Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(10), 137-155
Published Online October 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.1510257

带有时滞和强阻尼的梁方程的时间依赖吸引子

汪 璇，赵文佩*

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2025年8月28日；录用日期：2025年9月29日；发布日期：2025年10月28日

摘 要

本文研究了带有时滞和强阻尼的梁方程：$\partial_t^2 u + \Delta^2 u - \gamma\Delta\partial_t u + f(u) = g(x, u_\theta)$ 解的渐近性态。当非线性项满足最优增长指数 $1 \leqslant p < p^* = \frac{N+2}{N-4}$，$N \geqslant 5$ 时，应用 **Faedo-Galerkin** 逼近方法、能量估计和时间平移方法，得到了解的适定性。进一步应用收缩函数方法，验证了过程的渐近紧性，最后获得了时间依赖全局吸引子在时间依赖空间 $C_{\mathcal{H}}$ 的存在性。

关键词

时滞，强阻尼，时间依赖全局吸引子，梁方程

The Time-Dependent Attractors for Beam Equation with Time Delay and Strong Damping

Xuan Wang, Wenpei Zhao*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: August 28, 2025; accepted: September 29, 2025; published: October 28, 2025

* 通讯作者。

文章引用: 汪璇, 赵文佩. 带有时滞和强阻尼的梁方程的时间依赖吸引子[J]. 理论数学, 2025, 15(10): 137-155. DOI: 10.12677/pm.2025.1510257

Abstract

In this article, We consider the asymptotic behavior of the solutions to the beam equation with time delay and strong damping: $\partial_t^2 u+\Delta^2 u-\gamma\Delta\partial_t u+f(u)=g(x,u_\theta)$. First of all, when the growth exponent of nonlinear terms satisfies the optimal growth exponent $1\leqslant p<p^*=\frac{N+2}{N-4},\ N\geqslant 5$, by applying Faedo-Galerkin approximation method, energy estimation and time translation method, we obtain the well-posedness of solutions; Then, using the contraction function method, the asymptotic compactness of the solution process is verified; Finally, the existence of time-dependent global attractor is obtained in the time-dependent space $C_{\mathcal{H}}$.

Keywords

Time Delay, Strong Damping, Time-Dependent Global Attractors, Beam Equation

1. 引言

本文考虑带有时滞和强阻尼的梁方程

$$\partial_t^2 u+\Delta^2 u-\gamma\Delta\partial_t u+f(u)=g(x,u_\theta),\quad (x,t)\in\Omega\times[\tau,+\infty), \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial\Omega}=\Delta u|_{\partial\Omega}=0, \tag{1.2}$$

$$u(x,\tau)=u_0(x),\quad \partial_t u(x,\tau)=u_1(x), \tag{1.3}$$

$$u(x,\tau+\theta)=\phi_0(x,\theta),\quad \partial_t u(x,\tau+\theta)=\phi_1(x,\theta),\quad x\in\Omega,\ \ \theta\in[-\rho,0] \tag{1.4}$$

时间依赖全局吸引子的存在性, 其中 $\gamma>0$ 为阻尼系数, $\Omega\in\mathbb{R}^N(N\geqslant 5)$ 是具有光滑边界的有界区域, $f(u)$ 是非线性项, $g(x,u_\theta)$ 是带有时滞的外力项.

设 $f\in C^1(\mathbb{R})$, $f(0)=0$, 当 $1\leqslant p<p^*=\frac{N+2}{N-4},\ N\geqslant 5$ 时, 满足:

$$\liminf_{|s|\to\infty}\frac{f(s)}{s}\geqslant-\lambda_1, \tag{1.5}$$

$$|f'(s)|\leqslant C(1+|s|^{p-1}),\quad \forall s\in\mathbb{R}, \tag{1.6}$$

其中 $\lambda_1 > 0$ 为算子 $-\Delta$ 满足 Dirichlet 边界条件的第一特征值.

注 1.1 根据 (1.5) 可知, 存在一个常数 β_0, 满足 $\frac{1}{2} < \beta_0 < 1$, 使得

$$\langle F(s), 1\rangle \geqslant -\frac{(1-\beta_0)\lambda_1}{2}\|s\|^2 - C_{\beta_0},$$

$$\langle f(s), s\rangle \geqslant -(1-\beta_0)\lambda_1\|s\|^2 - C_{\beta_0}, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

成立, 其中 $F(s) = \int_0^s f(r)\mathrm{d}r$.

注 1.2 $N \geqslant 5$ 由 Sobolev 嵌入定理与非线性项增长指数 p 的临界条件共同决定.

进一步, 对于给定的 $T > 0$, 定义函数 $u : [\tau-\rho, T] \to L^2(\Omega)$. 对每一个 $t \in [\tau, T]$, 我们用 u_θ 表示定义在 $[-\rho, 0]$ 上的时滞函数: $u_\theta(t) = u(t+\theta)$, $\theta \in [-\rho, 0]$, $0 < \rho < \infty$.
为了方便陈述问题, 关于时滞项给出如下定义和假设.

一般地, 设 X 是可分的 Banach 空间, 并且 $C_\rho(\mathrm{X}) = \{\phi \in C([-\rho, 0]; \mathrm{X});\ \lim_{\theta\to-\rho}\phi(\theta)\text{存在于}\mathrm{X}\}$,具有范数 $\|\alpha\|_{C_\rho(\mathrm{X})} = \sup_{-\rho\leqslant\theta\leqslant 0}\|\alpha(\theta)\|_{\mathrm{X}}$.

假设 $g : \Omega \times C_\rho(\mathrm{X}) \longrightarrow L^2(\Omega)$ 满足:

(H_1) 对所有 $\xi \in C_\rho(\mathrm{X})$, 映射 $x \in \Omega \to g(x, \xi) \in L^2(\Omega)$ 是可测的;

(H_2) 对所有的 $x \in \Omega$, $g(x, 0) = 0$;

(H_3) 存在 $C_g > 0$, 使得对所有的 $x \in \Omega$, $\xi, \eta \in C_\rho(\mathrm{X})$, 有 $\|g(x,\xi) - g(x,\eta)\| \leqslant C_g\|\xi - \eta\|_{C_\rho(\mathrm{X})}$;

(H_4) 存在 $C_g > 0$, 对所有的 $x \in \Omega$, $u, v \in C((\tau-\rho, T]; \mathrm{X})$, $\int_\tau^t \|g(x, u_\theta) - g(x, v_\theta)\|^2\mathrm{d}s \leqslant C_g\int_{\tau-\rho}^t \|u_\theta - v_\theta\|_{\mathrm{X}}^2\mathrm{d}s$.

注 1.3 以上 $(H_1)-(H_4)$ 假设条件满足可测性约束, 零历史零力约束, Lipschitz 约束, 积分能量约束.

近十年来, 无穷维动力系统理论的应用研究备受关注. 在无穷维动力系统中, 通常用吸引子来刻画解的长时间动力学行为. 其中关于无穷维动力系统的的研究已有很多成果, 可参考文献 [1–4].

梁方程作为最典型的四阶分布参数系统, 在大型柔性空间结构、微纳谐振器与软体机器人臂等工程中具有广泛应用. 为抑制振动而引入的速度反馈控制回路, 由于传感器采样、信号传输及作动器响应的固有延迟, 必然在边界或分布环节产生时滞. 在研究解的长时间行为时, 由于材料记忆特性和外部激励的联合作用会导致解的延滞效应, 即时滞现象. 时滞现象广泛应用于物理学、化学、生物学、经济学和环境科学等领域. 在描述系统解的渐近行为时, 解不仅依赖于当前状态, 还依赖于过去某段时间的状态.

在发展方程中引入时滞项可以更精确地描述系统解的动态行为. 例如, 带有时滞项的梁方程可以用于模拟梁在受到动态载荷时的响应, 其中时滞项反映了载荷对桥梁结构的延迟影响. 关于带有时滞的发展方程已有一些研究, 如文 [5]研究了一类外力项含有有界时滞和无界时滞遗传特征时的非自治非局部抛物方程. 文 [6]在时间依赖空间 $C_{\mathcal{H}_t(\Omega)}$ 上研究了一类包含遗传特征和非局部扩散的时滞非自治扩散方程解的渐近行为. 当非线性项满足任意阶 $p-1 (p \geqslant 2)$ 的多项式增长, 并且外力项 $h \in L^2_{loc}(R; H^{-1}(\Omega))$ 时, 作者研究了拉回吸引子的存在性和正则性.

对于不包含时滞的梁方程, 文 [7]作者在非线性项满足次临界增长条件下, 研究有限维全局吸引子和指数吸引子的存在性, 文 [8]得到了带有非局部弱阻尼扩展型梁方程在次临界条件下全局吸引子的存在性, 文 [9]研究了一类非局部扩展型梁方程有限维紧全局吸引子和指数吸引子的存在性, 文 [10]得出了当 $f(u)$ 增长指数满足: $1 \leqslant p < p_\theta = \frac{N+2(2\alpha-\theta)}{(N-4)^+}$ 时, 解的适定性,正则性和长时间行为表现出抛物线的性质.

据我们所知, 对于方程 (1.1)-(1.4), 当外力项带有时滞时, 时间依赖吸引子的存在性讨论较少. 与此同时, 方程中所包含的时滞和非线性项给解的耗散性估计, 有界吸收集的存在性以及解过程的渐近紧性验证带来了本质困难. 我们通过应用收缩函数, 能量估计和时间平移的方法, 以及时间依赖吸引子的相关理论, 克服了这些技术难题, 并且证明了当方程 (1.1)-(1.4) 非线性项的增长指数满足 $1 \leqslant p < p^* = \frac{N+2}{N-4}, N \geqslant 5$ 时, 时间依赖吸引子在时间依赖空间 $C_{\mathcal{H}}$ 的存在性.

本文内容和结构安排如下: 第二节我们将回顾预备知识和抽象结果; 第三节讨论弱解的适定性; 第四节将利用收缩函数方法得到时间依赖吸引子的存在性, 第五节总结与展望.

本篇论文中, 用符号 C 表示正常数, 下文中出现在不同式子中的每一个 C 表示的是对应的正常数, 我们也用 $\mathrm{C_i}, i \in \mathbb{N}$ 表示不同的正常数, $\mathrm{C}(\cdot,\cdot)$ 表示与括号中参数有关的参数.

