Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(1), 229-236
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.151026

基于Anderson加速分裂迭代算法求解多重线性PageRank问题

陆思雅

广东工业大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2024年12月5日；录用日期：2025年1月10日；发布日期：2025年1月28日

摘 要

本文针对多重线性PageRank问题，结合松弛技术，提出了一般形式的张量分裂迭代算法，并给出了相应的收敛性分析。进一步，结合Anderson加速技术，提出了新的张量分裂算法。

关键词

多重线性PageRank问题，张量分裂，Anderson加速

Solving Multilinear PageRank Problem Based on Anderson Accelerated Splitting Iteration Algorithm

Siya Lu

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: Dec. 5th, 2024; accepted: Jan. 10th, 2025; published: Jan. 28th, 2025

Abstract

In this paper, combining relaxation techniques, a general form of tensor splitting iterative algorithm is proposed for the multilinear PageRank problem, and the corresponding convergence analysis is given. Furthermore, a new tensor splitting algorithm is proposed by incorporating Anderson acceleration techniques.

Keywords

Multilinear PageRank Problem, Tensor Splitting, Anderson Acceleration

文章引用: 陆思雅. 基于 Anderson 加速分裂迭代算法求解多重线性 PageRank 问题[J]. 理论数学, 2025, 15(1): 229-236.
DOI: 10.12677/pm.2025.151026

1. 引言

Google 首次提出 PageRank 模型来决定一个代表网页的有向图的重要节点，即网页排序问题[1]。给定一个有向图的随机行走，修正后的 PageRank 模型建立一个存在唯一稳定分布的新的马尔科夫链。尽管 Google 为网络图描述了 PageRank，但相同的方法已部署在许多应用程序中[2]-[5]。由于 PageRank 模型的广泛成功，再根据如今实际应用中高维数据的需要，Gleich 等[6]提出了高阶 PageRank 问题，它是一阶问题的推广。但是，同时他们也发现了高阶 PageRank 的存储障碍[6]，之后，他们根据 Li 和 Ng [7]提出的秩 1 对称近似估计，希望利用这种估计的存储量小的优势，进一步提出多重线性 PageRank 模型。

令 $\mathbb{R}$ 为实数域，$\mathbb{R}^n$、$\mathbb{R}^{k\times n}$、$\mathbb{R}^{[m,n]}$ 分别为 n 维向量、$k\times n$ 维矩阵、m 阶 n 维张量。称向量 $\boldsymbol{s}=(s_i)\in\mathbb{R}^n$ 为随机向量，即对于所有 $i\in n$，有 $s_i\geq 0$ 并且 $\sum_{i=1}^n s_i=1$，其中 $n=\{1,\cdots,n\}$。$\mathcal{P}=\left(p_{i_1i_2\dots i_m}\right)$ 是一个 m 阶 n 维张量，具体为：

$$p_{i_1i_2\cdots i_m}\geq 0,\sum_{i_1=1}^n p_{i_1i_2\cdots i_m}=1,\forall i_2\cdots i_m\in n.$$

Gleich 等[6]基于秩-1 近似估计技术[7]提出多重线性 PageRank 问题：

$$\boldsymbol{x}=\alpha\mathcal{P}\boldsymbol{x}^{m-1}+(1-\alpha)\boldsymbol{v}, \tag{1.1}$$

并且

$$\left(\mathcal{P}\boldsymbol{x}^{m-1}\right)_i\triangleq\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^n p_{ii_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in\mathbb{R}^n,$$

其中，$\alpha\in(0,1)$、$\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$ 是随机向量，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 为特求的 PageRank 向量。

近年来，多重线性 PageRank 问题引起了研究人员的极大关注。许多用于求解方程(1.1)的理论分析[8]-[11]和相关算法[12]-[17]。在现有的研究中，多重线性 PageRank 问题的算法大致为基于梯度的相关算法和不涉及梯度计算的算法。对于基于梯度的相关算法，在[6]中开发了一种 Newton 方法。Meini 等[12]和 Guo 等[13]分别研究了 Perron-Newton 法和多步牛顿法。对于非梯度法，在[6]中给出定点法、移位定点法、内－外方法和反幂方法。众所周知，梯度计算的难度可能导致高计算成本，而非梯度算法在处理非对称张量模型时，在计算效率方面具有天然的优势。分裂算法是张量计算中的一种经典非梯度算法。Li 等[14]和 Liu 等[18]研究了用于求解张量方程的张量分裂算法。

