Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(1), 40-46
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.151005

Hans汉斯

加权Fock空间上乘法算子的有界性和紧性

何　欣，田　浩

河北工业大学理学院，天津

收稿日期：2024年12月4日；录用日期：2025年1月2日；发布日期：2025年1月10日

摘　要

本文凭借逐点估计、范数估计等相关技巧，给出了指标不同的加权Fock空间中乘法算子有界性与紧性的等价描述。

关键词

加权Fock空间，乘法算子，有界性，紧性

The Boundedness and Compactness of Multiplication Operators on Weighted Fock Spaces

Xin He, Hao Tian

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Dec. 4th, 2024; accepted: Jan. 2nd, 2025; published: Jan. 10th, 2025

Abstract

In this paper, by pointwise estimation, norm estimation and other related techniques, the equivalent descriptions of the boundedness and compactness of multiplication operators in weighted Fock spaces with different indices are presented.

Keywords

Weighted Fock Spaces, Multiplication Operator, Boundedness, Compactness

文章引用：何欣，田浩．加权 Fock 空间上乘法算子的有界性和紧性[J]．理论数学, 2025, 15(1): 40-46.
DOI: 10.12677/pm.2025.151005

1. 研究背景及主要结果

设$\mathbb{C}$表示复平面，$H(\mathbb{C})$表示在$\mathbb{C}$上的解析函数全体，dA表示$\mathbb{C}$上的Lebesgue面积测度，$D(z,r)$表示欧几里得圆盘。我们考虑$H(\mathbb{C})$上的再生核Hilbert空间$\mathcal{H}$，对于有界全纯函数g，若映射$f \to fg, f \in \mathcal{H}$是有界的，则定义$M_g f = fg, f \in \mathcal{H}$并且$M_g$被称为$\mathcal{H}$上的乘法算子，函数$g$记为$M_g$的符号。在上个世纪七十年代主要关注的是单位圆盘上的Hardy空间中解析乘法算子的交换子和约化子空间的问题。在这个时期，Abrahamse和Douglas、Cowen、Baker等人取得了几项显著的进展[1]-[3]。关于Bergman空间的研究，相关课题开始于2000年Zhu关于有限Blaschke积乘法算子的极小约化子空间数量的猜想[4]。而后由于乘法算子与两类积分算子I_g和J_g有关系：$M_g f = I_g f + J_g f + g(0)f(0)$，其中$I_g = \int_0^z f(\xi)g'(\xi)d\xi$，$J_g$为$J_g$的自伴算子，所以过去的十几年中，这三类算子引起了学者极大的兴趣。在Hardy空间、Bergman空间、Bloch空间、Derichlet空间、Fock空间等取得了许多显著的成就[5]-[7]。本文中，我们对加权Fock空间上M_g的有界性和紧性感兴趣。具体来说，在两个Banach空间中，有界算子是指将有界集映射为有界集的算子，紧算子是指将有界集映射为列紧集的算子。接下来，我们给出本文将要讨论的加权Fock空间的相关概念。若一个非负函数ω在$\mathbb{C}$上局部可积，则称其为一个权函数。对于$0 < p,\alpha < \infty$，设$L^p_{\alpha,\omega}$是$\mathbb{C}$上可测函数f构成的空间，满足

$$\|f\|^p_{L^p_{\alpha,\omega}} := \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} \omega(z)\,dA(z) < \infty 。$$

指标为p的加权Fock空间$F^p_{\alpha,\omega}$定义为$F^p_{\alpha,\omega} = H(\mathbb{C}) \cap L^p_{\alpha,\omega}$。特别地，当$\omega \equiv 1$时，就得到了经典Fock空间$F^p_\alpha$，对于经典Fock空间的有关内容可参考文献[8]。我们用Q表示$\mathbb{C}$中边与坐标轴平行的正方形，并记其边长为$l(Q)$。给定$1 < p < \infty$，p与p′互为对偶数，若权函数ω在$\mathbb{C}$上几乎处处满足$\omega(z) > 0$，且对于某个固定的$r > 0$，有

$$C_{p,r}(\omega) := \sup_{Q,l(Q)=r} \left(\frac{\int_Q \omega dA}{\int_Q dA} \right) \left(\frac{\int_Q \omega^{-\frac{p'}{p}} dA}{\int_Q dA} \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty ,$$

