Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(1), 190-197
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.151022

Hans汉斯

完备黎曼曲面上亚纯函数的唯一性

曹　派

北京邮电大学理学院，北京

收稿日期：2024年11月25日；录用日期：2025年1月13日；发布日期：2025年1月28日

摘　要

在本文中，我们讨论了开黎曼曲面S上亚纯函数的分担唯一性问题。设$g,\tilde{g}$为曲面S上的亚纯函数，$ds^2=\left(1+|g|^2\right)^2|\omega|^2$和$d\tilde{s}^2=\left(1+|\tilde{g}|^2\right)^2|\tilde{\omega}|^2$为曲面$S$上的完备共形度量，$\omega,\tilde{\omega}$为曲面$S$上的全纯1-形式。如果对于扩充复平面中不同的点$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q$有$g^{-1}(\alpha_i)=\tilde{g}^{-1}(\alpha_i)$，$1\le i\le q$且$q\ge 7$，则有$g\equiv\tilde{g}$。

关键词

黎曼曲面，亚纯函数，唯一性，值分布

Uniqueness of Meromorphic Functions on Complete Riemann Surfaces

Pai Cao

School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing

Received: Nov. 25th, 2024; accepted: Jan. 13th, 2025; published: Jan. 28th, 2025

Abstract

In this paper, we discuss the uniqueness problem of meromorphic functions on an open Riemann surface. Let $g,\tilde{g}$ be meromorphic functions on the surface *S*, and $ds^2=\left(1+|g|^2\right)^2|\omega|^2$ and $d\tilde{s}^2=\left(1+|\tilde{g}|^2\right)^2|\tilde{\omega}|^2$ be two complete conformal metrics on the surface *S*, where $\omega,\tilde{\omega}$ are holomorphic 1-forms on the surface *S*. If there exists $g^{-1}(\alpha_i)=\tilde{g}^{-1}(\alpha_i)$ for different points $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q$ in the expanded complex plane, $1\le i\le q$ and $q\ge 7$, then $g\equiv\tilde{g}$.

文章引用：曹派. 完备黎曼曲面上亚纯函数的唯一性[J]. 理论数学, 2025, 15(1): 190-197.
DOI: 10.12677/pm.2025.151022

Keywords

Riemann Surface, Meromorphic Function, Uniqueness, Value Distribution

1. 引言

值分布理论是复分析中的一个重要研究领域，它主要研究一个复变量函数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{\infty}$ 的取值分布特性。1925 年，芬兰数学家 R. Nevanlinna 引入亚纯函数的特征函数等相关概念，建立了亚纯函数第一基本定理和第二基本定理，进一步验证了经典的 Picard 小定理——定义在复平面上的亚纯函数最多只有两个例外值，这标志着 Nevanlinna 值分布理论的诞生(参看[1])。值分布理论的建立促进了复分析领域中其他一些研究分支的发展和融合，其中包括亚纯函数唯一性理论、代数体函数理论、复微分方程和差分理论等一系列数学研究方向。亚纯函数的分担值问题是值分布理论中的关键问题，分担值问题研究如果两个亚纯函数在某些特定值上的行为相同，那么这两个函数在整个定义域上的取值是否有其他相似性乃至一致性。比如我们将两个亚纯函数 f 和 g 对于某个取值 α 各自原像集合记为 $f^{-1}(\alpha)$ 和 $g^{-1}(\alpha)$，如果这两个原像集具有某种相同的性质，那么我们称 α 为分担值，并考虑 f 和 g 在若干值上的分担行为是否足以推导出在整个定义域上有 $f\equiv g$，这便是分担值问题中的函数唯一性问题。R. Nevanlinna [1]在 1926 年利用其本人创立的值分布理论得到了著名的 Nevanlinna 五值定理。

定理 1.1 [1]对于复平面 $\mathbb{C}$ 上两个非常值亚纯函数 f 和 $\tilde{f}$，如果存在 5 个不同的值 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$ 使得 $f^{-1}(\alpha_i)=\tilde{f}^{-1}(\alpha_i),1\le i\le 5$，则有 $f\equiv\tilde{f}$。

