w - z|_p > |w - y|_p$. 则有

$$\begin{aligned}
&|T_p((b - b_{B_\gamma(x_0)})f_2)(y) - T_p((b - b_{B_\gamma(x_0)})f_2)(w)| \\
&\leq \int_{\mathbb{Q}_p^n} \left| \frac{\Omega(y - z)}{|y - z|_p^n} - \frac{\Omega(w - z)}{|w - z|_p^n} \right| |(b(z) - b_{B_\gamma(x_0)})f_2(z)| dz \\
&\leq \int_{B_{\gamma+2}^c(x_0)} \left| \frac{\Omega(y - z)}{|y - z|_p^n} - \frac{\Omega(w - z)}{|w - z|_p^n} \right| |b(z) - b_{B_\gamma(x_0)}| |f(z)| dz \\
&\leq \int_{B_{\gamma+2}^c(x_0)} \frac{|w - y|_p}{|w - z|_p^{n+1}} |b(z) - b_{B_\gamma(x_0)}| |f(z)| dz \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{p^{\gamma+k+1} < |x_0 - z|_p \leq p^{\gamma+k+2}} \frac{|w - y|_p}{|w - z|_p^{n+1}} |b(z) - b_{B_\gamma(x_0)}| |f(z)| dz \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-k}}{|B_{\gamma+k+2}(x_0)|_H} \int_{B_{\gamma+k+2}(x_0)} |b(z) - b_{B_\gamma(x_0)}| |f(z)| dz.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{2}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B_\gamma(x_0)|_H} \int_{B_\gamma(x_0)} |T_p((b - b_{B_\gamma(x_0)})f_2)(y) - (T_p((b - b_{B_\gamma(x_0)})f_2))_{B_\gamma(x_0)}|^q dy \right)^{1/q} \\
&\leq \frac{C}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-k}}{|B_{\gamma+k+2}(x_0)|_H} \int_{B_{\gamma+k+2}(x_0)} |b(z) - b_{B_\gamma(x_0)}| |f(z)| dz \\
&\leq \frac{C}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-k}}{|B_{\gamma+k+2}(x_0)|_H} \int_{B_{\gamma+k+2}(x_0)} |b(z) - b_{B_{\gamma+k+2}(x_0)}| |f(z)| dz \\
&\quad + \frac{C}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-k}}{|B_{\gamma+k+2}(x_0)|_H} \int_{B_{\gamma+k+2}(x_0)} |b_{B_{\gamma+k+2}(x_0)} - b_{B_\gamma(x_0)}| |f(z)| dz \\
&:= I_{31} + I_{32}.
\end{aligned}$$

对于 I_{31} , 注意到 $\beta = \lambda + n/q < 1$, $-n/q \leq \lambda < 0$, $1/q + 1/q' = 1$, 根据 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}
 I_{31} &\leq \frac{C}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-k}}{|B_{\gamma+k+2}(x_0)|_H} \left(\int_{B_{\gamma+k+2}(x_0)} |b(z) - b_{B_{\gamma+k+2}(x_0)}|^{q'} dz \right)^{1/q'} \left(\int_{B_{\gamma+k+2}(x_0)} |f(z)|^q dz \right)^{1/q} \\
 &\leq \frac{C}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-k}}{|B_{\gamma+k+2}(x_0)|_H} |B_{\gamma+k+2}(x_0)|_H^{\beta/n} \cdot |B_{\gamma+k+2}(x_0)|_H^{1/q'} \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)} \\
 &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} p^{k(\lambda-1)} \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)} \\
 &\leq C \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}.
 \end{aligned}$$