2. 预备知识

记 $V_0 = L^2(\Omega)$, $D(A^{\frac{s}{4}}) = V_s$, $D(A^{-\frac{s}{4}}) = V_{-s}$.

设 $A = \Delta^2$. 显然 A 在定义域 $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ 中是自伴的, 在 $L^2(\Omega)$ 中是有界的.

在 $D(A^s)$ 中的内积和范数分别表示为: $\langle u, v\rangle_s = \langle A^{\frac{s}{4}}u,\ A^{\frac{s}{4}}v\rangle$, $\|u\|_s = \|A^{\frac{s}{4}}u\|$, $\forall\, u,\, v \in V_s$. 对于 $s \in \mathbb{R}$, 定义 Hilbert 空间族 $V_s = D(A^{\frac{s}{4}})$, 内积和范数分别表示为:

$$\langle u, v\rangle_s = \int_\Omega A^{\frac{s}{4}}u(x)A^{\frac{s}{4}}v(x)\mathrm{d}x, \quad \|u\|_s^2 = \int_\Omega |A^{\frac{s}{4}}u(x)|^2\mathrm{d}x, \quad \forall\, u,\, v \in V_s.$$

应用 Sobolev 嵌入定理, 当 $s_2 > s_1$ 时, 有紧嵌入和连续嵌入:

$$V_{s_2} \hookrightarrow\hookrightarrow V_{s_1}, \tag{2.1}$$

$$V_s \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2s}}, \quad s > 0. \tag{2.2}$$

故问题 (1.1)-(1.4) 可以写成算子形式:

$$\partial_t^2 u + Au + \gamma A^{\frac{1}{2}}\partial_t u + f(u) = g(x, u_\theta), \quad t \geqslant \tau, \tag{2.3}$$

$$u(\tau) = u_0, \quad \partial_t u(\tau) = u_1, \tag{2.4}$$

$$u_\theta(\tau) = \phi_0, \quad \partial_t u_\theta(\tau) = \phi_1, \quad \theta \in [-\rho, 0]. \tag{2.5}$$

定义 Hilbert 空间族: $\mathcal{H} = V_2 \times L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}_1 = V_3 \times V_1$, $C_{\mathcal{H}} = C_{V_2} \times C_{L^2(\Omega)}$, $C_{\mathcal{H}_1} = C_{V_3} \times C_{V_1}$.
其范数定义如下: $\|z\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u\|_2^2 + \|\partial_t u\|^2$, $\|z\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \|u\|_3^2 + \|\partial_t u\|_1^2$,
$\|z\|_{C_{\mathcal{H}}}^2 = \|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2 + \|\partial_t u_\theta\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2$, $\|z\|_{C_{\mathcal{H}_1}}^2 = \|u_\theta\|_{C_{V_3}}^2 + \|\partial_t u_\theta\|_{C_{V_1}}^2$.
下面的抽象结果将用于对解的渐近估计.

定义 2.1 [11,12] 设 X 是一族赋范空间, 称双参数算子族 $\{U(t,\tau) : X \to X\}$ 是一个过程, 如果

1) 对任意的 $\tau \in \mathbb{R}$, $U(\tau,\tau) = \mathrm{Id}$ 是 X 上的恒等算子;

2) 对任意的 $\sigma \in \mathbb{R}$ 和任意的 $t \geqslant \tau \geqslant \sigma$, $U(t,\tau)U(\tau,\sigma) = U(t,\sigma)$.

设 X 是一族赋范空间. 对每一个 $t \in \mathbb{R}$, 定义 X 的 R 球为 $\mathbb{B}(R) = \{z \in X \,|\, \|z\|_X \leqslant R\}$.

定义 2.2 [11,12] 如果存在常数 $R>0$, 使得 $C\subset\mathbb{B}(R)$, 则称集合 $C\subset X$ 的集合族 $\mathfrak{C}=\{C\}$ 是有界的.

定义 2.3 [12] 如果对任意的 $R_1>0$, 集合 $B\subset X$, 存在常数 $t_0=t_0(R)\leqslant t$, 使得 $\tau\leqslant t-t_0\Rightarrow U(t,\tau)\mathbb{B}(R)\subset\mathbb{B}(R_1)$, 则称一致有界集族 $\mathfrak{B}=\{\mathbb{B}(R_1)\}$ 是过程 $U(t,\tau)$ 的时间依赖吸收集.

如果过程拥有一个时间依赖吸收集, 那么称过程是耗散的.

引理 2.4 [13] 设 x_n 是一个有界序列并且 $\psi\in\mathrm{C}(\mathbb{R})$ 是一个单调函数, 则 $\psi(\liminf_{n\to\infty}x_n)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\psi(x_n)$.

引理 2.5 [14,15] 设 X,B 和 Y 为 Banach 空间, 对 $T>0$, 如果有 $\mathrm{X}\hookrightarrow\hookrightarrow\mathrm{B}\hookrightarrow\mathrm{Y}$,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{W}_1=\{u\in L^p([0,T];X)|u_t\in L^r([0,T];Y)\},\ \ 1\leqslant p<\infty,\\
&\mathrm{W}_2=\{u\in L^\infty([0,T];X)|u_t\in L^r([0,T];Y)\},\ \ r>1,
\end{aligned}
$$

则 $W_1\hookrightarrow\hookrightarrow L^p([0,T];B)$, $W_2\hookrightarrow\hookrightarrow C([0,T];B)$.

定理 2.6 [12] 如果过程 $U(t,\tau)$ 渐近紧, 即集合 $\mathbb{K}=\{\mathfrak{K}=\{K\}:K\subset X$ 为紧集, $\mathfrak{K}$ 吸引$\}$ 是非空紧的, 则时间依赖子 $\mathfrak{K}$ 存在且唯一.

定义 2.7 [16] 设 $\{X\}$ 是一族 Banach 空间, 且 $\mathfrak{C}=\{C\}$ 是 $\{X\}$ 的一族有界子集. 定义于 $X\times X$ 上的函数 $\varphi_\tau^t(\cdot,\cdot)$ 称为 $C\times C$ 上的收缩函数. 如果对任意固定的 $t\in\mathbb{R}$ 和任意的序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset C$, 存在一个子序列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty\subset\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 使得 $\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\varphi_\tau^t(x_{n_k},x_{n_l})=0,\ \ \forall\tau\leqslant t$, 我们用 $\mathfrak{C}(C)$ 表示 $C\times C$ 上收缩函数的集合.

定理 2.8 [16] 设 $U(\cdot,\cdot)$ 是 $\{X\}$ 上的过程, 并且有一个时间依赖吸收集 $\mathfrak{B}=\{\mathbb{B}(R_1)\}$. 如果对任意的 $\epsilon>0$, 存在一个子序列 $T(\epsilon)\leqslant t$, $\varphi_T^t\in\mathfrak{C}(\mathbb{B}(R))$, 使得 $\|U(t,T)x-U(t,T)y\|\leqslant\epsilon+\varphi_T^t(x,\ y)$, $\forall x,y\in\mathbb{B}(R)$, 对任意固定的 $t\in\mathbb{R}$, 则 $U(\cdot,\cdot)$ 是渐近紧的.

定理 2.9 [13,17] 设 $U(\cdot,\cdot)$ 为作用于 Banach 空间族 $\{X\}$ 的过程, 则 $U(\cdot,\cdot)$ 有时间依赖全局吸引子 $\mathfrak{A}=\{A\}$ 满足 $A=\bigcap\limits_{s\leqslant t}\overline{\bigcup\limits_{\tau\leqslant s}U(t,\tau)\mathbb{B}}$, 当且仅当
(i) $U(\cdot,\cdot)$ 存在时间依赖吸收集族 $\mathfrak{B}=\{\mathbb{B}(R_1)\}$; (ii) $U(\cdot,\cdot)$ 是渐近紧的.

定义 2.10 [13,18,19] 如果对所有的 $\tau\leqslant t$, 有 $U(t,\tau)A=A$, 则时间依赖吸引子 $\mathfrak{A}=\{A\}$ 是不变的.

3. 解的适定性

首先, 我们对问题 (2.3)-(2.5) 的解作出如下定义.

定义 3.1 对任意的 $\tau\in\mathbb{R},\tau\leqslant t$ 和任意 $\omega\in V_2$, $u_\theta=u(t+\theta)$, $\theta\in[-\rho,0]$, 如果
$u_\theta\in L^\infty([\tau+\rho,T];C_{V_2})\cap L^2([\tau+\rho,T];C_{V_3})$, $\quad\partial_tu_\theta\in L^\infty([\tau+\rho,T];C_{L^2(\Omega)})\cap L^2([\tau+\rho,T];C_{V_1})$,
并满足

$$
\begin{aligned}
&\langle\partial_t^2u(t),\omega\rangle+\langle Au,\omega\rangle+\gamma\langle A^{\frac12}\partial_tu,\omega\rangle+\langle f(u),\omega\rangle=\langle g(x,u_\theta),\omega\rangle,\ \ t\geqslant\tau,\\
&u(x,\tau)=u_0(x),\quad\partial_tu(x,\tau)=u_1(x),\\
&u_\theta(\tau)=\phi_0(x,\theta),\quad\partial_tu_\theta(\tau)=\phi_1(x,\theta),\ \ \theta\in[-\rho,0].
\end{aligned}
$$

则称二元组 $y=(u_\theta,\partial_t u_\theta)$ 是问题 (2.3)-(2.5) 在区间 $[\tau,T]$ 上的一个弱解.

定理 3.2 设 (1.5)-(1.6) 成立且 $g(u_\theta)\in L^2(\Omega)$, 则对每一个 $T>\tau$, $\theta\in[-\rho,0]$ 问题 (2.3)-(2.5) 的弱解 $(u_\theta,\partial_t u_\theta)\in L^\infty([\tau+\rho,T];C_{\mathcal{H}})\cap L^2([\tau+\rho,T];C_{\mathcal{H}_1})$, 并且 $\partial_t^2 u_\theta\in L^\infty([\tau+\rho,T];C_{L^2(\Omega)})\cap L^2([\tau+\rho,T];C_{L^2(\Omega)})$, 满足:

$$\|u_\theta(t)\|_{C_{V_2}}^2+\|\partial_t u_\theta(t)\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\int_{\tau+\rho}^{t}\left(\|\partial_t u_\theta(s)\|_{C_{V_1}}^2+\|u_\theta(s)\|_{C_{V_3}}^2\right)\mathrm{d}s$$
$$\leqslant C(R,T,\gamma,\beta_0,\mu_0,\lambda_1,\phi_0,\phi_1,C_g,C_{\beta_0},C_2),\ t\geqslant\tau. \tag{3.1}$$

此外, 弱解还满足下列性质:

(i) (耗散性) 存在一个正常数 R_0, 使得

$$\|(\phi_0,\phi_1)\|_{C_{\mathcal{H}}}\leqslant R_0,\ \ \forall\, t\geqslant t(R), \tag{3.2}$$

其中 $\tau\leqslant t-t(R)$ 和 $t(R)$ 是不依赖于 R 的常数.