随着复分析的主要研究对象不再局限于复平面上的单变量亚纯函数，分担值问题的形式也愈发多样，例如当分担值较少时，是否仍然存在唯一性，还是需要额外的限制条件保证唯一性，亦或者问题中所考虑的函数的定义域不再局限于整个复平面，而是黎曼曲面或是更高维度的复流形。

数学工作者们始终不断推进对于黎曼曲面上的分担值问题的研究并给出了诸多限制条件以使得函数的唯一性得以确定，比如双曲型的黎曼曲面[2]或是具有亏格的黎曼曲面上的分担值问题[3]，而本文所考虑的是被赋予了特定度量形式的黎曼曲面上的亚纯函数分担值问题。为方便理解，下面简要介绍黎曼曲面的定义和证明所需的相关性质。

多值函数是复变函数理论中一个重要的研究对象，很多时候为了解决函数多值性带来的麻烦，需要在复平面上进行分支切割，从而实现函数的单值化，与此同时，黎曼曲面概念的提出可以很好地解决这一点。通俗来讲，黎曼曲面是将复平面上的开集通过全纯映射的方式黏结在一起所形成的几何结构，其定义如下：

定义 1.2 [4]设 S 是一个连通的 Hausdorff 空间，且具有一个满足下列要求的集合 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$：

1) 每个 U_α 是 S 的一个开集，且全体 U_α 形成 S 的一个开覆盖，即

$$S\subset\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha;$$

2) 每个 φ_α 是 U_α 到复平面中某个开集 D_α 的一个同胚；

3) 若 $U_\alpha\cap U_\beta\ne\varnothing$，则

$$f_{\alpha\beta}\overset{\text{def}}{=}\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}\big|_{U_\alpha\cap U_\beta}:\varphi_\beta\left(U_\alpha\cap U_\beta\right)\to\varphi_\alpha\left(U_\alpha\cap U_\beta\right)$$

这时我们称 S 是一个黎曼曲面，并称 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 为 S 的一个局部坐标卡；称 $z=\varphi_\alpha(p)(p\in U_\alpha)$ 为 p 点的局部坐标，或称局部参数；称 $f_{\alpha\beta}$ 为参数转换函数。

从上述定义中可以看黎曼曲面实际上是一个一维复流形，此时很容易注意到复平面 $\mathbb{C}$ 和扩充复平面 $\mathbb{C}^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 都是黎曼曲面。例如，复平面 $\mathbb{C}$ 的坐标卡集合为 $\{(\mathbb{C},id)\}$，其中 id 为恒同映射；扩充复平面 $\mathbb{C}^\infty$ 的坐标卡集合为

$$\left\{(\mathbb{C},id);\left(\mathbb{C}^\infty\setminus\{0\},\frac{1}{z}\right)\right\}$$

从上述可以看出，黎曼曲面是比复平面更广的一类曲面。一个很自然的问题，如何将复平面上的亚纯函数(映射)推广到开黎曼曲面上？因为黎曼曲面有其局部参数化，我们可以将黎曼曲面之间的映射视为各自的局部参数卡间的映射。

定义 1.3 设 S 和 $\tilde{S}$ 为两个黎曼曲面，二者的坐标卡集合分别为 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 和 $\{(V_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$，如果对其中的每一对坐标卡 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (V_β,ψ_β)，在 $U_\alpha\cap V_\beta\neq\varnothing$ 时 f 的局部参数化表示如下：

$$\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}\Big|_{U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta)}:\varphi_\alpha,U_\alpha\cap f^{-1}(v_\beta)!\to\mathbb{C}$$