则称ω属于$A_{p,r}$类。Isralowitz在文献[9]中首先引入了$A_{p,r}$类，并证明了该类与r无关，所以我们可以用$A_p^{restricted}$来表示这类权函数。Cascante、Fábrega和Peláez在文献[10]中将Isralowitz的结果推广到$p = 1$的情形。他们引入了$A_1^{restricted}$类，该类由在$\mathbb{C}$上几乎处处满足$\omega(z) > 0$且对于某个固定的$r > 0$，有

$$C_{1,r}(\omega) := \sup_{Q,l(Q)=r} \frac{\int_Q \omega dA}{\int_Q dA \cdot \operatorname*{essinf}_{u \in Q} \omega(u)} < \infty ,$$

的权函数ω组成。我们在$\omega \in A_\infty^{restricted} := \bigcup_{1 \le p < \infty} A_p^{restricted}$的两个不同指标$p$、$q$的加权Fock空间$F^p_{\alpha,\omega}$到$F^q_{\alpha,\omega}$上给出了乘法算子$M_g$的有界性和紧性的等价刻画。注意到当$p = q = \infty$时，Bonet和Taskinen在文献[11]中研究了一般情况下M_g的有界性和紧性。在2016年，Mengestie在文献[12]中刻画了当$0 < p,q \le \infty$时，

F_α^p 和 F_α^q 之间的有界性和紧性。特别地，他证明了 F_α^p 和 F_α^q 之间不存在非零紧的乘法算子。而后在 2019 年，Mengestie 和 Ueki 于文献[13]中考虑了具有径向和某些光滑条件的加权 Fock 空间之间乘法算子的有界性和紧性，推广了文献[12]中的结果。以此为动机，我们考虑了 $M_g : F_{\alpha,\omega}^p \to F_{\alpha,\omega}^q$ 的有界性和紧性，我们给出下面两个定理。

定理 1： 设 $0<\alpha<\infty$，$0<p\le q<\infty$ 且 $\omega\in A_\infty^{restricted}$。则

1) 算子 $M_g : F_{\alpha,\omega}^p \to F_{\alpha,\omega}^q$ 有界当且仅当

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g(z)|}{\omega(D(z,1))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} < \infty 。$$

2) 算子 $M_g : F_{\alpha,\omega}^p \to F_{\alpha,\omega}^q$ 为紧算子当且仅当

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)|}{\omega(D(z,1))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} = 0 。$$

定理 2： 设 $0<\alpha<\infty$，$0<q<p<\infty$ 且 $\omega\in A_\infty^{restricted}$。则下列论述等价

1) 算子 $M_g : F_{\alpha,\omega}^p \to F_{\alpha,\omega}^q$ 是有界的。

2) 算子 $M_g : F_{\alpha,\omega}^p \to F_{\alpha,\omega}^q$ 是紧的。

3) 函数 $g(z)$ 属于 $L^{\frac{pq}{p-q}}(\mathbb{C},\omega dA)$。

本文中，若存在一个绝对常数 $C>0$，满足 $A\le CB$ （$A\ge CB$），则表示为 $A\lesssim B$ （$A\gtrsim B$）。一般的 $A\asymp B$ 表示 $A\lesssim B$ 且 $A\gtrsim B$。如果这些常数对某些参数至关重要，我们将具体说明。