(ii) (能量等式) 对每一个 $\tau\leqslant t,\theta\in[-\rho,0]$ 下列能量等式

$$E(u_\theta(t),\partial_t u_\theta(t))+2\gamma\int_{\tau}^{t+\theta}\|\partial_t u(r)\|_1^2\mathrm{d}r=2\int_{\tau}^{t+\theta}g(u_\theta)\partial_t u(r)\mathrm{d}r+E(\phi_0,\phi_1), \tag{3.3}$$

成立, 其中 $E(u_\theta,\partial_t u_\theta)=\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2+\|\partial_t u_\theta\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+2\langle F(u_\theta),1\rangle$.

(iii) (弱 Lipschitz 稳定性) 解 $(u_\theta,\partial_t u_\theta),(v_\theta,\partial_t v_\theta)$ 在空间 $C_{V_1}\times C_{V_{-1}}$ 上是 Lipschitz 连续的, 即

$$\|z_\theta(t)\|_{C_{V_1}}^2+\|\partial_t z_\theta(t)\|_{C_{V_{-1}}}^2$$
$$\leqslant\mu_4(\|z_\theta(\tau)\|_{C_{V_1}}^2+\|\partial_t z_\theta(\tau)\|_{C_{V_{-1}}}^2)+C(R,T,\delta,\gamma,\beta_0,\lambda_1,\phi_0,\phi_1,C_g,C_{\beta_0},C_2). \tag{3.4}$$

其中 $(z_\theta,\partial_t z_\theta)=u_\theta-v_\theta$, $(u_\theta,\partial_t u_\theta),(v_\theta,\partial_t v_\theta)$ 是问题 (2.3)-(2.5) 分别关于初值 $\phi_{i_0},\phi_{i_1}(i=1,2)$ 的弱解.

证明: (i) (弱解的存在性) 我们首先对问题 (2.3)-(2.5) 的解做一些先验估计. 用方程 (2.3) 与 $\partial_t u$ 在 L^2 中作内积, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[E(u(t),\partial_t u(t))]+2\gamma\|\partial_t u\|_1^2=2\langle g(x,u_\theta),\partial_t u\rangle,$$

其中

$$E(u(t),\partial_t u(t))=\|u\|_2^2+\|\partial_t u\|^2+2\langle F(u),1\rangle. \tag{3.5}$$

对上式在 $[s,t]$ 上积分并用 $t+\theta$ 替换 t, 可证得 (3.3) 成立.

由于

$$2|\langle g(x,u_\theta),\partial_t u\rangle|\leqslant 2\|g(x,u_\theta)\|\|\partial_t u\|\leqslant 2C_g\|u_\theta\|_{C_{V_2}}\|\partial_t u\|$$
$$\leqslant C_g^2\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2+\|\partial_t u\|^2. \tag{3.6}$$

则

$$E(u(t),\partial_t u(t))+2\gamma\int_\tau^t\|\partial_t u(s)\|_1^2\mathrm{d}s\leqslant E(u_0,u_1)+C_g^2\int_\tau^t\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2\mathrm{d}s+\int_\tau^t\|\partial_t u\|^2\mathrm{d}s. \tag{3.7}$$

在 (3.7) 式中, 用 $t+\theta$ 替换 t 可得

$$\begin{aligned}E(u_\theta,\partial_t u_\theta)+2\gamma\int_\tau^{t+\theta}\|\partial_t u\|_1^2\mathrm{d}s&\leqslant E(\phi_0,\phi_1)+C_g^2\int_\tau^{t+\theta}\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2\mathrm{d}s+\int_\tau^{t+\theta}\|\partial_t u\|^2\mathrm{d}s\\&\leqslant E(\phi_0,\phi_1)+C_g^2\int_\tau^{t}\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2\mathrm{d}s+\int_\tau^{t}\|\partial_t u_\theta\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 $E(u_\theta,\partial_t u_\theta)=\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2+\|\partial_t u_\theta\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+2\langle F(u_\theta),1\rangle$.
由注 (1.1) ,可知 $2\int_\Omega F(u_\theta)\mathrm{d}x\geqslant-(1-\beta_0)\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2-2C_{\beta_0}\geqslant(\beta_0-1)\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2-2C_{\beta_0}$.
由 (1.6) 和嵌入 $V_2\hookrightarrow\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, 可得

$$2\langle F(u),1\rangle\leqslant 2C_1(\|u\|^2+\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1})\leqslant C_2(\|u\|_2^2+\|u\|_2^{p+1}). \tag{3.9}$$

则 $E(\phi_0,\phi_1)=\|\phi_0\|_{C_{V_2}}^2+\|\phi_1\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+2\langle F(u_\theta(\tau),1\rangle\leqslant\|\phi_0\|_{C_{V_2}}^2+\|\phi_1\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+C_2\|\phi_0\|_{C_{V_2}}^2+C_2\|\phi_0\|_{C_{V_2}}^{p+1}$ $\leqslant\mu_0(\|\phi_0\|_{C_{V_2}}^{p+1}+\|\phi_1\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)$, 其中 $\mu_0=1+C_2$.
那么存在 $N_1=\max\{1,C_g^2+(1-\beta_0)\}$, 使得

$E(u_\theta,\partial_t u_\theta)\leqslant E(\phi_0,\phi_1)+N_1\int_\tau^t[\|\partial_t u_\theta\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2+2\langle F(u_\theta),1\rangle]\mathrm{d}s+2C_{\beta_0}$,

对上式应用 Gronwall 不等式, 可得

$$E(u_\theta,\partial_t u_\theta)\leqslant C(R,T,\beta_0,\mu_0,\lambda_1,\phi_0,\phi_1,C_g,C_{\beta_0}). \tag{3.10}$$

结合 (3.9) 和 (3.10), 存在 $\mu_1=\min\{1,\beta_0\}$, 使得

$$\mu_1(\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2+\|\partial_t u_\theta\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)-2C_{\beta_0}\leqslant E(u_\theta,\partial_t u_\theta)\leqslant C(R,T,\beta_0,\mu_0,\lambda_1,\phi_0,\phi_1,C_g,C_{\beta_0}). \tag{3.11}$$

结合 (3.8) 和 (3.10) 可得

$$\int_\tau^{t+\theta}\|\partial_t u\|_1^2\mathrm{d}s\leqslant C(R,T,\gamma,\beta_0,\mu_0,\lambda_1,\phi_0,\phi_1,C_g,C_{\beta_0}). \tag{3.12}$$

则

$$\int_{\tau+\rho}^{t}\|\partial_t u_\theta\|_{C_{V_1}}^2\mathrm{d}s\leqslant C(R,T,\gamma,\beta_0,\mu_0,\lambda_1,\phi_0,\phi_1,C_g,C_{\beta_0}). \tag{3.13}$$

用 $A^{\frac12}u$ 与 (2.3) 在 L^2 中作内积可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\partial_t u,A^{\frac12}u\rangle+\|u\|_3^2+\frac{\gamma}{2}\|u\|_2^2+\langle f(u),A^{\frac12}u\rangle=\langle g(x,u_\theta),A^{\frac12}u\rangle+\|\partial_t u\|_1^2. \tag{3.14}$$

DOI: 10.12677/pm.2025.1510257

进一步, 分别处理 (3.14) 的每一项:

$$
\begin{aligned}
&|\langle g(x,u_\theta),A^{\frac{1}{2}}u\rangle| \leqslant \|g(u_\theta)\|\|A^{\frac{1}{2}}u\| \leqslant \frac{\gamma}{2}\|u\|_2^2+\frac{1}{2}\gamma^{-1}C_g^2\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2,\\
&|\langle \partial_t u,A^{\frac{1}{2}}u\rangle| \leqslant \|\partial_t u\|\|u\|_2 \leqslant \frac{1}{4}\|u\|_2^2+\|\partial_t u\|^2,\\
&|\langle f(u),A^{\frac{1}{2}}u\rangle| \leqslant C_1\Big(\int_\Omega(|u|+|u|^p)^{\frac{2N}{N+2}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{N+2}{2N}}\Big(\int_\Omega|A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{2N}{N-2}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{N-2}{2N}}\\
&\qquad\qquad\qquad \leqslant C_1(\|u\|_2+\|u\|_2^p)\|u\|_3^2 \leqslant \frac{1}{2}\|u\|_3^2+C_2(\|u\|_2^2+\|u\|_2^{2p}),
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

其中使用了嵌入 $V_2 \hookrightarrow L^{\frac{2Np}{N+2}}$ 和 (1.6).

将上述估计代入 (3.14), 有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\partial_t u,A^{\frac{1}{2}}u\rangle+\frac{1}{2}\|u\|_3^2 \leqslant C_2(\|u\|_2^2+\|u\|_2^{2p})+\frac{1}{2}\gamma^{-1}C_g^2\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2+\|\partial_t u\|_1^2$.

在 $[\tau,t]$ 积分, 并用 $t+\theta$ 替换 t 可得,

$$
\begin{aligned}
\langle\partial_t u_\theta,A^{\frac{1}{2}}u_\theta\rangle+\frac{1}{2}\int_\tau^{t+\theta}\|u\|_3^2\mathrm{d}s \leqslant{}& C_2\int_\tau^{t+\theta}\|u\|_2^2\mathrm{d}s+C_2\int_\tau^{t+\theta}\|u\|_2^{2p}\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\gamma^{-1}C_g^2\int_\tau^{t+\theta}\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2\mathrm{d}s\\
&+\int_\tau^{t+\theta}\|\partial_t u\|_1^2\mathrm{d}s+\langle\partial_t u_\theta(\tau),A^{\frac{1}{2}}u_\theta(\tau)\rangle.
\end{aligned}
$$

又有 $|\langle\partial_t u_\theta(\tau),A^{\frac{1}{2}}u_\theta(\tau)\rangle| \leqslant \|\partial_t u_\theta(\tau)\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\frac{1}{4}\|u_\theta(\tau)\|_{C_{V_2}}^2=\frac{1}{4}\|\phi_0\|_{C_{V_2}}^2+\|\phi_1\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2$.