分裂算法在张量计算中有着重要应用，并且分裂算法属于非梯度算法，Anderson 加速技术[17]也是一种通用且有用的技术，用于加速矩阵情况下不动点问题的迭代非常成功，本文将探索分裂迭代的 Anderson 加速，用于求解基于(1.1)的多重线性 PageRank 问题。

本文的主要贡献如下：1) 我们提出求解多重线性 PageRank 问题的分裂方法的一般形式，并对所提出的方法进行了收敛分析；2) 我们提出了 Anderson 加速张量分裂迭代方法来解决多重线性 PageRank 问题。

2. 预备知识

首先介绍我们文中用到的符号和基本知识。令 $\mathbb{S}_1=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\boldsymbol{x}\geq 0,\|\boldsymbol{x}\|_1=1\right\}$。$\mathcal{A}$ 是一个 m 阶 n 维张量，$\mathcal{A}=\left(a_{i_1i_2\cdots i_m}\right)$，$a_{i_1i_2\cdots i_m}\in\mathbb{R}$，$i_1,i_2,\cdots,i_m\in n$。

一个 n 维张量 $\mathcal{A}=\left(a_{ijk}\right)\in\mathbb{R}^{[3,n]}$ 的模-1 展开如下：

$$\mathcal{A}_{(1)}=\begin{bmatrix} a_{111} & \cdots & a_{1n1} & a_{112} & \cdots & a_{1n2} & \cdots & a_{11n} & \cdots & a_{1nn} \\ a_{211} & \cdots & a_{2n1} & a_{212} & \cdots & a_{2n2} & \cdots & a_{21n} & \cdots & a_{2nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n11} & \cdots & a_{nn1} & a_{n12} & \cdots & a_{nn2} & \cdots & a_{n1n} & \cdots & a_{nnn} \end{bmatrix}.$$

在本文中，我们对张量切片作为分裂对象，对每片切片采用同一种分裂方式。接下来，我们分别介绍对角面张量、下三角张量、严格下三角张量、上三角张量和严格上三角张量的定义，这将在下文中使用。

定义 1：[14]令张量 $\mathcal{D}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$，$m\geq 3$ 为一个对角面张量，其中

$$a_{iji_3i_4\cdots i_m}=0,\quad i\neq j.$$

张量 $\mathscr{L}\left(\mathscr{L}'\right)\in\mathbb{R}^{[m,n]}$ 为(严格)下三角张量，其中

$$a_{i_1i_2\cdots i_m}=0,\quad i_1\leq i_2\ \left(i_1<i_2\right).$$

张量 $\mathcal{U}\left(\mathcal{U}'\right)\in\mathbb{R}^{[m,n]}$ 为(严格)上三角张量，其中

$$a_{i_1i_2\cdots i_m}=0,\quad i_1\geq i_2\ \left(i_1>i_2\right).$$

注 1：令 $\mathcal{D}$、$\mathcal{L}$、$\mathcal{L}'$、$\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}'$ 为张量 $\mathcal{A}$ 的对角面部分、下三角部分、严格下三角部分、上三角部分、严格上三角部分。对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，不难检验得出 $\mathcal{D}\boldsymbol{x}^{m-2}$、$\mathcal{L}\boldsymbol{x}^{m-2}$、$\mathcal{L}'x^{m-2}$、$\mathcal{U}\boldsymbol{x}^{m-2}$ 和 $\mathcal{U}'x^{m-2}$ 为 $\mathcal{A}\boldsymbol{x}^{m-2}$ 的对角部分、下三角部分、严格下三角部分、上三角部分、严格上三角部分。

多重线性 PageRank 问题解的唯一性一直是许多学者关注的问题[6] [8]-[11]。本文将基于[11]中的唯一性条件给出收敛性分析。现引入高阶遍历性系数定义。

定义 2：令 $\mathcal{P}\in\mathbb{R}^{[3,n]}$ 高阶遍历系数的定义如下：

$$\mathcal{T}_L\left(\mathcal{P}\right)=\max_{x\in\mathbb{S}_1}\max_{y\in\mathbb{Z}_1}\left\|\mathcal{P}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\right\|_1,$$

$$\mathcal{T}_R\left(\mathcal{P}\right)=\max_{x\in\mathbb{S}_1}\max_{y\in\mathbb{Z}_1}\left\|\mathcal{P}\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}\right\|_1,$$

$$\mathcal{T}\left(\mathcal{P}\right)=\max_{x\in\mathbb{S}_1}\max_{y\in\mathbb{Z}_1}\left\|\mathcal{P}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}+\mathcal{P}\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}\right\|_1,$$