2. 预备知识

引理 1 [10] 令 $\omega\in A_\infty^{restricted}$，那么对于满足 $|z-w|<1$ 的任意 $z,w\in\mathbb{C}$，我们有 $\omega(D(z,1))\asymp\omega(D(w,1))$。

引理 2 [10] 设 $0<p<\infty$，$\alpha\ge 0$ 且 $\omega\in A_\infty^{restricted}$。存在一个常数 $C=C_{(\alpha,p,\omega)}$ 使得对于任意 $z\in\mathbb{C}$ 以及 $f\in H(\mathbb{C})$ 都有

$$|f(z)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} \le \frac{C}{\omega(D(z,1))}\int_{D(z,1)} |f(\xi)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|\xi|^2}\omega(\xi)\,dA(\xi) 。$$

记 $K_z(w)=e^{\alpha\bar{z}w}$ 为经典 Fock 空间 F_α^2 的再生核，下面我们给出 K_z 的 p 范数估计。

引理 3 [10] 设 $0<p,\alpha<\infty$ 且 $\omega\in A_\infty^{restricted}$。那么我们得到

1) $\|K_z\|_{F_{\alpha,\omega}^p} \asymp e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}}\omega(D(z,1))^{\frac{1}{p}}$。

2) 当 $|z|\to\infty$ 时，函数 $k_{p,z}(\cdot) := \dfrac{K_z(\cdot)}{\|K_z\|_{F_{\alpha,\omega}^p}}$ 在 $\mathbb{C}$ 的任意紧子集上一致收敛到 0。

3. 定理证明

3.1. 定理 1 的证明

我们将先证明有界的情况，通过算子有界性的定义以及检验函数的性质证明必要性，然后通过逐点估计等方法证明充分性。而后，通过与有界性类似的方法给出了紧性的证明。详细过程如下：

1) 首先设 M_g 有界，注意到标准检验函数 $k_{p,z}\in F_{\alpha,\omega}^p$，通过引理 3 和 $|g'|^q$ 的次调和性质，我们有

$$\left\|M_g k_{p,z}\right\|_{F^q_{\alpha,\omega}}^q \simeq \int_{\mathbb{C}} \frac{e^{q\alpha\mathrm{Re}(\bar{z}\xi)-\frac{q\alpha}{2}|z|^2}}{\omega(D(z,1))^{\frac{q}{p}}}|g(\xi)|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|\xi|^2}\omega(\xi)dA(\xi)$$

$$\gtrsim \int_{D(z,1)} \frac{e^{-\frac{q\alpha}{2}|z-\xi|^2}}{\omega(D(z,1))^{\frac{q}{p}}}|g(\xi)|^q \omega(\xi)dA(\xi) \gtrsim \frac{|g(z)|^q}{\omega(D(z,1))^{\frac{q}{p}-1}}。$$

因此，对任意 $z\in\mathbb{C}$，得到 $|g(z)|\Big/\omega(D(z,1))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \lesssim \left\|M_g k_{p,z}\right\|_{F^q_{\alpha,\omega}} \le \left\|M_g\right\|$。

反之，对于任意的 $f\in F^p_{\alpha,\omega}$，我们可以得到

$$\left\|M_g f\right\|_{F^q_{\alpha,\omega}}^q \lesssim \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\omega(D(z,1))^{1-\frac{q}{p}}}|f(z)|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2}\omega(z)dA(z)$$

$$\lesssim \left(\sum_{v\in\mathbb{Z}^2}\int_{D(v,2)}|f(\xi)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|\xi|^2}\omega(\xi)dA(\xi)\right)^{\frac{q}{p}} \lesssim \|f\|_{F^p_{\alpha,\omega}}^q。$$

因此，M_g 有界。

2) 首先证明充分性，由条件可知，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得 $\sup\limits_{|z|>\delta}\dfrac{|g(z)|}{\omega(D(z,1))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}<\varepsilon$。