若上式为全纯函数，那么我们称 $f:S\to\tilde{S}$ 为全纯映射。

我们自然地定义黎曼曲面上的亚纯函数如下：

定义 1.4 黎曼曲面 S 到扩充复平面 $\mathbb{C}^\infty$ 的全纯映射称为黎曼曲面 S 上的亚纯函数。

为了方便，本文中不再区分黎曼曲面 S 上的亚纯函数 $f:S\to\mathbb{C}^\infty$ 和其局部参数化表示。

为研究黎曼曲面的几何特征，并以此指出黎曼曲面之间不同和相同之处来方便我们对黎曼曲面进行分类或建立两个黎曼曲面之间的联系，我们尤其在意黎曼曲面上那些在共形映射下保持不变的几何特征即黎曼曲面上的共形不变量。为此我们首先考虑黎曼曲面上的一条曲线以及曲线的共形不变量。

定义 1.5 [5]设 $\gamma:[a,b]\to S$ 是黎曼曲面 S 上的一条曲线，而 λ 是 S 上恒大于 0 的连续实函数，那么我们定义

$$L_\lambda(\gamma)\stackrel{\text{def}}{=}\int_\gamma\lambda(z)|\mathrm{d}z|=\int_a^b\lambda(\gamma(t))|\gamma'(t)|\mathrm{d}t$$

为路径 γ 的 λ-长度，并称 $\lambda(z)|\mathrm{d}z|$ 为曲面上的共形度量(也可以称 $\mathrm{d}s^2=\lambda^2(z)|\mathrm{d}(z)|^2$ 为曲面上的共形度量)。

这时我们考虑两个黎曼曲面 S 和 S'，如果存在非常值的全纯映射 $w=f(z)(S\to S')$，那么对于 S' 上的共形度量 $\lambda(z)|\mathrm{d}z|$，我们想要在曲面 S 上找到对于其上任意曲线 γ 都满足 $L_\mu(\gamma)=L_\lambda(f\circ\gamma)$ 的共形度量 $\mu(z)\mathrm{d}(z)$。事实上，$\mu(z)\mathrm{d}(z)$ 的唯一形式可由变量替换给出：

$$L_\lambda(f\circ\gamma)=\int_{f\circ\gamma}\lambda(w)|\mathrm{d}w|=\int_\gamma\lambda(f(z))|f'(z)||\mathrm{d}z|=L_{\lambda\circ f|f'|}(\gamma)$$

我们称 $\mu(z)\mathrm{d}(z)$ 为曲面 S 上的共形度量 $\lambda(z)|\mathrm{d}z|$ 在全纯映射 $w=f(z)$ 下的拉回，并记其为 $(f^*\lambda)(z)|\mathrm{d}z|$。以 $\lambda(z)$ 的变量的算式若代入以 $(f^*\lambda)(z)$ 仍保持值不变，那么其显然为一个共形不变量。我们注意到 $\log|f'(z)|$ 为调和函数，那么便会有 $\Delta\log|f'(z)|=0$ (其中 Δ 为拉普拉斯算子)并有如下计算：

$$\Delta(\log f^*\lambda)(z)=\Delta(\log\lambda\circ f)(z)+\Delta(\log|f'|)(z)=\Delta(\log\lambda\circ f)(z)=\Delta(\log\lambda)(f(z))|f'(z)|^2$$

上式两端同时除以 $\lambda^2(z)|f'(z)|^2$ 便会有等式 $\dfrac{\Delta\log M(z)}{M^2(z)}=\dfrac{\Delta\log\lambda(z)}{\lambda^2(z)}$。

那么算式 $\Delta(\log\lambda)(z)/\lambda^2(z)$ 便是一个共形不变量，并给出其相关的正式定义。

定义 1.6 设 $\mathrm{d}s^2=\lambda^2(z)|\mathrm{d}z|^2$ 为黎曼曲面 S 上的共形度量，共性不变量

$$\kappa_\lambda(z)\overset{\text{def}}{=}-\frac{\Delta(\log\lambda)(z)}{\lambda^2(z)}$$

被称为共形度量 $\mathrm{d}s^2$ 下的高斯曲率。

例如欧式度量和下一节中引理 2.1 提到的双曲度量显然都是共形度量，而被赋予欧式度量的复平面的高斯曲率处处为 0，被赋予双曲度量的单位圆盘上曲率处处为负。

定义 1.7 [6]设黎曼曲面 S 上的曲线 $\gamma(t):[0,1)\to S$ 为连续映射且对于 S 的任意紧子集 Q 都有 t_0 使得 $\gamma(t)\notin Q(t\geq t_0)$，则称 $\gamma(t)$ 为一条发散路径。