具体的计算公式为：

$$\mathcal{T}_L\left(\mathcal{P}\right)=\frac{1}{2}\max_{j,k_1,k_2}\sum\nolimits_i^n\left|\mathcal{P}_{ijk_1}-\mathcal{P}_{ijk_2}\right|,$$

$$\mathcal{T}_R\left(\mathcal{P}\right)=\frac{1}{2}\max_{j_1,j_2,k}\sum\nolimits_i^n\left|\mathcal{P}_{ij_1k}-\mathcal{P}_{ij_2k}\right|,$$

$$\mathcal{T}\left(\mathcal{P}\right)=\frac{1}{2}\max_{j,k_1,k_2}\sum\nolimits_i^n\left|\mathcal{P}_{ijk_1}-\mathcal{P}_{ijk_2}+\mathcal{P}_{ik_1j}-\mathcal{P}_{ik_2j}\right|.$$

进一步，若 $\mathcal{P}\in\mathbb{R}^{[3,n]}$ 为随机张量，容易得出，

$$\mathcal{T}_L\left(\mathcal{P}\right)=1-\min_{j,k_1,k_2}\sum_i^n\min\left\{\mathcal{P}_{ijk_1},\mathcal{P}_{ijk_2}\right\}$$

$$\mathcal{T}_R\left(\mathcal{P}\right)=1-\min_{j_1,j_2,k}\sum_i^n\min\left\{\mathcal{P}_{ij_1k},\mathcal{P}_{ij_2k}\right\}$$

$$\mathcal{T}\left(\mathcal{P}\right)=2-\min_{j,k_1,k_2}\sum_i^n\min\left\{\mathcal{P}_{ijk_1}+\mathcal{P}_{ik_1j},\mathcal{P}_{ijk_2}+\mathcal{P}_{ik_2j}\right\}.$$

对于随机张量 $\mathcal{P}$，有 $0\le \mathcal{T}_L(\mathcal{P})\le 1$，$0\le \mathcal{T}_R(\mathcal{P})\le 1$，和 $0\le \mathcal{T}(\mathcal{P})\le \mathcal{T}_L(\mathcal{P})+\mathcal{T}_R(\mathcal{P})\le 2$。

定义 3： 令 $A,M\in\mathbb{R}^{[2,n]}$，若 M 是非奇异矩阵，我们称 $A=M-N$ 为矩阵 A 的分裂，分裂形式具体为：1) 正则分裂，若 $M^{-1}\ge 0, N\ge 0$；2) 弱正则分裂，若 $M^{-1}\ge 0, M^{-1}N\ge 0$。

3. 提出的算法及收敛性分析

令 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 含有正元素的向量。我们定义投影算子 $\operatorname{proj}(\boldsymbol{x})=\dfrac{\max(\boldsymbol{x},0)}{\boldsymbol{e}^\top\max(\boldsymbol{x},0)}$。结合松弛技术[15]，我们设计出张量分裂迭代算法如下：

算法 1 张量分裂迭代

输入：给定随机向量 $\mathcal{P}$，α，最大迭代步数 k_{max}，停机误差 ς，松弛因子 $\gamma>0$，初始向量 $\boldsymbol{x}_0$。令 $k=1$

输出：$\boldsymbol{x}$

1：当 $k\le k_{max}$

2：$M_{x_{k-1}}=I-\alpha\mathcal{M}x_{k-1}^2,\ N_{x_{k-1}}=-\alpha\mathcal{N}x_{k-1}^2,\ \boldsymbol{y}_k=M_{x_{k-1}}^{-1}N_{x_{k-1}}\boldsymbol{x}_{k-1}+M_{x_{k-1}}^{-1}(1-\alpha)\boldsymbol{v}$，

$\hat{\boldsymbol{x}}_k=\gamma\boldsymbol{y}_k+(1-\gamma)\boldsymbol{x}_{k-1}$，$\boldsymbol{x}_k=\operatorname{proj}(\hat{\boldsymbol{x}}_k)$

3：若 $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-1}\|<\varsigma$ 则终止并且输出 $\boldsymbol{x}_k$