令 $\{f_n\}$ 是 $F^p_{\alpha,\omega}$ 里的有界序列满足在 $\mathbb{C}$ 的任意紧子集上一致收敛到 0。得到

$$\left\|M_g f_n\right\|_{F^q_{\alpha,\omega}}^q = \left(\int_{|z|\le\delta+1}+\int_{|z|>\delta+1}\right)|f_n(z)|^q|g(z)|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2}\omega(z)dA(z) := I_1+I_2,$$

其中，I_1 表示 $\{z\in\mathbb{C}:|z|\le\delta+1\}$ 上的积分并且 I_2 表示 $\{z\in\mathbb{C}:|z|>\delta+1\}$ 上的积分。根据 $\{f_n\}$ 的定义，我们得到 $I_1\lesssim \sup\limits_{|z|\le\delta+1}|f_n(z)|^q<\varepsilon$，其中 $n>N_0$ 并且 N_0 充分大。接下来估计 I_2，

$$I_2 \lesssim \sum_{\substack{v\in\mathbb{Z}^2\\ |v|>\delta}}\int_{D(v,1)}\left(\frac{\int_{D(z,1)}|f_n(\xi)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|\xi|^2}\omega(\xi)dA(\xi)}{\omega(D(z,1))}\right)^{\frac{q}{p}}|g(z)|^q\omega(z)dA(z)$$

$$\lesssim \sup_{|z|>\delta+1}\frac{|g(z)|^q}{\omega(D(z,1))^{\frac{q}{p}-1}}\sum_{\substack{v\in\mathbb{Z}^2\\ |v|>\delta}}\left(\int_{D(v,2)}|f_n(\xi)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|\xi|^2}\omega(\xi)dA(\xi)\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\lesssim \|f_n\|_{F^p_{\alpha,\omega}}^q \sup_{|z|>\delta}\frac{|g(z)|^q}{\omega(D(z,1))^{\frac{q}{p}-1}} < \varepsilon\|f_n\|_{F^p_{\alpha,\omega}}^q。$$

因此，对于 $n>N_0$，我们得到 $\left\|M_g f_n\right\|_{F^q_{\alpha,\omega}}^q \lesssim I_1+I_2 \lesssim \varepsilon$。这表明算子 M_g 是紧的。

对于必要性，假设算子 $M_g:F^p_{\alpha,\omega}\to F^q_{\alpha,\omega}$ 为紧算子，那么 $\lim\limits_{|z|\to\infty}\left\|M_g k_{p,z}\right\|_{F^q_{\alpha,\omega}}=0$。由已知条件可以得到

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{|g(z)|}{\omega(D(z,1))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \lesssim \lim_{|z|\to\infty}\left\|M_g k_{p,z}\right\|_{F^q_{\alpha,\omega}} = 0。$$

情况 2)得证。至此我们完成了定理 1 的证明。

3.2. 定理 2 的证明

显然，2) $\Rightarrow$ 1)是平凡的，所以我们只需要证明下面两种情况。对于 1) $\Rightarrow$ 3)，我们对某种级数求和型检验函数应用 Khinchine 不等式和 Fubini 定理等技巧。对于 3) $\Rightarrow$ 2)，我们使用了 Holder 不等式。详细过程如下：

1) $\Rightarrow$ 3) 令 $v_m, m=0,1,2,\cdots$ 是每个 $v\in\mathbb{Z}^2$ 的重排。通过[10] (命题 4.2)，我们得到对于 $\alpha, p\in(0,\infty)$、$\omega\in A_\infty^{restricted}$ 以及固定的 $\{a_v\}_{v\in\mathbb{Z}^2}\in l^p$，有

$$f(z):=\sum_{v\in\mathbb{Z}^2} a_v k_{p,v}(z)\in F_{\alpha,\omega}^p$$

和 $\|f\|_{F_{\alpha,\omega}^p}\lesssim\left\|\{a_{v_m}\}\right\|_{l^p}$。令 $r_m(t):=\operatorname{sgn}\left(\sin\left(2^m\pi t\right)\right)$ 是从[0, 1]到[−1, 1]的 Rademacher 序列。那么函数