在共形度量 $\mathrm{d}s^2=\lambda^2(z)|\mathrm{d}z|^2$ 下，发散曲线 $\gamma(t)$ 的长度可以如下计算：

$$\int_\gamma \mathrm{d}s=\int_\gamma\lambda(z)|\mathrm{d}z|=\int_0^\infty\lambda(z(t))|z'(t)|\mathrm{d}t$$

如果 S 上任意发散路径 $\gamma(t)$ 的长度都为 ∞，则称该黎曼曲面在度量 $\mathrm{d}s^2$ 下是完备的。

在本文中，我们主要讨论了完备开黎曼曲面 S 上亚纯函数的分担唯一性问题，证明了以下结果：

定理 1.8 如果 g 和 $\tilde{g}$ 是开黎曼曲面 S 上的两个亚纯函数，$\mathrm{d}s^2=\left(1+|g|^2\right)^2|\omega|^2$ 和 $\mathrm{d}\tilde{s}^2=\left(1+|\tilde{g}|^2\right)^2|\omega|^2$ 是曲面 S 上的完备度量，$\omega,\tilde{\omega}$ 为曲面 S 上的全纯 1-形式。如果存在扩充复平面上的 q 个不同的点 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q$ 使得 g 和 $\tilde{g}$ 在该 q 个取值处的原像集相同，即 $g^{-1}(\alpha_i)=\tilde{g}^{-1}(\alpha_i),1\leq i\leq q$，且 $q\geq 7$，则有 $g\equiv\tilde{g}$。

2. 引理

设 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^\infty$ 且 $\alpha\neq\infty,\beta\neq\infty$。那么将两点间的距离定义如下：

$$|\alpha,\beta|\overset{\text{def}}{=}\frac{|\alpha-\beta|}{\sqrt{1+|\alpha|^2}\sqrt{1+|\beta|^2}}$$

如果 $\alpha=\infty$，则 $|\alpha,\beta|\overset{\text{def}}{=}1\Big/\sqrt{1+|\beta|^2}$。

Lars V. Ahlfors 在将 Schwarz 引理推广到双曲几何上时得出了如下结论：

引理 2.1 [7]设 Δ_R 表示圆心在原点，半径为 R 的开圆盘，$\mathrm{d}s^2$ 是该圆盘上的共形度量。如果圆盘 Δ_R 上每一点处的曲率都是严格负的，那么存在常数 $C>0$ 使得 $\mathrm{d}s^2\leq C\mathrm{d}\sigma^2$，这里 $\mathrm{d}\sigma^2$ 为 Δ_R 上的双曲度量

$$\mathrm{d}\sigma^2\overset{\text{def}}{=}\frac{R^2}{\left(R^2-|z|^2\right)^2}$$

定理 2.2 [8]设 g 是一个在以原点为圆心、以 R 为半径的开圆盘 Δ_R 上非常值的亚纯函数。取 $q(>1)$ 个不同的值 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q$，那么对于任意的 $\rho(>0)$ 和满足 $q-1>q\varepsilon>0$ 的 ε，存在某个正常数 a_0 和 C 使得

$$\Delta\log\frac{\left(1+|g|^2\right)^\rho}{\prod_{j=1}^q\log\left(a_0\Big/|g,\alpha_j|^2\right)}\geq C\frac{|g'|^2}{\left(1+|g|^2\right)^2}\prod_{j=1}^q\left(|g,\alpha_j|^2\log^2\frac{a_0}{|g,\alpha_j|^2}\right)^{-1+\varepsilon}$$