4：$k\leftarrow k+1$，返回步骤 1

注 2： 若 $\boldsymbol{x}_k\in\mathbb{S}_1$，则 $\mathcal{P}\boldsymbol{x}_k^{m-2}$ 是列随机矩阵，且 $0<\alpha<1$ 时，$I-\alpha\mathcal{P}\boldsymbol{x}_k^{m-2}$ 是非奇异的 M-矩阵。

我们对提出的算法 1 进行收敛性分析，本文基于 Fasino 等[11]给出的 3 阶多重线性 PageRank 问题解的唯一性条件。首先给出以下引理。

引理 1： 若 $\alpha\mathcal{T}(\mathcal{P})<1$，则多重线性 PageRank 问题(1.1)有唯一解。

引理 2： 令 $\mathcal{P}\in\mathbb{R}^{[3,n]}$ 为随机张量。对于任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{S}_1$，以下不等式成立：

$$\left\|\mathcal{P}\left(\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2\right)\right\|_1\le \mathcal{T}(\mathcal{P})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_1,$$

$$\left\|\mathcal{P}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right\|_1\le \mathcal{T}_L(\mathcal{P})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_1,$$

$$\left\|\mathcal{P}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}\right\|_1\le \mathcal{T}_R(\mathcal{P})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_1,$$

其中，$\mathcal{P}\left(\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2\right)\equiv\mathcal{P}\boldsymbol{x}^2-\mathcal{P}\boldsymbol{y}^2$。

引理 3： 令 $I-\alpha\mathcal{P}\boldsymbol{x}^2=M_{\boldsymbol{x}}-N_{\boldsymbol{x}}$ 是(弱)正则分裂，则 $\left\|M_{\boldsymbol{x}}^{-1}\right\|_1\le\dfrac{1}{1-\alpha}$。

证明：由 $I-\alpha\mathcal{P}\boldsymbol{x}^2=M_{\boldsymbol{x}}-N_{\boldsymbol{x}}$，得 $M_{\boldsymbol{x}}^{-1}-M_{\boldsymbol{x}}^{-1}N_{\boldsymbol{x}}=I+\alpha M_{\boldsymbol{x}}^{-1}\mathcal{P}\boldsymbol{x}^2$，结合 $M_{\boldsymbol{x}}{}^{-1}\ge 0, M_{\boldsymbol{x}}{}^{-1}N_{\boldsymbol{x}}\ge 0$，我们得到 $\left\|M_{\boldsymbol{x}}^{-1}\right\|_1\le I+\alpha M_{\boldsymbol{x}}^{-1}\mathcal{P}\boldsymbol{x}^2\le 1+\alpha\left\|M_{\boldsymbol{x}}^{-1}\right\|_1$，因此 $\left\|M_{\boldsymbol{x}}^{-1}\right\|_1\le\dfrac{1}{1-\alpha}$，证毕。

定理 1： 令 $\tilde{\mathcal{M}}$，$\mathcal{P}\in\mathbb{R}^{[3,n]}$ 是随机张量，

$$\alpha\in\left(0,\frac{-\left(2\mathcal{T}_L(\tilde{\mathcal{M}})+\mathcal{T}(\mathcal{P})\right)+\sqrt{\left(2\mathcal{T}_L(\tilde{\mathcal{M}})+\mathcal{T}(\mathcal{P})\right)^2+4\left(\mathcal{T}_L(\tilde{\mathcal{M}})+\mathcal{T}(\mathcal{P})\right)}}{2\left(\mathcal{T}_L(\tilde{\mathcal{M}})+\mathcal{T}(\mathcal{P})\right)}\right),$$ 且

$$\gamma\in\left(\frac{2\alpha\mathcal{T}_L(\tilde{\mathcal{M}})+\alpha^2\mathcal{T}_L(\tilde{\mathcal{M}})+\alpha}{(1+\alpha)(1-\alpha\mathcal{T}(\mathcal{P}))},\frac{2-2\alpha\mathcal{T}_L(\tilde{\mathcal{M}})-\alpha^2\mathcal{T}_L(\tilde{\mathcal{M}})+\alpha}{\alpha\mathcal{T}(\mathcal{P})+1+\alpha^2\mathcal{T}(\mathcal{P})+\alpha}\right),$$ $\boldsymbol{x}$ 为(1.1)的解，则对于任意初始随机向量 $\boldsymbol{x}_1$，由算法 1 生成的向量序列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛，并且

$$\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}\|_1 \le \theta^k \|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}\|_1 .$$