则 $\langle\partial_t u_\theta,A^{\frac{1}{2}}u_\theta\rangle+\frac{1}{2}\int_\tau^{t+\theta}\|u\|_3^2\mathrm{d}s \leqslant C_2\int_\tau^t\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2\mathrm{d}s+C_2\int_\tau^t\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^{2p}\mathrm{d}s+\int_\tau^t\|\partial_t u_\theta\|_{C_{V_1}}^2\mathrm{d}s$
$+\frac{1}{2}\gamma^{-1}C_g^2\int_\tau^t\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2\mathrm{d}s+\frac{1}{4}\|\phi_0\|_{C_{V_2}}^2+\|\phi_1\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2$.
故

$$
\int_{\tau+\rho}^t\|u_\theta(s)\|_{C_{V_3}}^2\mathrm{d}s \leqslant C(R,T,\beta_0,\mu_0,\gamma,\lambda_1,\phi_0,\phi_1,C_g,C_{\beta_0},C_2).
\tag{3.16}
$$

由方程 (2.3), 估计式(3.15)和嵌入关系 $L^{1+\frac{1}{p}}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow V_{-2}$, $L^{\frac{2N}{N+2}}\hookrightarrow\hookrightarrow V_{-1}$ 可得

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t^2u_\theta(t)\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 &\leqslant \|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2+\gamma^2\|\partial_t u_\theta\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\|f(u_\theta)\|_{C_{V_{-2}}}^2+C_g^2\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2\\
&\leqslant \|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2+\gamma^2\|\partial_t u_\theta\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\|f(u_\theta)\|_{C_{L^{1+\frac{1}{p}}}}^2+C_g^2\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2\\
&\leqslant \|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2+\gamma^2\|\partial_t u_\theta\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^{2p}+C_g^2\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2\\
&\leqslant C(R,T,\beta_0,\gamma,\mu_0,\lambda_1,\phi_0,\phi_1,C_g,C_{\beta_0}),
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\|f(u_\theta)\|_{C_{V_{-1}}}^2 &\leqslant C\|u_\theta\|_{C_{L^{\frac{2N}{N+2}}}}^2+\|u_\theta\|_{C_{L^{\frac{2Np}{N+2}}}}^{2p})\\
&\leqslant C(\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2+\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^{2p})\\
&\leqslant C(R,T,\beta_0,\mu_0,\lambda_1,\phi_0,\phi_1,C_g,C_{\beta_0}),
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

因此 $\partial_t^2u_\theta\in L^\infty([\tau+\rho,T],C_{L^2(\Omega)})$, $f(u_\theta)\in L^2([\tau+\rho,T],C_{V_{-1}})$.

由方程 (2.3), 估计式 (3.17) 和嵌入关系 $V_2 \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\frac{2N}{N+2}} \hookrightarrow\hookrightarrow V_{-1}$ 可得

$$\begin{aligned}\|\partial_t^2 u_\theta(t)\|^2_{C_{L^2(\Omega)}} &\leqslant \|u_\theta\|^2_{C_{V_3}} + \gamma^2\|\partial_t u_\theta\|^2_{C_{V_1}} + \|f(u_\theta)\|^2_{C_{V_{-1}}} + C_g^2\|u_\theta\|^2_{C_{V_2}} \\ &\leqslant \|u_\theta\|^2_{C_{V_3}} + \gamma^2\|\partial_t u_\theta\|^2_{C_{V_1}} + \|u_\theta\|^2_{C_{V_2}} + \|u_\theta\|^{2p}_{C_{V_2}} + C_g^2\|u_\theta\|^2_{C_{V_2}} \\ &\leqslant C_g^2\|u_\theta\|^{2p}_{C_{V_2}} + \|u_\theta\|^2_{C_{V_3}} + \gamma^2\|\partial_t u_\theta\|^2_{C_{V_1}},\end{aligned} \tag{3.19}$$

因此 $\partial_t^2 u_\theta \in L^2([\tau+\rho, T], C_{L^2(\Omega)})$.

由 (3.5), (3.8), (3.9), (3.10), (3.13) 和 (3.16), 可得 (3.1) 成立.

接下来, 我们证明问题 (2.3)-(2.5) 的解在空间 $C([\tau+\rho,T];C_{\mathcal{H}}) \cap L^2([\tau+\rho,T];C_{\mathcal{H}_1})$ 上的存在性. 设 $y_\theta^n = (u_\theta^n, \partial_t u_\theta^n)$ 是问题 (2.3)-(2.5) 的解. 易知估计 (3.1) 对 Galerkin 逼近序列 $\{y_\theta^n\}$ 成立. 因此, 存在 $(u_\theta, \partial_t u_\theta) \in L^\infty([\tau+\rho,T];C_{\mathcal{H}}) \cap L^2([\tau+\rho,T];C_{\mathcal{H}_1}), \partial_t^2 u_\theta \in L^\infty([\tau+\rho,T];C_{L^2(\Omega)}) \cap L^2([\tau+\rho,T];C_{L^2(\Omega)})$, 使得

$$\begin{aligned}&(u_\theta^n, \partial_t u_\theta^n) \text{ 在 } L^\infty([\tau+\rho,T];C_{V_2}\times C_{L^2(\Omega)}) \text{ 中弱*收敛于 } (u_\theta, \partial_t u_\theta),\\ &(u_\theta^n, \partial_t u_\theta^n) \text{ 在 } L^2([\tau+\rho,T];C_{V_3}\times C_{V_1}) \text{ 中弱收敛于 } (u_\theta, \partial_t u_\theta),\\ &\partial_t^2 u_\theta^n \text{ 在 } L^\infty([\tau+\rho,T];C_{L^2(\Omega)}) \text{ 中弱*收敛于 } \partial_t^2 u_\theta,\\ &\partial_t^2 u_\theta^n \text{ 在 } L^2([\tau+\rho,T];C_{L^2(\Omega)}) \text{ 中弱收敛于 } \partial_t^2 u_\theta.\end{aligned}$$

应用引理 2.6, 可得

$$\text{当 } \eta\colon 0<\eta\ll 1 \text{ 时}, (u_\theta^n, \partial_t u_\theta^n) \text{ 在 } C([\tau+\rho,T];C_{V_{2-\eta}}\times C_{V_{-\eta}}) \text{ 中收敛于 } (u_\theta, \partial_t u_\theta), \tag{3.20}$$

$$u_\theta^n \text{ 在 } L^2([\tau+\rho,T];C_{V_2}) \text{ 中收敛于 } u_\theta, \text{ 且 } u_\theta^n(x,t) \text{ 在 } \Omega\times[\tau+\rho,T] \text{中几乎处处收敛于 } u_\theta(x,t), \tag{3.21}$$

$$\partial_t u_\theta^n \text{ 在 } L^2([\tau,T];C_{L^2(\Omega)}) \text{ 中收敛于 } \partial_t u_\theta, \tag{3.22}$$

$$f(u_\theta^n) \text{ 在 } L^{1+\frac{1}{p}}([\tau+\rho,T];C_{L^{1+\frac{1}{p}}(\Omega)}) \text{ 中收敛于 } f(u_\theta), \tag{3.23}$$

对任意的 $\xi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$\int_\tau^T \langle Au_\theta^n - Au_\theta, \xi_1\rangle \mathrm{d}t \leqslant \int_\tau^T \|A^{\frac12}(u_\theta^n(t)-u_\theta(t))\|\|A^{\frac12}\xi_1\|\mathrm{d}t \leqslant \int_\tau^T \|(u_\theta^n(t)-u_\theta(t))\|_{C_{V_2}}\|\xi_1\|_2\mathrm{d}t \to 0.$$

此外, 对任意的 $\xi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, 可得

$$\begin{aligned}\int_\tau^T \langle f(u_\theta^n) - f(u_\theta), \xi_1\rangle \mathrm{d}t &\leqslant C_2 \int_\tau^T (1+\|u_\theta^n\|_2^{p-1} + \|u_\theta\|_2^{p-1})\|u_\theta^n - u_\theta\|_2\|\xi_1\|_2 \mathrm{d}t \\ &\leqslant C(R,T,\beta_0,\lambda_1,\phi_0,\phi_1,N_1,C_g,C_{\beta_0})\|u_\theta^n - u_\theta\|_{L^2([\tau+\rho,T],C_{V_2})} \to 0.\end{aligned}$$

最后, 对任意的 $\xi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, 可得

$$\int_\tau^T \langle g(u_\theta^n) - g(u_\theta), \xi_1\rangle \mathrm{d}t \leqslant C_g \int_\tau^T \|u_\theta^n - u_\theta\|_{C_{V_2}}\|\xi_1\|\mathrm{d}t \leqslant C_g\|u_\theta^n - u_\theta\|_{L^2([\tau+\rho,T],C_{V_2})} \to 0.$$

综上所述, 可得 $y=(u_\theta, \partial_t u_\theta)$ 是问题 (2.3)-(2,5) 满足 (3.1) 的解.

进一步, 证明问题 (2.3)-(2,5) 的解 $y=(u_\theta,\partial_t u_\theta)\in C([\tau+\rho,T];C_{\mathcal{H}})$.