对于 I_{32} , 注意到 $\beta = \lambda + n/q < 1$, $-n/q \leq \lambda < 0$, 根据 Hölder 不等式和引理 2.2, 有

$$\begin{aligned}
 I_{32} &\leq \frac{C}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-k}}{|B_{\gamma+k+2}(x_0)|_H} \cdot |B_{\gamma+k+2}(x_0)|_H^{\beta/n} \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \int_{B_{\gamma+k+2}(x_0)} |f(z)| dz \\
 &\leq \frac{C}{|B_\gamma(x_0)|_H^{\lambda/n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-k}}{|B_{\gamma+k+2}(x_0)|_H^{1/q}} \cdot |B_{\gamma+k+2}(x_0)|_H^{\beta/n} \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{L^q(B_{\gamma+k+2}(x_0))} \\
 &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} p^{k(\lambda-1)} \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{L^q(B_{\gamma+k+2}(x_0))} \\
 &\leq C \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}.
 \end{aligned}$$

结合 I_{31} , I_{32} , 可得到

$$I_3 \leq C \|b\|_{\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

因此, 定理 1.1 证毕.

4. 结论

在本文中, 主要讨论了 p -进奇异积分算子交换子的有界性. 建立了当 b 属于 p -进 Lipschitz 空间时, 与 p -进奇异积分算子生成的交换子从 Lebesgue 空间到 Campanato 空间的有界性结果. 通过将实分析中的经典思想推广到 p -进域上, 进一步完善了 p -进域上的交换子理论, 为算子研究提供了新的方法和思路. 值得注意的是, 当前结论仅针对当 $-n/q \leq \lambda < 0$ 时的 Campanato 空间 $C^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$. 在以上文献的基础上, 我们可以继续考虑将单线性交换子推广到多线性情形, 研究 p -进奇异积分算子与 Lipschitz 函数生成的多线性交换子的有界性问题.

基金项目

黑龙江省省属本科高校基本科研业务费项目(编号: 1453ZD031); 黑龙江省自然科学基金联合基金重点项目(编号: ZL2024A001); 牡丹江师范学院研究生课程及教改项目(编号: KCSZKC-2022026,

KCSZAL-2022013, XKCSZXM-2023007, 2024-004).

参考文献

- [1] Hensel, K. (1905) Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, **1905**, 1-32.
<https://doi.org/10.1515/crll.1905.128.1>
- [2] Vladimirov, V.S., Zelenov, E.I. and Volovich, I.V. (1994) *p*-Adic Analysis and Mathematical Physics. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/1581>
- [3] Vladimirov, V.S. and Volovich, I.V. (1989) *p*-Adic Quantum Mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, **123**, 659-676. <https://doi.org/10.1007/bf01218590>
- [4] Albeverio, S., Khrennikov, A.Y. and Shelkovich, V.M. (2006) Harmonic Analysis in the *p*-Adic Lizorkin Spaces: Fractional Operators, Pseudo-Differential Equations, *p*-Adic Wavelets, Tauberian Theorems. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **12**, 393-425.
<https://doi.org/10.1007/s00041-006-6014-0>
- [5] Chuong, N.M. (2018) Pseudodifferential Operators and Wavelets over Real and *p*-Adic Fields. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-77473-2>
- [6] Chuong, N.M. and Duong, D.V. (2013) Wavelet Bases in the Lebesgue Spaces on the Field of *p*-Adic Numbers. *P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications*, **5**, 106-121.
<https://doi.org/10.1134/s2070046613020027>
- [7] Volosivets, S.S. (2013) Maximal Function and Riesz Potential on *p*-Adic Linear Spaces. *P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications*, **5**, 226-234.
<https://doi.org/10.1134/s2070046613030059>
- [8] Volosivets, S.S. (2017) Generalized Fractional Integrals in *p*-Adic Morrey and Herz Spaces. *P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, **9**, 53-61.
<https://doi.org/10.1134/s2070046617010058>
- [9] Calderon, A.P. and Zygmund, A. (1952) On the Existence of Certain Singular Integrals. *Acta Mathematica*, **88**, 85-139. <https://doi.org/10.1007/bf02392130>
- [10] Calderon, A.P. and Zygmund, A. (1956) On Singular Integrals. *American Journal of Mathematics*, **78**, 289-309. <https://doi.org/10.2307/2372517>
- [11] 韩永生. 近代调和分析方法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
- [12] Hirschman, I.I. (1955) The Decomposition of Walsh and Fourier Series. Memoirs of the American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/memo/0015>
- [13] Coifman, R.R., Rochberg, R. and Weiss, G. (1976) Factorization Theorems for Hardy Spaces in Several Variables. *The Annals of Mathematics*, **103**, 611-635. <https://doi.org/10.2307/1970954>