其中，$\theta=(1+\alpha)\varsigma$, 并且 $\varsigma=\dfrac{\alpha\mathcal{T}_l(\tilde{\mathscr{M}})+\gamma\alpha\mathcal{T}(\mathcal{P})+|1-\gamma|}{1-\alpha\mathcal{T}_l(\tilde{\mathscr{M}})}$。

证明：由算法 1 的迭代格式可知

$$\begin{cases}\left(I-\alpha\mathscr{M}\boldsymbol{x}_k^{m-2}\right)\boldsymbol{y}_{k+1}=\alpha\mathcal{P}\boldsymbol{x}_k^{m-1}-\alpha\mathscr{M}\boldsymbol{x}_k^{m-1}+(1-\alpha)\boldsymbol{v}, \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}=\gamma\boldsymbol{y}_{k+1}+(1-\gamma)\boldsymbol{x}_k .\end{cases}$$

得出

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}=\alpha\mathscr{M}\boldsymbol{x}_k^{m-2}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k\right)+\gamma\alpha\mathcal{P}\boldsymbol{x}_k^{m-1}+\gamma(1-\alpha)\boldsymbol{v}+(1-\gamma)\boldsymbol{x}_k .$$

由 $\alpha\in\left(0,\dfrac{-\left(2\mathcal{T}_L(\tilde{\mathcal{M}})+\mathcal{T}(\mathcal{P})\right)+\sqrt{\left(2\mathcal{T}_L(\tilde{\mathcal{M}})+\mathcal{T}(\mathcal{P})\right)^2+4\left(\mathcal{T}_L(\tilde{\mathcal{M}})+\mathcal{T}(\mathcal{P})\right)}}{2\left(\mathcal{T}_L(\tilde{\mathcal{M}})+\mathcal{T}(\mathcal{P})\right)}\right)$，结合引理 1 我们得到 $\alpha\mathcal{T}(\mathcal{P})\le 1$，故 $\boldsymbol{x}$ 是式子的唯一解，得到

$$\boldsymbol{x}=\gamma\alpha\mathcal{P}\boldsymbol{x}^{m-1}+\gamma(1-\alpha)\boldsymbol{v}+(1-\gamma)\boldsymbol{x}.$$

令 $\hat{\boldsymbol{e}}_{k+1}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}-\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_{k+1}=\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}$，得

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{e}}_{k+1}&=\alpha\mathcal{M}\boldsymbol{x}_k^{m-2}\hat{\boldsymbol{e}}_{k+1}-\alpha\mathcal{M}\boldsymbol{x}_k^{m-2}\boldsymbol{e}_k+\gamma\alpha\mathcal{P}\left(\boldsymbol{x}_k^{m-1}-\boldsymbol{x}^{m-1}\right)+(1-\gamma)\boldsymbol{e}_k \\ &\le\mathcal{M}\boldsymbol{x}_k^{m-2}\hat{\boldsymbol{e}}_{k+1}+\alpha\mathcal{M}\boldsymbol{x}_k^{m-2}\boldsymbol{e}_k+\gamma\alpha\mathcal{P}\left(\boldsymbol{x}_k^{m-1}-\boldsymbol{x}^{m-1}\right)+(1-\gamma)\boldsymbol{e}_k .\end{aligned}$$

对 $\mathcal{M}$ 进行单位随机化，我们定义 $\tilde{\mathcal{M}}^+=full(\mathcal{M})$，函数 $full()$ 的功能为对自变量矩阵(张量)中为 0 的元素进行随机赋值，赋值范围为 $(0,1)$。令 $\tilde{\mathcal{M}}_{ijk}=\dfrac{\tilde{\mathcal{M}}_{ijk}^+}{\sum_{i=1}^n\tilde{\mathcal{M}}_{ijk}^+}$，从而得到随机张量 $\tilde{\mathcal{M}}$，并且有 $\mathcal{M}\le\tilde{\mathcal{M}}$。