定理 2.3 [8]设 g 和 $\tilde{g}$ 是开黎曼曲面 S 上两个不同的非常值的亚纯函数，且存在 $q(\geq 4)$ 个不同的值 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q$ 使得 $g^{-1}(\alpha_i)=\tilde{g}^{-1}(\alpha_i),1\leq i\leq q$。那么对于满足 $q-4>q\varepsilon>0$ 的正常数 a_o 和 ε，令

$$\lambda\overset{\text{def}}{=}\left(\prod_{j=1}^q\log\left(a_0\Big/|g,\alpha_j|^2\right)\right)^{-1+\varepsilon}$$

$$\tilde{\lambda}\overset{\text{def}}{=}\left(\prod_{j=1}^q\log\left(a_0\Big/|\tilde{g},\alpha_j|^2\right)\right)^{-1+\varepsilon}$$

并在集合 $E\overset{\text{def}}{=}\bigcup_{j=1}^{q}g^{-1}\left(\alpha_j\right)$ 上定义 $\mathrm{d}\sigma^2\overset{\text{def}}{=}0$，在 $S\setminus E$ 上定义 $\mathrm{d}\sigma^2$ 如下：

$$\mathrm{d}\sigma^2\overset{\text{def}}{=}\lambda\tilde{\lambda}\left|g,\tilde{g}\right|^2\frac{\left|g'\right|}{1+\left|g\right|^2}\frac{\left|\tilde{g}'\right|}{1+\left|\tilde{g}\right|^2}\left|\mathrm{d}z\right|^2$$

那么对于存在某个 a_0，使得度量 $\mathrm{d}\sigma^2$ 在 S 上是连续，同时满足在集合 $\left\{\mathrm{d}\sigma^2\neq 0\right\}$ 上有严格负曲率。

为了方便读者阅读，我们将其详细证明重述如下：

证明：对于任意的 $z_0\in S$ 满足 $g\left(z_0\right)=\infty$，存在合适的 Möbius 变换 f 使得 $f\circ g\left(z_0\right)\neq\infty$，同时可用此 $f\circ g$，$f\circ\tilde{g}$ 和 $f\left(\alpha_j\right)$ 分别代替 g、$\tilde{g}$ 以及 α_j。因为在 Möbius 变换下，即 $\left|\alpha,\beta\right|=\left|f\left(\alpha\right),f\left(\beta\right)\right|$，也就是说替换后的度量仍保持不变。因此，不妨设 $g\left(z_0\right)\neq\infty$，$\tilde{g}\left(z_0\right)\neq\infty$。

如果 $g\left(z_0\right)\neq\alpha_j\left(1\le j\le q\right)$，则显然 $\mathrm{d}\sigma^2$ 在 z_0 处是连续的。当 $g\left(z_0\right)=\alpha_j\left(1\le j\le q\right)$，在 z_0 的小邻域可将 $\mathrm{d}\sigma^2$ 写成如下形式：

$$\mathrm{d}\sigma^2=\left|\frac{g'\left(g-\tilde{g}\right)}{g-\alpha_j}\right|\left(g-\alpha_j\right)^{\varepsilon}\log\frac{\sqrt{1+\left|g\right|^2}\sqrt{1+\left|\alpha_j\right|^2}}{\left|g-\alpha_j\right|^2}\left|\frac{\tilde{g}'\left(g-\tilde{g}\right)}{\tilde{g}-\alpha_j}\right|\left(\tilde{g}-\alpha_j\right)^{\varepsilon}\log\frac{\sqrt{1+\left|\tilde{g}\right|^2}\sqrt{1+\left|\alpha_j\right|^2}}{\left|\tilde{g}-\alpha_j\right|^2}\left|h_j\left(z\right)\right|$$

其中，$h_j\left(z\right)$ 为该邻域内的一个全纯函数，而 $g-\tilde{g}$ 以 z_0 为零点，且 $g'\big/\left(g-\alpha_j\right)$ 在 z_0 处极点次数为 1，因此 $\mathrm{d}\sigma^2$ 在 z_0 处连续。设非负函数 μ 满足 $\mathrm{d}\sigma^2=\mu^2\left|\mathrm{d}z\right|^2$，由于任意亚纯函数 f 都在除极点以外的地方满足 $\Delta\log\left|f\right|=0$，因此可将 μ^2 写成如下形式：