根据 $(u_\theta(t),\partial_t u_\theta(t))\in C([\tau+\rho,T];C_{V_{2-\eta}}\times C_{V_{-\eta}})\cap L^\infty([\tau+\rho,T];C_{\mathcal{H}})$, 有

$$(u_\theta,\partial_t u_\theta)\in C_w([\tau+\rho,T];C_{\mathcal{H}}),\ \|(u_\theta,\partial_t u_\theta)\|_{C_{\mathcal{H}}}\leqslant\liminf_{s\to t}\|(u_\theta(s),\partial_t u_\theta(s))\|_{C_{\mathcal{H}}}.$$

对任意的 $t\in[\tau,T]$, 根据 (3.3), 可知

$$\lim_{s\to t}E(u_\theta(s),\partial_t u_\theta(s))=E(u_\theta(t),\partial_t u_\theta(t)).\tag{3.24}$$

由 (3.21), 可得当 $s\to t$ 时, $u(x,s)\to u(x,t)$ a.e. $x\in\Omega$, 应用引理 2.4, 注 1.1 和 Fatou 引理, 有

$$\lim_{s\to t}2\langle g(u_\theta),u(s)\rangle=2\langle g(u_\theta),u(t)\rangle,\ \|(u_\theta(t),\partial_t u_\theta(t))\|^2_{C_{\mathcal{H}}}\leqslant\liminf_{s\to t}(\|(u_\theta(s),\partial_t u_\theta(s))\|^2_{C_{\mathcal{H}}}),$$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(2F(u_\theta(t))+(1-\beta_0)\lambda_1|u_\theta(t)|^2+C(\beta_0))\mathrm{d}x\\&\leqslant\liminf_{s\to t}\int_\Omega(2F(u_\theta(s))+(1-\beta_0)\lambda_1|u_\theta(s)|^2+C(\beta_0))\mathrm{d}x\\&\leqslant\liminf_{s\to t}\int_\Omega 2F(u_\theta(s))\mathrm{d}x+(1-\beta_0)\lambda_1\|u_\theta\|^2+C(\beta_0)|\Omega|,\end{aligned}$$

即

$$\int_\Omega 2F(u_\theta(t))\mathrm{d}x\leqslant\liminf_{s\to t}\int_\Omega 2F(u_\theta(s))\mathrm{d}x.$$

由上述估计和 (3.22), 有

$$\begin{aligned}&\limsup_{s\to t}\|\partial_t u_\theta(s)\|^2_{C_{L_2}}+\liminf_{s\to t}\|u_\theta(s)\|^2_{C_{V_2}}+2\langle F(u_\theta(s),1\rangle\\&\leqslant\lim_{s\to t}[\|\partial_t u_\theta(s)\|^2_{C_{L_2}}+\|u_\theta(s)\|^2_{C_{V_2}}]+2\langle F(u_\theta(s)),1\rangle\\&=\|\partial_t u_\theta(t)\|^2_{C_{L_2}}+\|u_\theta(t)\|^2_{C_{V_2}}+2\langle F(u_\theta(t)),1\rangle\\&\leqslant\liminf_{s\to t}\|\partial_t u_\theta(s)\|^2_{C_{L_2}}+\liminf_{s\to t}\|u_\theta(s)\|^2_{C_{V_2}}+2\langle F(u_\theta(s)),1\rangle,\end{aligned}$$

因此

$$\|\partial_t u_\theta(t)\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}=\lim_{s\to t}\|\partial_t u_\theta(s)\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}.$$

同理可得

$$\|u_\theta(t)\|^2_{C_{V_2}}=\lim_{s\to t}\|u_\theta(s)\|^2_{C_{V_2}}.\tag{3.25}$$

根据空间 $C_{\mathcal{H}}$ 的一致连续性, 结合 (3.24), (3.25) 和 $(u_t,\partial_t u_t)\in C_w([\tau+\rho,T];C_{\mathcal{H}})$, 可得 $(u_t,\partial_t u_t)\in C([\tau+\rho,T];C_{\mathcal{H}})$.

(ii) (Lipschitz 连续性)令 u , v 是问题 (2.3)-(2.5) 满足 $(u_0,u_1),(v_0,v_1)\in\mathcal{H}$ 的解, 则 $z=u-v$,

满足

$$\partial_t^2 z(t) + Az + \gamma A^{\frac{1}{2}}\partial_t z + f(u) - f(v) = g(u_\theta) - g(v_\theta),\ t \in [\tau, \infty), \tag{3.26}$$

$$z(\tau) = u_0 - v_0 = z_0,\ \partial_t z(\tau) = u_1 - v_1 = z_1, \tag{3.27}$$

$$z_\theta(\tau) = u_\theta(\tau) - v_\theta(\tau),\ \partial_t z_\theta(\tau) = \partial_t u_\theta(\tau) - \partial_t v_\theta(\tau). \tag{3.28}$$

在下面的估计中, 我们选择 δ 为任意小的正常数.

用 $2A^{-\frac{1}{2}}\partial_t z + 2\delta A^{-\frac{1}{2}} z$ 与方程 (3.26) 作内积得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K(z, \partial_t z) + H(z, \partial_t z) = \Sigma_{i=1}^2 \Gamma_i + 2\delta \|\partial_t z\|_{-1}^2, \tag{3.29}$$

其中 $K(z, \partial_t z) = 2\delta\langle \partial_t z, A^{-\frac{1}{2}} z\rangle + \|\partial_t z\|_{-1}^2 + \|z\|_1^2 + 2\delta\gamma\|z\|^2, H(z, \partial_t z) = 2\delta\|z\|_1^2 + 2\gamma\|\partial_t z\|^2,\ \Gamma_1 = -2\langle f(u) - f(v), A^{-\frac{1}{2}}\partial_t z + \delta A^{-\frac{1}{2}} z\rangle, \Gamma_2 = 2\langle g(u_\theta) - g(v_\theta), A^{-\frac{1}{2}}\partial_t z + \delta A^{-\frac{1}{2}} z\rangle$.
由于 $|2\delta\langle \partial_t z, A^{-\frac{1}{2}} z\rangle| \leqslant 2\delta\|z\|_1\|\partial_t z\|_{-3} \leqslant 2\delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|z\|_1\|\partial_t z\|_{-1} \leqslant \delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|z\|_1^2 + \delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|\partial_t z\|_{-1}^2$.
存在常数 $\mu_3,\ \mu_4$, 有

$$\mu_3(\|z(t)\|_1^2 + \|\partial_t z(t)\|_{-1}^2) \leqslant K(z, \partial_t z) \leqslant \mu_4(\|z(t)\|_1^2 + \|\partial_t z(t)\|_{-1}^2), \tag{3.30}$$

其中 $\mu_3 = 1 - \delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}},\ \mu_4 = 1 + \delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}} + 2\delta\gamma\lambda_1^{-\frac{1}{2}}$.
由插值定理, 可得

$$\begin{aligned}
|\Gamma_1| &\leqslant 2\int_\Omega |f(u) - f(v)| \cdot |A^{-\frac{1}{2}}\partial_t z + \delta A^{-\frac{1}{2}} z| \mathrm{d}x \\
&\leqslant 2C_1\Big(\int_\Omega (1 + |u|^{p-1} + |v|^{p-1})^{\frac{N}{2-2\varepsilon}} \mathrm{d}x\Big)^{\frac{2-2\varepsilon}{N}} \cdot \Big(\int_\Omega |z|^{\frac{2N}{N-2(1-\varepsilon)}} \mathrm{d}x\Big)^{\frac{N-2(1-\varepsilon)}{2N}} \\
&\quad \cdot \Big(\int_\Omega |A^{-\frac{1}{2}}\partial_t z + \delta A^{-\frac{1}{2}} z|^{\frac{2N}{N-2(1-\varepsilon)}} \mathrm{d}x\Big)^{\frac{N-2(1-\varepsilon)}{2N}} \\
&\leqslant 2C_1(1 + \|u\|_2^{p-1} + \|v\|_2^{p-1})\|z\|_{1-\varepsilon}(\|A^{-\frac{1}{2}}\partial_t z\|_{1-\varepsilon} + \delta\|A^{-\frac{1}{2}} z\|_{1-\varepsilon}) \\
&\leqslant \delta\|z\|_1^2 + \gamma\|\partial_t z\|^2 + \delta\lambda_1^{-(1+\varepsilon)} C_2(1 + \|u\|_2^{2(p-1)} + \|v\|_2^{2(p-1)})\|z\|_2^2 \\
&\quad + \gamma^{-1}\lambda_1^{-\frac{1+2\varepsilon}{2}} C_2(1 + \|u\|_2^{2(p-1)} + \|v\|_2^{2(p-1)})\|z\|_2^2,
\end{aligned}$$

其中我们用到 Sobolev 嵌入: $0 < \varepsilon \ll 1,\ V_{1-\varepsilon} \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
|\Gamma_2| &\leqslant 2\|g(u_\theta) - g(v_\theta)\|\|A^{-\frac{1}{2}}\partial_t z\| + 2\delta\|g(u_\theta) - g(v_\theta)\|\|A^{-\frac{1}{2}} z\| \\
&\leqslant C_g^2\|u_\theta - v_\theta\|_{C_{V_2}}^2 + \|\partial_t z\|_{-2}^2 + \delta^2 C_g^2\|u_\theta - v_\theta\|_{C_{V_2}}^2 + \|z\|_{-2}^2 \\
&\leqslant \delta\|z\|_1^2 + \gamma\|\partial_t z\|^2 + (\gamma^{-1}\lambda_1^{-1} C_g^2 + \delta\lambda^{-\frac{3}{2}} C_g^2)\|u_\theta - v_\theta\|_{C_{V_2}}^2.
\end{aligned}$$

将以上估计代入 (3.29) 式, 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K(z(t), \partial_t z(t)) &\leqslant \delta\lambda_1^{-(1+\varepsilon)} C_2(1 + \|u\|_2^{2(p-1)} + \|v\|_2^{2(p-1)})\|z\|_2^2 + \gamma^{-1}\lambda_1^{-\frac{1+2\varepsilon}{2}} C_2(1 + \|u\|_2^{2(p-1)} \\
&\quad + \|v\|_2^{2(p-1)})\|z\|_2^2 + (\gamma^{-1}\lambda_1^{-1} C_g^2 + \delta\lambda^{-\frac{3}{2}} C_g^2)\|u_\theta - v_\theta\|_{C_{V_2}}^2 + 2\delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|\partial_t z\|^2.
\end{aligned}$$

上式在 $[\tau,t]$ 上积分,并用 $t+\theta$ 替换 t 可得

$$\begin{aligned}K(z_\theta(t),\partial_t z_\theta(t)) &\leqslant K(z_\theta(\tau),\partial_t z_\theta(\tau))+\delta\lambda_1^{-(1+\varepsilon)}C_2\int_\tau^t(1+\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^{2(p-1)}+\|v_\theta\|_{C_{V_2}}^{2(p-1)})\|z_\theta\|_{C_{V_2}}^2\mathrm{d}s\\&\quad+\gamma^{-1}\lambda_1^{-\frac{1+2\varepsilon}{2}}C_2\int_\tau^t(1+\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^{2(p-1)}+\|v_\theta\|_{C_{V_2}}^{2(p-1)})\|z_\theta\|_{C_{V_2}}^2\mathrm{d}s\\&\quad+(\gamma^{-1}\lambda_1^{-1}C_g^2+\delta\lambda^{-\frac{3}{2}}C_g^2)\int_\tau^t\|u_\theta-v_\theta\|_{C_{V_2}}^2\mathrm{d}s+2\delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\int_\tau^t\|\partial_t z_\theta\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2\mathrm{d}s\\&\leqslant K(z_\theta(\tau),\partial_t z_\theta(\tau))+C(R,T,\delta,\gamma,\lambda_1,\beta_0,\phi_0,\phi_1,C_g,C_{\beta_0},C_2).\end{aligned}\tag{3.31}$$

则 (3.4) 式成立.