从而得到

$$\|\hat{\boldsymbol{e}}_{k+1}\|_1\le\left\|\alpha\mathscr{M}\boldsymbol{x}_k^{m-2}\hat{\boldsymbol{e}}_{k+1}\right\|_1+\left\|\alpha\mathscr{M}\boldsymbol{x}_k^{m-2}\boldsymbol{e}_k\right\|_1+\gamma\alpha\left\|\mathcal{P}\left(\boldsymbol{x}_k^{m-1}-\boldsymbol{x}^{m-1}\right)\right\|_1+|1-\gamma|\|\boldsymbol{e}_k\|_1 .$$

结合引理 2，得

$$\|\hat{\boldsymbol{e}}_{k+1}\|_1\le\alpha\mathcal{T}_l(\tilde{\mathscr{M}})\|\hat{\boldsymbol{e}}_{k+1}\|_1+\alpha\mathcal{T}_l(\tilde{\mathscr{M}})\|\boldsymbol{e}_k\|_1+\gamma\alpha\mathcal{T}(\mathcal{P})\|\boldsymbol{e}_k\|_1+|1-\gamma|\|\boldsymbol{e}_k\|_1 .$$

记 $\varsigma=\dfrac{\alpha\mathcal{T}_l(\tilde{\mathscr{M}})+\gamma\alpha\mathcal{T}(\mathcal{P})+|1-\gamma|}{1-\alpha\mathcal{T}_l(\tilde{\mathscr{M}})}$。

即

$$\|\hat{\boldsymbol{e}}_{k+1}\|_1\le\varsigma\|\boldsymbol{e}_k\|_1 .$$

因为 $\boldsymbol{x}_1$ 为随机向量，结合 $\|\boldsymbol{e}_{k+1}\|_1\le\dfrac{1}{1-\varsigma\|\boldsymbol{e}_k\|_1}\varsigma\|\boldsymbol{e}_k\|_1$ 得到

$$\|\boldsymbol{e}_2\|_1\le\frac{1}{1-\varsigma\|\boldsymbol{e}_1\|_1}\varsigma\|\boldsymbol{e}_1\|_1\le(1+\alpha)\varsigma\|\boldsymbol{e}_1\|_1\le\frac{\alpha}{1+\alpha},$$

$$\|\boldsymbol{e}_3\|_1\le\frac{1}{1-\varsigma\|\boldsymbol{e}_2\|_1}\varsigma\|\boldsymbol{e}_2\|_1\le\frac{1}{1-\varsigma\dfrac{\alpha}{1+\alpha}}\varsigma^2(1+\alpha)\|\boldsymbol{e}_1\|_1\le\varsigma^2(1+\alpha)^2\|\boldsymbol{e}_1\|_1\le\frac{\alpha}{1+\alpha},$$

假设$\|\boldsymbol{e}_k\|_1 \le ((1+\alpha)\varsigma)^{k-1}\|\boldsymbol{e}_1\|_1$，当迭代次数达到$k+1$时，有

$$\|\boldsymbol{e}_{k+1}\|_1 \le \frac{1}{1-\varsigma\|\boldsymbol{e}_k\|_1}\varsigma\|\boldsymbol{e}_k\|_1 \le \frac{1}{1-\varsigma\dfrac{\alpha}{1+\alpha}}((1+\alpha)\varsigma)^{k-1}\varsigma\|\boldsymbol{e}_1\|_1 \le ((1+\alpha)\varsigma)^{k}\|\boldsymbol{e}_1\|_1.$$

由已知条件易证$(1+\alpha)\varsigma<1$，故$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛与$\boldsymbol{x}$，证毕。

接下来，我们将使用 Anderson 加速技术来提高算法 1 的收敛性能。Anderson 加速(AA) [19]最初由 Anderson 在 1965 年提出，AA 是一种序列方法已被广泛用于提高固定点迭代$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$的收敛速度。定义残差为$f(x)=g(x)-x$，则求解不动点问题等价求解残差方程$f(x)=0$。AA 方法的主要思想是通过前$m$步迭代计算结果来表示最新的迭代结果，即这个组合向量系数$\beta=(\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_m)$通过极小化每一步相应的残差的组合得到。Anderson 加速方法是针对不动点迭代进行加速的一类算法，我们考虑以下一般定点问题

$$g(\boldsymbol{x})=\gamma(I-\alpha\mathcal{M})^{-1}(-\alpha\mathcal{N}\boldsymbol{x}^2)\boldsymbol{x}+\gamma(1-\alpha)(I-\alpha\mathcal{M}\boldsymbol{x}^2)^{-1}\boldsymbol{v}+(1-\gamma)\boldsymbol{x}$$