$$\frac{\left|g'\right|\left|\tilde{g}'\right|\prod_{j=1}^{q}\left|\tilde{g}-\alpha_j\right|}{\left(1+\left|\alpha_j\right|^2\right)^{(-1+\varepsilon)q}}\frac{\left(1+\left|g\right|^2\right)^{q(1-\varepsilon)/2-2}\left(1+\left|\tilde{g}\right|^2\right)^{q(1-\varepsilon)/2-2}}{\prod_{j=1}^{q}\log\left(a_0\big/\left|g,\alpha_j\right|^2\right)\prod_{j=1}^{q}\log\left(a_0\big/\left|\tilde{g},\alpha_j\right|^2\right)}$$

其中

$$u\overset{\text{def}}{=}\frac{\left|g'\right|\left|\tilde{g}'\right|\prod_{j=1}^{q}\left|g-\alpha_j\right|\left|\tilde{g}-\alpha_j\right|}{\left(1+\left|\alpha_j\right|^2\right)^{(-1+\varepsilon)q}}$$

为恒正函数且满足 $\Delta\log u=0$。

故而由定理 2.2，

$$\begin{aligned}\Delta\log\mu^2&=\Delta\log\frac{\left(1+\left|g\right|^2\right)^{q(1-\varepsilon)/2-2}}{\prod_{j=1}^{q}\left(\log\left(a_0\big/\left|g,\alpha_j\right|^2\right)\right)^{1-\varepsilon}}+\Delta\log\frac{\left(1+\left|\tilde{g}\right|^2\right)^{q(1-\varepsilon)/2-2}}{\prod_{j=1}^{q}\left(\log\left(a_0\big/\left|\tilde{g},\alpha_j\right|^2\right)\right)^{1-\varepsilon}}\\&\ge C_1\frac{\lambda^2\left|g\right|^2}{\left(1+\left|g\right|^2\right)^2}+C_2\frac{\lambda^2\left|\tilde{g}\right|^2}{\left(1+\left|\tilde{g}\right|^2\right)^2}\\&\ge C_3\frac{\lambda\tilde{\lambda}\left|g'\right|\left|\tilde{g}'\right|}{\left(1+\left|g\right|^2\right)\left(1+\left|\tilde{g}\right|^2\right)}\end{aligned}$$

其中，C_1、C_2、C_3 为正常数。由于弦长度量的性质，$\left|g,\tilde{g}\right|\le 1$。于是有：

$$\Delta\log\mu^2\ge C_3\mu^2$$

即 $\mathrm{d}\sigma^2$ 在 $S\setminus E$ 上为严格负曲率，命题得证。

3. 定理 1.8 的证明

不妨假设 $\alpha_q=\infty$，$\mathrm{d}s^2$ 和 $\mathrm{d}\tilde{s}^2$ 为同一曲面上的两个共形度量，在局部坐标 z 下，存在处处不为零的全纯函数 h_z 使得

$$\mathrm{d}s^2=|h_z|^2\left(1+|g|^2\right)\left(1+|\tilde{g}|^2\right)|\mathrm{d}z|^2$$

取满足 $0<q\eta<q-6$ 的 η 并设

$$\tau\overset{\text{def}}{=}\frac{2}{q-4-q\eta}(<1)$$

并在集合

$$S'\overset{\text{def}}{=}\left\{z\in S;g'(z)\neq 0,\tilde{g}'(z)\neq 0,g(z)\neq\alpha_{j,}\tilde{g}(z)\neq\alpha_j,(1\le j\le q),g(z)\neq g'(z)\right\}$$

上定义伪度量

$$\mathrm{d}v^2\overset{\text{def}}{=}|h_z|^{2/(1-\tau)}\left(\frac{\prod_{j=1}^{q}\left(|g-\alpha_j||\tilde{g}-\alpha_j|\right)^{1-\eta}}{|g-\tilde{g}|^2|g'||\tilde{g}'|\prod_{j=1}^{q}\left(1+|\alpha_j|^2\right)^{1-\eta}}\right)^{\tau/(1-\tau)}|\mathrm{d}z|^2$$