(iii) (耗散性)用 $2\partial_t u+2\delta u$ 与方程 (2.3) 作内积可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_1(u,\partial_t u)+2\delta\|u\|_2^2+2\gamma\|\partial_t u\|_1^2+2\delta\langle f(u),u\rangle-2\delta\|\partial_t u\|^2=2\langle g(u_\theta),2\partial_t u+2\delta u\rangle,\tag{3.32}$$

其中 $K_1(u,\partial_t u)=\|u\|_2^2+\|\partial_t u\|^2+2\delta\langle\partial_t u,u\rangle+\delta\gamma\|u\|_1^2+2\langle F(u),1\rangle$.
此外, 由 $|2\delta\langle u,\partial_t u\rangle|\leqslant\delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|u\|_2^2+\delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|\partial_t u\|^2$ 和 (3.1), 可知存在常数 μ_5, μ_6, 有

$$\mu_5\|(u,\partial_t u)\|_{\mathcal{H}}^2-2C_{\beta_0}\leqslant K_1(u,\partial_t u)\leqslant\mu_6\|(u,\partial_t u)\|_{\mathcal{H}}^2,\tag{3.33}$$

其中 $\mu_5=\min\{1+\delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}},\beta_0+\delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\}$, $\mu_6=\max\{1+2\delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}}+C_2,1+\delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}},C_2\}$.
由 (3.1) 和 (3.9), 可得 $2\langle F(u),1\rangle\leqslant 2C_1(\|u\|^2+\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1})\leqslant C_2(\|u\|_2^2+\|u\|_2^{p+1})$.
由注 (1.1), 可知 $2\delta\langle f(u),u\rangle\geqslant 2\delta(\beta_0-1)\|u\|_2^2-2\delta C_{\beta_0}$.
又有

$$\begin{aligned}|\langle g(x,u_\theta),2\partial_t u+2\delta u\rangle| &\leqslant 2\|g(u_\theta)\|\|\partial_t u\|+2\delta\|g(u_\theta)\|\|u\|\\&\leqslant\delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}}C_g^2\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2+\|\partial_t u\|^2+C_g^2\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2+\delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|u\|_2^2.\end{aligned}$$

将上述估计代入 (3.32), 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_1(u,\partial_t u)+2\delta\|u\|_2^2+2\gamma\|\partial_t u\|_1^2\\&\leqslant(C_g^2+\delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}}C_g^2)\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2+\delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|u\|_2^2+(1+2\delta)\|\partial_t u\|^2+2\delta C_{\beta_0},\end{aligned}\tag{3.34}$$

从 $[\tau,t]$ 积分, 并用 $t+\theta$ 替换 t 可得

$$\begin{aligned}K_1(u_\theta,\partial_t u_\theta)+2\delta\int_\tau^t\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2\mathrm{d}s+2\gamma\int_\tau^t\|\partial_t u_\theta\|_{C_{V_1}}^2\mathrm{d}s &\leqslant K_1(\phi_0,\phi_1)+\delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\int_\tau^t\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2\mathrm{d}s\\&\quad+(C_g^2+\delta\lambda_1^{-\frac{1}{2}}C_g^2)\int_\tau^t\|u_\theta\|_{C_{V_2}}^2\mathrm{d}s+(1+2\delta)\int_\tau^t\|\partial_t u_\theta\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2\mathrm{d}s+2\delta C_{\beta_0}(t-\tau)\\&\leqslant C(R,T,\delta,\gamma,\lambda_1,\beta_0,\phi_0,\phi_1,C_g,C_{\beta_0},C_2).\end{aligned}\tag{3.35}$$

则根据 (3.33) 和 (3.35), 可证得问题 (2.3)-(2.5) 解的耗散性.

根据定理 3.2, 可以定义问题 (2.3)-(2.5) 的过程 $U(t,\tau)$ 如下: $z_\theta(t)=U(t,\tau)z_\theta(\tau):C_{\mathcal{H}}\to C_{\mathcal{H}}$.

4. 时间依赖吸引子的存在性

时间依赖吸收集

根据定理 3.2, 可得到如下结果.

定理 4.1 设定理 3.2 的条件成立, 如果对任意的初值 $(u_0,u_1),(v_0,v_1)\in\{\mathbb{B}(R)\}\subset\mathcal{H}$, 那么存在 $R_1>0$, 使得对应于问题 (2.4)-(2.7) 的过程 $U(t,\tau)$ 拥有时间依赖吸收集, 即集族 $\mathfrak{B}=\{\mathbb{B}(R_1)\}$.
下面对问题 (2.3)-(2.5) 的解过程 $U(t,\tau)$ 进行紧性验证. 为此, 做如下先验估计.

设 u,v 是问题 (2.3), (2.5) 分别关于初值 $(u_0,u_1),(v_0,v_1)\in\{\mathbb{B}(R)\}$ 的解. 两解之差 $z=u-v$ 满足以下方程

$$\partial_t^2 z(t)+Az+\gamma A^{\frac{1}{2}}\partial_t z+f(u)-f(v)=g(x,u_\theta)-g(x,v_\theta),\ \ t\in[\tau,\infty), \tag{4.1}$$

$$z(\tau)=u_0-v_0=z_0,\ \partial_t z(\tau)=u_1-v_1=z_1, \tag{4.2}$$

$$z_\tau=u_\tau-v_\tau,\ \ \partial_t z_\tau=\partial_t u_\tau-\partial_t v_\tau. \tag{4.3}$$

我们将分为以下四步进行先验估计.

第一步 将(4.1) 式乘以 $2\partial_t z$, 并在 $[s,t]\times\Omega$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}&H(t)-H(s)+2\gamma\int_s^t\int_\Omega|A^{\frac{1}{4}}\partial_t z(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r+2\int_s^t\int_\Omega(f(u)-f(v))\partial_t z(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\&=2\int_s^t\int_\Omega(g(x,u_\theta)-g(x,v_\theta))\partial_t z(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

其中 $H(t)=\|\partial_t z(t)\|^2+\|z(t)\|_2^2$, 并且 $T\leqslant s\leqslant t$.

由于 $2\int_s^t\int_\Omega(g(x,u_\theta)-g(x,v_\theta))\partial_t z(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\leqslant 2C_g\int_{s-\rho}^t\|u_\theta-v_\theta\|_{C_{V_2}}^2\int_\Omega\partial_t z(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r$,

则有

$$\begin{aligned}&H(t)-H(s)+2\gamma\int_s^t\int_\Omega|A^{\frac{1}{4}}\partial_t z(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r+2\int_s^t\int_\Omega(f(u)-f(v))\partial_t z(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\&\leqslant 2C_g\int_{s-\rho}^t\|u_\theta-v_\theta\|_{C_{V_2}}^2\int_\Omega\partial_t z(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{4.4}$$

第二步 将 (4.1) 式乘以 z, 并且在 $[T,t]\times\Omega$ 上积分, 得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\partial_t z(t)z(t)\mathrm{d}x+\frac{\gamma}{2}\|z(t)\|_1^2+\int_T^t\int_\Omega(f(u)-f(v))z(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r+\int_T^t\|z\|_2^2\mathrm{d}r-\int_T^t\|\partial_t z(r)\|^2\mathrm{d}r\\&=\int_T^t\int_\Omega(g(x,u_\theta)-g(x,v_\theta))z(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r+\int_\Omega\partial_t z(T)z(T)\mathrm{d}x+\frac{\gamma}{2}\|z(T)\|_1^2\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.5}$$

DOI: 10.12677/pm.2025.1510257

根据 (4.4), (4.5), 用 $t+\theta$ 替换 t 可得

$$\int_T^{t+\theta} H(r)\mathrm{d}r = \int_T^{t+\theta} (\|\partial_t z(r)\|^2 + \|z(r)\|_2^2)\mathrm{d}r$$

$$\leqslant C_g \int_{T-\rho}^{t+\theta} \|u_\theta - v_\theta\|_{C_{V_2}}^2 \int_\Omega z(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r + \int_\Omega \partial_t z(T) z(T)\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\|z(T)\|_1^2\mathrm{d}x - \frac{\gamma}{2}\|z_\theta(t)\|_{C_{V_1}}^2$$

$$- \int_\Omega \partial_t z_\theta(t) z_\theta(t)\mathrm{d}x + 2\int_T^{t+\theta} \|\partial_t z(r)\|^2\mathrm{d}r - \int_T^{t+\theta}\int_\Omega (f(u)-f(v))z(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r$$

$$\leqslant C_g \int_{T-\rho}^{t} \|u_\theta - v_\theta\|_{C_{V_2}}^2 \int_\Omega z_\theta(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r + \int_\Omega \partial_t z(T) z(T)\mathrm{d}x - \frac{\gamma}{2}\|z_\theta(t)\|_{C_{V_1}}^2 - \int_\Omega \partial_t z_\theta(t) z_\theta(t)\mathrm{d}x$$

$$- \int_{T+\rho}^{t}\int_\Omega (f(u_\theta)-f(v_\theta))z_\theta(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r + \frac{\gamma}{2}\|z(T)\|_1^2\mathrm{d}x + 2\int_{T+\rho}^{t} \|\partial_t z_\theta(r)\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2\mathrm{d}r$$

$$\leqslant C_g \int_{T-\rho}^{t} \|u_\theta - v_\theta\|_{C_{V_2}}^2 \int_\Omega z_\theta(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r + \int_\Omega \partial_t z(T) z(T)\mathrm{d}x - \frac{\gamma}{2}\|z_\theta(t)\|_{C_{V_1}}^2 - \int_\Omega \partial_t z_\theta(t) z_\theta(t)\mathrm{d}x$$

$$- \int_{T+\rho}^{t}\int_\Omega (f(u_\theta)-f(v_\theta))z_\theta(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r + \frac{\gamma}{2}\|z(T)\|_1^2\mathrm{d}x + 2\int_{T}^{t} \|\partial_t z_\theta(r)\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2\mathrm{d}r. \tag{4.6}$$