$$f_t(z):=\sum_{v_m\in\mathbb{Z}^2} a_{v_m} r_m(t) k_{p,v_m}(z)$$

属于 $F_{\alpha,\omega}^p$ 并满足 $\|f_t\|_{F_{\alpha,\omega}^p}\lesssim\left\|\{a_{v_m}\}\right\|_{l^p}$。由 Khinchine 不等式，我们得到

$$\left(\sum_{v_m\in\mathbb{Z}^2}\left|a_{v_m}\right|^2\left|k_{p,v_m}(z)\right|^2\right)^{\frac{q}{2}}\lesssim\int_0^1\left|\sum_{v_m\in\mathbb{Z}^2} a_{v_m} r_m(t) k_{p,v_m}(z)\right|^q dt=\int_0^1\left|f_t(z)\right|^q dt。$$

进一步通过 Fubini 定理，有

$$\int_{\mathbb{C}}\left(\sum_{v_m\in\mathbb{Z}^2}\left|a_{v_m}\right|^2\left|k_{p,v_m}(z)\right|^2\right)^{\frac{q}{2}}\left|g(z)\right|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2}\omega(z)dA(z)\lesssim\int_0^1\left\|M_g f\right\|_{tF_{\alpha,\omega}^q}^q dt\lesssim\left\|\{a_{v_m}\}\right\|_{l^p}^q。$$

由上式，可以推断出

$$\begin{aligned}
&\sum_{v_m\in\mathbb{Z}^2}\left|a_{v_m}\right|^q\frac{1}{\omega\left(D(v_m,1)\right)^{\frac{q}{p}}}\int_{D(v_m,1)}\left|g(z)\right|^q\omega(z)dA(z)\\
&\lesssim\int_{\mathbb{C}}\sum_{v_m\in\mathbb{Z}^2}\left|a_{v_m}\right|^q\chi_{D(v_m,1)}(z)\left|k_{p,v_m}(z)\right|^q\left|g(z)\right|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2}\omega(z)dA(z)\\
&\lesssim\int_{\mathbb{C}}\left(\sum_{v_m\in\mathbb{Z}^2}\left|a_{v_m}\right|^2\left|k_{p,v_m}(z)\right|^2\right)^{\frac{q}{2}}\left|g(z)\right|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2}\omega(z)dA(z)\lesssim\left\|\{a_{v_m}\}\right\|_{l^p}^q。
\end{aligned}$$

因为当 $p>q$ 时，$l^{\frac{p}{q}}$ 的对偶是 $l^{\frac{p}{p-q}}$，所以我们得到

$$\sum_{v_m\in\mathbb{Z}^2}\left(\frac{1}{\omega\left(D(v_m,1)\right)^{\frac{q}{p}}}\int_{D(v_m,1)}\left|g(z)\right|^q\omega(z)dA(z)\right)^{\frac{p}{p-q}}<\infty。$$

因此，有下面的估计

$$\int_{\mathbb{C}}\left|g(z)\right|^{\frac{pq}{p-q}}\omega(z)dA(z)\lesssim\int_{\mathbb{C}}\left(\frac{1}{\omega\left(D(z,1)\right)}\int_{D(z,1)}\left|g(\xi)\right|^q\omega(\xi)dA(\xi)\right)^{\frac{p}{p-q}}\omega(z)dA(z)$$

$$\lesssim \sum_{v_m \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{1}{\omega\left(D\left(v_m,2\right)\right)^{\frac{q}{p}}} \int_{D(v_m,2)} \left|g\left(\xi\right)\right|^q \omega\left(\xi\right) dA\left(\xi\right) \right)^{\frac{p}{p-q}} < \infty。$$