取 $\varepsilon\overset{\text{def}}{=}\eta/2$，从定理 2.3 可以看出 $\mathrm{d}v^2$ 是 S 上的伪度量且在 S' 上有严格负曲率。

显然，度量 $\mathrm{d}v^2$ 在 S' 上是平坦的。对于任意的 $z\in S'$，存在一个等距全纯映射 $\Psi\overset{\text{def}}{=}\Delta_R\to S'$ 满足 $\psi(0)=z$，为此取 R 为满足上述条件的最大值。我们注意到 $\Psi^*\mathrm{d}\sigma^2$ 是 Δ_R 上具有严格负曲率的度量，而 $\mathbb{C}$ 上不存在严格负曲率的度量，因此必然有 $R<\infty$。考虑 Δ_R 中延伸到边界上的某点 ζ 的曲线 $\Gamma:z=t\zeta\,(0\le t<1)$，其在 Ψ 下的像 $\gamma\overset{\text{def}}{=}\Psi(\Gamma)$ 在 t 趋近于 1 时趋近于 S' 的边界。接下来，我们将进一步证明 $\gamma\overset{\text{def}}{=}\Psi(\Gamma)$ 也会趋近于 S 的边界。

假设 γ 趋近于 $S\setminus S'$ 中的点 p_0，取全纯局部坐标卡 ξ 使得 $\xi(p_0)=0$，那么存在某实数 a 和恒正的光滑函数 w 使得 $\mathrm{d}v^2$ 可以表示为：

$$\mathrm{d}v^2=|\xi|^{a\tau/(1-\tau)}w|\mathrm{d}\xi|^2$$

我们将分类证实，对于 $S\setminus S'$ 中的点 p_0 的附近有 $a\tau/(1-\tau)<-2$。

如果 p_0 为 $g-\alpha_j\,(j\le q-1)$ 的 m 次零点且为 $\tilde{g}-\alpha_j\,(j\le q-1)$ 的 $n(\le m)$ 次零点，则 p_0 为 g' 的 $m-1$ 次零点且为 $\tilde{g}$ 的 $n-1$ 次零点，此时

$$a\frac{\tau}{1-\tau}\le[1-m\eta+1-n\eta-2n]\frac{2}{q-6-q\eta}$$

上式的值与 η 成负相关，因此可以取足够大的 $\eta(<-1)$ 使得 $a\tau/(1-\tau)\le -1$。

如果 p_0 为 g' 的 m 次零点，为 $\tilde{g}'$ 的 n 次零点，且不为 $g-\alpha_j\,(j\le q-1)$ 或 $\tilde{g}-\alpha_j\,(j\le q-1)$ 的零点，此时

$$a\frac{\tau}{1-\tau}=-(m+n)\frac{2}{q-6-q\varepsilon}$$

同样，可以选取足够大的 $\eta(<-1)$ 使得 $a\tau/(1-\tau)\le -1$。

如果 p_0 为 g' 和 $\tilde{g}'$ 的零点，且不为 $g-\alpha_j\,(j\le q-1)$ 和 $\tilde{g}-\alpha_j\,(j\le q-1)$ 的零点，此时有 $a=-3<-1$。

综上，选取合适的 η 即存在正常数 C_1 和 C_2 使得在 p_0 的某个邻域内有 $\mathrm{d}v\ge C_1|\xi|^{-1-C_2}\,\mathrm{d}|\xi|=+\infty$。于是有

$$R=\int_{\Gamma}\mathrm{d}v\ge\int_{\Gamma}C_1|\xi|^{-1-C_2}\,\mathrm{d}|\xi|=+\infty$$

这与 $R<+\infty$ 矛盾，因此当 t 趋近于 1 时，γ 趋近于 S 的边界。由于 Ψ 是 Δ_R 到 S' 局部等距映射，可取 S' 上的局部全纯坐标卡 w 且有 $|\mathrm{d}w|^2=\mathrm{d}v^2$。此时，通过 $\mathrm{d}v^2$ 的定义可知

$$|h_z|^2=\left(\frac{|g-\tilde{g}|^2|g'||\tilde{g}'|\prod_{j=1}^{q}\left(1+|\alpha_j|^2\right)^{1-\eta}}{\prod_{j=1}^{q}\left(|g-\alpha_j||\tilde{g}-\alpha_j|\right)^{1-\eta}}\right)^{\tau}$$