第三步 对 (4.4) 在 $[T,t]$ 上关于 s 积分, 用 $t+\theta$ 替换 t 可得

$$H_\theta(t)(t+\theta-T) \leqslant \int_T^{t+\theta} H(s)\mathrm{d}s - 2\int_T^{t+\theta}\int_s^{t+\theta}\int_\Omega (f(u)-f(v))\partial_t z(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

$$+ 2C_g \int_T^{t+\theta}\int_{s-\rho}^{t+\theta} \|u_\theta - v_\theta\|_{C_{V_2}}^2 \int_\Omega \partial_t z(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

$$\leqslant C_g \int_{T-\rho}^{t} \|u_\theta - v_\theta\|_{C_{V_2}}^2 \int_\Omega z_\theta(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r + \int_\Omega \partial_t z(T) z(T)\mathrm{d}x - \int_{T+\rho}^{t}\int_\Omega (f(u_\theta)-f(v_\theta))z_\theta(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r$$

$$- \int_\Omega \partial_t z_\theta(t) z_\theta(t)\mathrm{d}x + 2\int_T^t \|\partial_t z_\theta(r)\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2\mathrm{d}r + \frac{\gamma}{2}\|z(T)\|_1^2\mathrm{d}x$$

$$- 2\int_{T+\rho}^{t}\int_{s+\rho}^{t}\int_\Omega (f(u_\theta)-f(v_\theta))\partial_t z_\theta\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s + 2C_g\int_T^t\int_{s-\rho}^{t} \|u_\theta - v_\theta\|_{C_{V_2}}^2 \int_\Omega \partial_t z_\theta\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s.$$

第四步 记

$$C(M) = \frac{\gamma}{2}\|z(T)\|_1^2 + \int_\Omega \partial_t z(T) z(T)\mathrm{d}x, \tag{4.7}$$

并且

$$\varphi_T^t((u_\theta(T), \partial_t u_\theta(T)), (v_\theta(T), \partial_t v_\theta(T))) = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3, \tag{4.8}$$

$$\Psi_1 = \frac{1}{(t+\theta-T)}\big[2\int_T^t \|\partial_t z_\theta\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\mathrm{d}r - \int_\Omega \partial_t z_\theta(t) z_\theta(t)\mathrm{d}x\big],$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{(t+\theta-T)}\big[\int_{T+\rho}^t\int_\Omega (f(u_\theta)-f(v_\theta))z_\theta(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r + 2\int_{T+\rho}^t\int_{s+\rho}^t\int_\Omega (f(u_\theta)-f(v_\theta))\partial_t z_\theta \mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s\big],$$

$$\Psi_3 = \frac{1}{(t+\theta-T)}\big[C_g\int_{T-\rho}^t \|u_\theta - v_\theta\|^2_{C_{V_2}}\int_\Omega z(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + 2C_g\int_T^t\int_{s-\rho}^t \|u_\theta - v_\theta\|^2_{C_{V_2}}\int_\Omega \partial_t z(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s\big].$$

因此

$$H_\theta(t) \leqslant \frac{1}{t+\theta-T}C_M + \varphi_T^t((u_\theta(T),\partial_t u_\theta(T)),(v_\theta(T),\partial_t v_\theta(T))). \tag{4.9}$$

下面我们将利用收缩函数方法证明问题 (2.3)-(2.5) 解过程的渐近紧性.

定理 4.2 设 (1.5)-(1.6) 成立且 $g \in L^2(\Omega)$. 对于任意固定的 $t \in \mathbb{R}$ 和任意有界的 $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty \subset (-\infty, t]$ (当 $n \to \infty$ 时, $\tau_n \to -\infty$) 以及对于任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}_n$, 那么序列 $\{U(t,\tau_n)x_n\}_{n=1}^\infty$ 存在一个收敛子列.

证明 对任意的 $\epsilon > 0$ 和固定的 t, 存在 $T < t$, 使得 $\frac{C_M}{t+\theta-T} < \epsilon$. 根据定理 2.8, 我们还需要证明对于每一个固定的 t, 有 $\varphi_T^t \in \mathfrak{C}(\mathbb{B}(R))$.

设 $(u_\theta^n, \partial_t u_\theta^n)$ 是问题 (2.3)-(2.5) 关于初值 $(\phi_0,\phi_1) \in \mathbb{B}(R)$ 的解. 由定理 3.2, 可知 $\|u_\theta^n\|^2_{C_{V_2}} + \|\partial_t u_\theta^n\|^2_{C_{L_2}}$ 是有界的. 对于任意固定的 t 和任意的 $\zeta_1 \in [T,t]$.
根据 Alaoglu 定理, 引理 2.5 和定理 3.2, 对任意的 $\tau \leqslant T \leqslant t$, 不失一般性, 设

$$u_\theta^n \text{ 在 } L^\infty([\tau+\rho,T];C_{V_2}) \text{ 中弱*收敛于 } u_\theta, \tag{4.10}$$

$$\partial_t u_\theta^n \text{ 在 } L^\infty([\tau+\rho,T];C_{L^2(\Omega)}) \text{ 中弱*收敛于 } \partial_t u_\theta, \tag{4.11}$$

$$\partial_t^2 u_\theta^n \text{ 在 } L^\infty([\tau+\rho,T];C_{L^2(\Omega)}) \text{ 中弱*收敛于 } \partial_t^2 u_\theta, \tag{4.12}$$

$$u_\theta^n \text{ 在 } L^2([\tau+\rho,T];C_{V_3}) \text{ 中弱收敛于 } u_\theta, \tag{4.13}$$

$$\partial_t u_\theta^n \text{ 在 } L^2([\tau+\rho,T];C_{V_1}) \text{ 中弱收敛于 } \partial_t u_\theta, \tag{4.14}$$

$$\partial_t^2 u_\theta^n \text{ 在 } L^2([\tau+\rho,T];C_{L^2(\Omega)}) \text{ 中弱收敛于 } \partial_t^2 u_\theta, \tag{4.15}$$

$$u_\theta^n \text{ 在 } L^{p+1}([\tau+\rho,T];C_{L^{p+1}(\Omega)}) \text{ 中收敛于 } u_\theta, \tag{4.16}$$

$$u_\theta^n \text{ 在 } L^2([\tau+\rho,T];C_{V_2}) \text{ 中弱收敛于 } u_\theta, \tag{4.17}$$

$$u_\theta^n \text{ 在 } L^{p+1}(\Omega) \text{ 中收敛于 } u_\theta \text{ 并且 } u_\theta^n(T) \text{ 在 } L^{p+1}(\Omega) \text{ 中收敛于 } u_\theta(T), \tag{4.18}$$

$$\partial_t u_\theta^n \text{ 在 } L^2([\tau+\rho,T];C_{L^2(\Omega)}) \text{ 中弱收敛于 } \partial_t u_\theta. \tag{4.19}$$

其中应用 Sobolev 嵌入 $V_2 \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$.

根据 (3.40) 可知

$$(u_\theta(s),\partial_t u_\theta(s))\subset C([T,t];C_{\mathcal{H}})\text{ 是 Cauchy 序列,}\tag{4.20}$$

并且存在 $(u_\theta(s),\partial_t u_\theta(s))\in C([T,t];C_{\mathcal{H}})$, 使得

$$(u_\theta^n(s),\partial_t u_\theta^n(s))\text{ 在 }C([T,t];C_{\mathcal{H}})\text{ 中收敛于 }(u_\theta(s),\partial_t u_\theta(s)).\tag{4.21}$$

下面, 处理 (4.8) 的每一项.首先, 估计 Ψ_1. 利用 (4.19), 可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\|\partial_t u_\theta^n-\partial_t u_\theta^m\|_{C_{L_2}}^2\mathrm{d}s=0,\tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\Omega(\partial_t u_\theta^n-\partial_t u_\theta^m)(u_\theta^n-u_\theta^m)\mathrm{d}x&\leqslant\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\|\partial_t u_\theta^n-\partial_t u_\theta^m\|\|u_\theta^n-u_\theta^m\|\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\|\partial_t u_\theta^n-\partial_t u_\theta^m\|_{C_{L^2(\Omega)}}\|u_\theta^n-u_\theta^m\|_{C_{V_2}}=0,\end{aligned}\tag{4.23}$$

合并 (4.22)-(4.23), 可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Psi_1=0.\tag{4.24}$$

其次, 估计 Ψ_2. 根据 (4.17) 可得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{T+\rho}^t\int_\Omega(f(u_\theta^n)-f(u_\theta^m))(u_\theta^n-u_\theta^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{T+\rho}^t(1+\|u_\theta^n\|_{C_{V_2}}^{p-1}+\|u_\theta^m\|_{C_{V_2}}^{p-1})\|u_\theta^n-u_\theta^m\|_{C_{V_2}}^2\mathrm{d}s\\&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{T+\rho}^t\|u_\theta^n-u_\theta^m\|_{C_{V_2}}^2\mathrm{d}s=0.\end{aligned}\tag{4.25}$$

易知

$$\begin{aligned}&\int_{T+\rho}^t\int_\Omega(f(u_\theta^n)-f(u_\theta^m))(\partial_t u_\theta^n-\partial_t u_\theta^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&=\int_\Omega F(u_\theta^n(t))\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u_\theta^n(T+\rho))\mathrm{d}x+\int_\Omega F(u_\theta^m(t))\mathrm{d}x\\&\quad-\int_\Omega F(u_\theta^m(T+\rho))\mathrm{d}x-\int_{T+\rho}^t\int_\Omega f(u_\theta^m)\partial_t u_\theta^n\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_{T+\rho}^t\int_\Omega f(u_\theta^n)\partial_t u_\theta^m\mathrm{d}x\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{4.26}$$