并且$f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}$，其中$\boldsymbol{x}\in\mathbb{S}_1$且$g:\mathbb{S}_1\to\mathbb{R}^n$。

根据参考文献[20]中的假设 2.1，当满足

$$\left\|\sum_{i=0}^{m_k}\beta_i^{(K)}f(\boldsymbol{x}_{k-m_k+i-1})\right\|_1 \ge \|f(\boldsymbol{x}_{k-1})\|_1 \text{或} \left\|\beta^{(K)}\right\|_1 \ge M_\beta,$$

其中，M_β是$\beta^{(K)}$的一个控制参数时，我们不必执行 Anderson 加速步骤。

我们新提出的张量分裂迭代算法的安德森加速度如下所示：

算法 2 Anderson 加速张量分裂迭代

输入：给定随机向量$\mathcal{P}$，α，m，常数$M_\beta>1$，最大迭代步数k_{max}，停机误差ς，松弛因子$\gamma>0$，初始向量$\boldsymbol{x}_0$。令$k=1$

输出：$\boldsymbol{x}$

1：while $k\le k_{\max}$ do

2：$m_k=\min\{m,k\}$

3：$g(\boldsymbol{x})=\gamma(I-\alpha\mathcal{M}\boldsymbol{x}^2)^{-1}(-\alpha\mathcal{N}\boldsymbol{x}^2)\boldsymbol{x}_{k-1}+\gamma(1-\alpha)(I-\alpha\mathcal{M}\boldsymbol{x}^2)^{-1}\boldsymbol{v}+(1-\gamma)\boldsymbol{x}$

4：$f(\boldsymbol{x}_{k-1})=g(\boldsymbol{x}_{k-1})-\boldsymbol{x}_{k-1}$

5：令$F_k=(f_{k-m_k},\cdots,f_k)$，其中$f_i=g(\boldsymbol{x}_i)-\boldsymbol{x}_i$

6：计算$\min_{\beta=(\beta_0,\cdots,\beta_{m_k})^{\mathrm{T}}}\|F_k\beta\|_1, s.t.\sum_{i=0}^{m_k}\beta_i=1$，得$\beta^{(k)}=(\beta_0^{(k)},\beta_1^{(k)},\beta_2^{(k)},\cdots,\beta_{m_k}^{(k)})^{\mathrm{T}}$

7：if $\left\|\sum_{i=0}^{m_k}\beta_i^{(K)}f(\boldsymbol{x}_{k-m_k+i-1})\right\|_1 \le \|f(\boldsymbol{x}_{k-1})\|_1$ or $\left\|\beta^{(K)}\right\|_1\le M_\beta$，then

8：$\hat{\boldsymbol{x}}_k=\sum_{i=0}^{m_k}\beta_i^{(k)}g(\boldsymbol{x}_{k-m_k+i-1})$

9：else

10：$\hat{\boldsymbol{x}}_k=g(\boldsymbol{x}_{k-1})$

11：end if

12：$\boldsymbol{x}_k=\mathrm{proj}(\hat{\boldsymbol{x}}_k)$

13：if $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-1}\|<\varsigma$ then

14：则终止并且输出$\boldsymbol{x}_k$

15：end if

续表

16： $k \leftarrow k+1$
17：end while

注 3：如参考文献[20]所述，在实现 Anderson 加速时，算法参数 m 的适当选择很重要。如果 m 太小，则利用迭代步骤中的信息可能太有限，无法实现快速收敛。如果 m 很大，则最小二乘问题可能是病态的。在大多数应用中， $m=2$ 或 $m=3$ 是可行且有效的选择。同时，作为 $\beta^{(k)}$ 的控制参数，太小的 M_β 很容易导致跳过 Anderson 加速步骤。因此，设置较大的 M_β 是合适的。在数值测试中，我们取 $M_\beta = 30(\leq 50)$ 较为合适。

4. 结语

本文基于[15]提出的求解高阶马尔科夫链和多重线性 PageRank 问题的松弛算法基础上，结合张量分裂方法，提出求解多重线性 PageRank 的分裂算法，并进行相应的收敛性分析，进一步引入 Anderson 加速技术[17]，给出 Anderson 加速张量分裂迭代的算法流程并对使用的参数进行了一定的说明。

参考文献

[1] Page, L. (1999) The Page Rank Citation Ranking: Bringing Order to the Web. Technical Report.