- [14] Guo, W., Lian, J. and Wu, H. (2019) The Unified Theory for the Necessity of Bounded Commutators and Applications. *The Journal of Geometric Analysis*, **30**, 3995-4035.
<https://doi.org/10.1007/s12220-019-00226-y>
- [15] Shirai, S. (2006) Necessary and Sufficient Conditions for Boundedness of Commutators of Fractional Integral Operators on Classical Morrey Spaces. *Hokkaido Mathematical Journal*, **35**, 683-696. <https://doi.org/10.14492/hokmj/1285766424>
- [16] Zhang, L., Shi, S.G. and Huang, H. (2015) New Characterizations of Lipschitz Space via Commutators on Morrey Spaces. *Advances in Mathematics*, **44**, 899-905.
- [17] Phillips, K. and Taibleson, M. (1969) Singular Integrals in Several Variables over a Local Field. *Pacific Journal of Mathematics*, **30**, 209-231. <https://doi.org/10.2140/pjm.1969.30.209>
- [18] Taibleson, M.H. (1975) Fourier Analysis on Local Fields. Princeton University Press; University of Tokyo Press.
- [19] Mo, H.X., Han, Z., Yang, L. and Wang, X.J. (2019) p -Adic Singular Integrals and Their Commutators in Generalized Morrey Spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, **2019**, 1-13. <https://doi.org/10.1186/s13660-019-2009-7>
- [20] Shi, Y., Li, L. and Shen, Z. (2023) Boundedness of p -Adic Singular Integrals and Multilinear Commutator on Morrey-Herz Spaces. *Journal of Function Spaces*, **2023**, Article 9965919.
<https://doi.org/10.1155/2023/9965919>
- [21] Ho, K. (2022) Singular Integral Operators for Rearrangement-Invariant Morrey Spaces on Local Fields. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, **29**, 1-15.
<https://doi.org/10.1007/s40590-022-00474-z>
- [22] Wu, Q.Y., Lu, S.Z. and Fu, Z.W. (2017) p -Adic Central Function Spaces and Singular Integral Operators. *Chinese Journal of Contemporary Mathematics*, **38**, 73-90.
- [23] Janson, S. (1978) Mean Oscillation and Commutators of Singular Integral Operators. *Arkiv för Matematik*, **16**, 263-270. <https://doi.org/10.1007/bf02386000>
- [24] Paluszynski, M. (1995) Characterization of the Besov Spaces via the Commutator Operator of Coifman, Rochberg and Weiss. *Indiana University Mathematics Journal*, **44**, 1-17.
<https://doi.org/10.1512/iumj.1995.44.1976>
- [25] Shi, S. and Lu, S. (2013) Some Characterizations of Campanato Spaces via Commutators on Morrey Spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, **264**, 221-234.
<https://doi.org/10.2140/pjm.2013.264.221>
- [26] Campanato, S. (1963) Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Matematiche*, **17**, 175-188.
- [27] He, Q. and Li, X. (2022) Characterization of Lipschitz Spaces via Commutators of Maximal Function on the p Vector Space. *Journal of Mathematics*, **2022**, Article 7430272.
<https://doi.org/10.1155/2022/7430272>

- [28] Mo, H., Wang, X. and Ma, R. (2018) Commutator of Riesz Potential in p -Adic Generalized Morrey Spaces. *Frontiers of Mathematics in China*, **13**, 633-645.
<https://doi.org/10.1007/s11464-018-0696-x>