利用 (1.6) 和嵌入$V_2\hookrightarrow\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, 可得

$$\begin{aligned}&\Big|\int_\Omega(F(u_\theta^n(t))-F(u_\theta(t)))\mathrm{d}x\Big|\leqslant\int_\Omega|f(u_\theta(t)+\vartheta(u_\theta^n(t)-u_\theta(t))||u_\theta^n(t)-u_\theta(t)|\mathrm{d}x\\&\leqslant C(\|u_\theta^n(t)\|_{C_{L^{p+1}(\Omega)}}^2+\|u_\theta(t)\|_{C_{L^{p+1}(\Omega)}}^2+\|u_\theta^n(t)\|_{C_{L^{p+1}(\Omega)}}^p+\|u_\theta(t)\|_{C_{L^{p+1}(\Omega)}}^p)\|u_\theta^n(t)-u_\theta(t)\|_{C_{L^{p+1}(\Omega)}}\\&\leqslant C\epsilon.\end{aligned}\tag{4.27}$$

当 $n\to\infty, m\to\infty$ 时,由于 $f(u_\theta)\in L^2([\tau+\rho,T],C_{V_{-1}})$ 和 $\partial_t u_\theta^m\in L^2([\tau+\rho,T];C_{V_1})$, 可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{T+\rho}^t\langle f(u_\theta^n),\partial_t u_\theta^m\rangle \mathrm{d}s &= \lim_{n\to\infty}\int_{T+\rho}^t\langle f(u_\theta^n),\partial_t u_\theta\rangle \mathrm{d}s\\ &= \int_{T+\rho}^t\langle f(u_\theta),\partial_t u_\theta\rangle \mathrm{d}s = \int_\Omega F(u_\theta(t))\mathrm{d}x - \int_\Omega F(u_\theta(T+\rho))\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

同理可得 $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{T+\rho}^t\langle f(u_\theta^m),\partial_t u_\theta^n\rangle \mathrm{d}s = \int_\Omega F(u_\theta(t))\mathrm{d}x - \int_\Omega F(u_\theta(T+\rho))\mathrm{d}x$,
因此

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{T+\rho}^t\int_\Omega (f(u_\theta^n)-f(u_\theta^m))(\partial_t u_\theta^n-\partial_t u_\theta^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s = 0. \tag{4.28}$$

对于每一个固定的 t, $\big|\int_{s+\rho}^t\int_\Omega (f(u_\theta^n)-f(u_\theta^m))(\partial_t u_\theta^n-\partial_t u_\theta^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\big|$ 是有界的, 则根据 Lebesgue 控制收敛定理, 可得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{T+\rho}^t\int_{s+\rho}^t\int_\Omega (f(u_\theta^n)-f(u_\theta^m))(\partial_t u_\theta^n-\partial_t u_\theta^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\ &= \int_{T+\rho}^t\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{s+\rho}^t\int_\Omega (f(u_\theta^n)-f(u_\theta^m))(\partial_t u_\theta^n-\partial_t u_\theta^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s = 0.\end{aligned} \tag{4.29}$$

由 (4.25), (4.28) 和 (4.29), 可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Psi_2 = 0. \tag{4.30}$$

最后, 我们估计 Ψ_3. 根据 (4.17) ,(4.19) 可得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_\Omega (g(x,u_\theta^n)-g(x,u_\theta^m))(\partial_t u_\theta^n-\partial_t u_\theta^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ &\leqslant C_g\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Big(\sup_{s\in[T-\rho,t]}\|u_\theta^n-u_\theta^m\|_{C_{V_2}}\big(\int_T^t\|\partial_t u_\theta^n-\partial_t u_\theta^m\|_{C_{L_2}}^2\mathrm{d}s\big)^{\frac12}\Big) = 0.\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_\Omega (g(x,u_\theta^n)-g(x,u_\theta^m))(u_\theta^n-u_\theta^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ &\leqslant C_g\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Big(\sup_{s\in[T-\rho,t]}\|u_\theta^n-u_\theta^m\|_{C_{V_2}}\big(\int_T^t\|u_\theta^n-u_\theta^m\|_{C_{V_2}}^2\mathrm{d}s\big)^{\frac12}\Big) = 0.\end{aligned} \tag{4.32}$$

对于每一个固定的 t, $\big|\int_s^t\int_\Omega (g(x,u_\theta^n)-g(x,u_\theta^m))(\partial_t u_\theta^n-\partial_t u_\theta^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\big|$ 是有界的, 则根据 Lebesgue 控制收敛定理, 可得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_s^t\int_\Omega (g(x,u_\theta^n)-g(x,u_\theta^m))(\partial_t u_\theta^n-\partial_t u_\theta^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\ &= \int_T^t\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_s^t\int_\Omega (g(x,u_\theta^n)-g(x,u_\theta^m))(\partial_t u_\theta^n-\partial_t u_\theta^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s = \int_T^t 0\,\mathrm{d}s = 0.\end{aligned} \tag{4.33}$$

DOI: 10.12677/pm.2025.1510257

由 (4.31), (4.32) 和 (4.33), 可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Psi_3=0. \tag{4.34}$$

综上所述, 可得 $\varphi_T^t((u_\tau(T),\partial_t u_\theta(T)),(v_\theta(T),\partial_t v_\theta(T)))\in\mathfrak{C}(\mathbb{B}(R))$.

定理 4.3 设 (1.5)-(1.6) 成立且 $g\in L^2(\Omega)$, 则由问题 (2.3)-(2.5) 生成的过程 $U(t,\tau):C_{\mathcal{H}}\to C_{\mathcal{H}}$ 存在时间依赖吸引子 $\mathfrak{A}=\{A\}$.

证明 由定理 3.2, 定理 3.3, 定理 4.1 和定理 4.2 知, 存在时间依赖吸引子 $\mathfrak{A}=\{A\}$, 且该吸引子 $\mathfrak{A}$ 是不变的.

5. 总结与展望

本文研究在强阻尼与时滞共同作用下, 系统的时间依赖全局吸引子的存在性问题. 由于在梁方程中加入时滞和强阻尼, 通常动力系统和已有的研究技术框架很难直接应用于该模型的时间依赖全局吸引子的研究, 但在时滞项的假设条件下, 应用 Faedo – Galerkin 逼近方法、能量估计和时间平移方法, 得到了解的适定性. 进一步应用收缩函数方法, 验证了过程的渐近紧性, 最后获得了时间依赖全局吸引子的存在性.

时滞问题是近些年的热点研究问题, 研究的关键在于时滞是否破坏耗散性. 因此, 各类偏微分方程时滞问题研究范围广阔, 可以更精确地描述系统解的动态行为. 本文证明了非线性项在次临界情况下时间依赖全局吸引子的存在性, 后续研究能否将时滞变为随机时滞或者非线性项在临界情况下证明时间依赖全局吸引子问题仍值得我们深入研究.

基金项目

国家自然科学基金项目(批准号: 12561041; 11761062)。

参考文献

[1] Babin, A.V. and Vishik, M.I. (1992) Attractors of Evolutionary Equations. North-Holland.

[2] Carvalho, A.N., Langa, J.A. and Robinson, J.C. (2013) Attractors for Infinite-Dimensional Non-Autonomous Dynamical Systems. Springer.

[3] Chueshov, I. and Lasiecka, I. (2008) Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping. In: *Memoirs of the American Mathematical Society*, Vol. 195, American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/memo/0912

[4] Chueshov, I. (2015) Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems. Springer.

[5] Xu, J., Zhang, Z. and Caraballo, T. (2021) Non-Autonomous Nonlocal Partial Differential Equations with Delay and Memory. *Journal of Differential Equations*, **270**, 505-546. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.07.037

[6] Qin, Y. and Yang, B. (2023) Existence and Regularity of Pullback Attractors for a Non-Autonomous Diffusion Equation with Delay and Nonlocal Diffusion in Time-Dependent Spaces.

Applied Mathematics & Optimization, **88**, Article No. 10.
https://doi.org/10.1007/s00245-023-09981-5

[7] Yang, Z. (2013) On an Extensible Beam Equation with Nonlinear Damping and Source Terms. *Journal of Differential Equations*, **254**, 3903-3927. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.02.008

[8] Zhao, C., Zhao, C. and Zhong, C. (2020) The Global Attractor for a Class of Extensible Beams with Nonlocal Weak Damping. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—B*, **25**, 935-955. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2019197

[9] Antonio Jorge da Silva, M. and Narciso, V. (2015) Attractors and Their Properties for a Class of Nonlocal Extensible Beams. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—A*, **35**, 985-1008. https://doi.org/10.3934/dcds.2015.35.985

[10] Ding, P. and Yang, Z. (2021) Longtime Behavior for an Extensible Beam Equation with Rotational Inertia and Structural Nonlinear Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **496**, Article 124785. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124785

[11] Conti, M. and Pata, V. (2014) Asymptotic Structure of the Attractor for Processes on Time-Dependent Spaces. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **19**, 1-10. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.02.002

[12] Meng, F., Yang, M. and Zhong, C. (2015) Attractors for Wave Equations with Nonlinear Damping on Time-Dependent Space. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—Series B*, **21**, 205-225. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2016.21.205

[13] Li, J. and Huang, J. (2009) Uniform Attractors for Non-Autonomous Parabolic Equations with Delays. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **71**, 2194-2209. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.01.053

[14] Ma, Q., Wang, X. and Xu, L. (2016) Existence and Regularity of Time-Dependent Global Attractors for the Nonclassical Reaction-Diffusion Equations with Lower Forcing Term. *Boundary Value Problems*, **2016**, Article No. 10. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0513-3

[15] Harraga, H. and Yebdri, M. (2016) Pullback Attractors for a Class of Semilinear Nonclassical Diffusion Equations with Delay. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2016**, 1072-6691.

[16] Liu, T. and Ma, Q. (2019) Time-Dependent Attractor for Plate Equations on $\mathbb{R}^n$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **479**, 315-332. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.06.028

[17] García-Luengo, J. and Marín-Rubio, P. (2014) Reaction-Diffusion Equations with Non-Autonomous Force in H^{-1} and Delays under Measurability Conditions on the Driving Delay Term. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **417**, 80-95. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.03.026

[18] Meng, F., Wang, Y. and Zhao, C. (2021) Attractor for a Model of Extensible Beam with Damping on Time-Dependent Space. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **57**, 365-393. https://doi.org/10.12775/tmna.2020.037

[19] Yang, B., Qin, Y., Miranville, A. and Wang, K. (2025) Pullback Attractors for Nonclassical Diffusion Equations with a Delay Operator. *Studies in Applied Mathematics*, **154**, e70039. https://doi.org/10.1111/sapm.70039