由于 $\mathrm{d}s^2$ 的形式，可取满足 $\mathrm{d}\sigma^2=\mu^2|\mathrm{d}w|^2$ 的函数 μ，便有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=|h_z|^2\left(1+|g|^2\right)\left(1+|\tilde{g}|^2\right)|\mathrm{d}w|^2\\&=\left(\frac{|g-\tilde{g}|^2|g'||\tilde{g}'|\left(1+|g|^2\right)^{1/\tau}\left(1+|\tilde{g}|^2\right)^{1/\tau}\prod_{j=1}^{q}\left(1+|\alpha_j|^2\right)^{1-\eta}}{\prod_{j=1}^{q}\left(|g-\alpha_j||\tilde{g}-\alpha_j|\right)^{1-\eta}}\right)^{\tau}|\mathrm{d}w|^2\\&=\left(\mu^2\prod_{j=1}^{q}\left(|g,\alpha_j|\right)^2\left(|\tilde{g},\alpha_j|\right)^2\left(\log\frac{a_0}{|g,\alpha_j|}\log\frac{a_0}{|\tilde{g},\alpha_j|}\right)^{1-\varepsilon}\right)^{\tau}|\mathrm{d}w|^2\end{aligned}$$

又由于函数 $x^{\varepsilon}\log^{1-\varepsilon}\left(a_0/x^2\right)$ 有上界，存在正常数 C 使得

$$\mathrm{d}s^2\le C\left(\frac{\lambda\tilde{\lambda}|g'||\tilde{g}'||g,\tilde{g}|^2}{\left(1+|g|^2\right)\left(1+|\tilde{g}|^2\right)}\right)^{\tau}|\mathrm{d}w|^2=C\mathrm{d}\sigma^2$$

由引理 2.1 立即得到有正常数 C' 使得

$$\mathrm{d}s^2\le C'^2\left(\frac{R^2}{R^2-|z|^2}\right)^{\tau}|\mathrm{d}w|^2$$

此时计算曲线 γ 的长度便有上界

$$\int_{\gamma}\mathrm{d}s=\int_{\Gamma}C'\left(\frac{R}{R^1-|z|^2}\right)^{\tau}|\mathrm{d}w|<\infty$$

但这与条件中曲面 S 的完备性相矛盾，于是一定有 $g\equiv\tilde{g}$，证毕。

参考文献

[1] Nevanlinna, R. (1926) Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der Meromorphen Funktionen. *Acta Mathematica*, **48**, 367-391. https://doi.org/10.1007/bf02565342

[2] Schweizer, A. (2005) Shared Values of Meromorphic Functions on Compact Riemann Surfaces. *Archiv der Mathematik*, **84**, 71-78. https://doi.org/10.1007/s00013-004-1104-1

[3] Schweizer, A. (2010) Value-Sharing of Meromorphic Functions on a Riemann Surface. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **365**, 220-228. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.10.041

[4] 李忠. 复分析导引[M]. 北京: 北京大学出版社, 2004.

[5] Farkas, H.M. and Kra, I. (1992) Riemann Surfaces. In: Farkas, H.M. and Kra, I., Eds., *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 9-31. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2034-3_2

[6] Fujimoto, H. (1983) Value Distribution Theory of the Gauss Map of Minimal Surface in R^m. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **35**, 663-681. https://doi.org/10.2969/jmsj/03540663

[7] Ahlfors, L.V. (1938) An Extension of Schwarz's Lemma. *Transactions of the American Mathematical Society*, **43**, 359-364.

https://doi.org/10.2307/1990065

[8] Fujimoto, H. (1992) On the Gauss Curvature of Minimal Surfaces. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **44**, 427-439. https://doi.org/10.2969/jmsj/04430427