[2] Freschi, V. (2007) Protein Function Prediction from Interaction Networks Using a Random Walk Ranking Algorithm. 2007 *IEEE 7th International Symposium on BioInformatics and BioEngineering*, Boston, 14-17 October 2007, 42-48. https://doi.org/10.1109/bibe.2007.4375543

[3] Gleich, D.F. (2015) Page-Rank beyond the Web. *SIAM Review*, **57**, 321-363. https://doi.org/10.1137/140976649

[4] Morrison, J.L., Breitling, R., Higham, D.J. and Gilbert, D.R. (2005) Gene-Rank: Using Search Engine Technology for the Analysis of Microarray Experiments. *BMC Bioinformatics*, **6**, Article No. 233. https://doi.org/10.1186/1471-2105-6-233

[5] Winter, C., Kristiansen, G., Kersting, S., Roy, J., Aust, D., Knösel, T., *et al.* (2012) Google Goes Cancer: Improving Outcome Prediction for Cancer Patients by Network-Based Ranking of Marker Genes. *PLOS Computational Biology*, **8**, e1002511. https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1002511

[6] Gleich, D.F., Lim, L. and Yu, Y. (2015) Multilinear Page-Rank. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **36**, 1507-1541. https://doi.org/10.1137/140985160

[7] Li, W. and Ng, M.K. (2013) On the Limiting Probability Distribution of a Transition Probability Tensor. *Linear and Multilinear Algebra*, **62**, 362-385. https://doi.org/10.1080/03081087.2013.777436

[8] Li, W., Liu, D., Vong, S. and Xiao, M. (2020) Multilinear Page-Rank: Uniqueness, Error Bound and Perturbation Analysis. *Applied Numerical Mathematics*, **156**, 584-607. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.05.022

[9] Li, W., Liu, D., Ng, M.K. and Vong, S. (2017) The Uniqueness of Multilinear Page-Rank Vectors. *Numerical Linear Algebra with Applications*, **24**, e2107. https://doi.org/10.1002/nla.2107

[10] Liu, D., Vong, S. and Shen, L. (2022) Improved Uniqueness Conditions of Solution for Multilinear Page-Rank and Its Application. *Linear and Multilinear Algebra*, **72**, 203-233. https://doi.org/10.1080/03081087.2022.2158292

[11] Fasino, D. and Tudisco, F. (2020) Ergodicity Coefficients for Higher-Order Stochastic Processes. *SIAM Journal on Mathematics of Data Science*, **2**, 740-769. https://doi.org/10.1137/19m1285214

[12] Meini, B. and Poloni, F. (2018) Perron-Based Algorithms for the Multilinear Page-Rank. *Numerical Linear Algebra with Applications*, **25**, e2177. https://doi.org/10.1002/nla.2177

[13] Guo, P., Gao, S. and Guo, X. (2018) A Modified Newton Method for Multilinear Page-Rank. **22**, 1161-1171. https://doi.org/10.11650/tjm/180303

[14] Li, D., Xie, S. and Xu, H. (2017) Splitting Methods for Tensor Equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*, **24**, e2102. https://doi.org/10.1002/nla.2102

[15] Liu, D., Li, W. and Vong, S. (2019) Relaxation Methods for Solving the Tensor Equation Arising from the Higher-Order Markov Chains. *Numerical Linear Algebra with Applications*, **26**, e2260. https://doi.org/10.1002/nla.2260

[16] Bentbib, A.H., Boubekraoui, M. and Jbilou, K. (2024) Extrapolation Methods for Multilinear Page-Rank. *Numerical Algorithms*, **98**, 1013-1043.

[17] Walker, H.F. and Ni, P. (2011) Anderson Acceleration for Fixed-Point Iterations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **49**, 1715-1735. https://doi.org/10.1137/10078356x

[18] Liu, D., Li, W. and Vong, S. (2018) The Tensor Splitting with Application to Solve Multi-Linear Systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **330**, 75-94. https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.08.009

[19] Anderson, D.G. (1965) Iterative Procedures for Nonlinear Integral Equations. *Journal of the ACM*, **12**, 547-560. https://doi.org/10.1145/321296.321305

[20] Toth, A. and Kelley, C.T. (2015) Convergence Analysis for Anderson Acceleration. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **53**, 805-819. https://doi.org/10.1137/130919398