这表明 3)成立。

3) $\Rightarrow$ 2) 由假设条件我们知道存在常数 $\gamma > 0$ 使得对任意固定的 $\varepsilon > 0$，有

$$\int_{|z|>\gamma} \left|g\left(z\right)\right|^{\frac{pq}{p-q}} \omega\left(z\right) dA\left(z\right) < \varepsilon^{\frac{p}{p-q}}。$$

故

$$\left\|M_g f_n\right\|_{F^q_{\alpha,\omega}}^q = \left(\int_{|z|\le\gamma} + \int_{|z|>\gamma}\right) \left|f_n\left(z\right)\right|^q \left|g\left(z\right)\right|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2} \omega\left(z\right) dA\left(z\right) := J_1 + J_2,$$

其中，J_1 表示 $\left\{z : |z| \le \gamma\right\}$ 上的积分并且 J_2 表示 $\left\{z : |z| < \gamma\right\}$ 上的积分。对充分大的 n，容易看到 $J_1 \lesssim \sup_{|z|\le\gamma} \left|f_n\left(z\right)\right|^q < \varepsilon$。并且对于 J_2，我们使用 Holder 不等式得到

$$J_2 \lesssim \left\|f_n\right\|_{F^p_{\alpha,\omega}}^q \left(\int_{|z|>\gamma} \left|g\left(z\right)\right|^{\frac{pq}{p-q}} \omega\left(z\right) dA\left(z\right)\right)^{\frac{p-q}{p}} \lesssim \varepsilon。$$

这表明算子 M_g 是紧的，2)成立。由此我们完成了定理 2 的证明。

4. 结论

在证明过程中，我们巧妙融合逐点估计与范数估计技巧，灵活运用多种经典不等式，证明了文中的主要定理。本文的结论说明了 $F^p_{\alpha,\omega}$ 到 $F^q_{\alpha,\omega}$ 之间存在非零紧的乘法算子。这与文献[12]中经典 Fock 空间 F^p_α 和 F^q_α 之间的结论不同，其本质原因是权函数 ω 对 $H\left(\mathbb{C}\right)$ 的乘法不封闭。这拓展了加权 Fock 空间乘法算子理论体系，填补了以往研究在指标普适性与条件精准性上的空白，为解析函数空间算子理论注入了新活力，为后续研究奠定了坚实的理论基石。未来，我们还将研究含不同拓扑结构、赋范方式的 Banach 空间中乘法算子的特性，构建统一理论框架容纳各类空间算子性质，为算子理论发展拓广新域。推动泛函分析在多学科融合创新，如优化理论中算子与复杂空间性能分析。为偏微分方程数值解、图像处理等应用提供理论支撑，如图像滤波中设计新算子优化处理效能。为金融数学中风险模型、材料科学中微观结构模拟等提供创新数学工具。

基金项目

河北省自然科学基金资助项目(A2020202005, A2023202031, A2023202037)。

参考文献

[1] Baker, I.N., Deddens, J.A. and Ullman, J.L. (1974) A Theorem on Entire Functions with Applications to Toeplitz Operators. *Duke Mathematical Journal*, **41**, 739-745. https://doi.org/10.1215/s0012-7094-74-04177-5

[2] Abrahamse, M.B. and Douglas, R.G. (1976) A Class of Subnormal Operators Related to Multiply-Connected Domains. *Advances in Mathematics*, **19**, 106-148. https://doi.org/10.1016/0001-8708(76)90023-2

[3] Cowen, C. (1980) The Commutant of an Analytic Toeplitz Operator, II. *Indiana University Mathematics Journal*, **29**, 1-12. https://doi.org/10.1512/iumj.1980.29.29001

[4] Zhu, K. (2000) Reducing Subspaces for a Class of Multiplication Operators. *Journal of the London Mathematical Society*, **62**, 553-568. https://doi.org/10.1112/s0024610700001198

[5] Zhang, K., Feng, X. and Dong, J.G. (2015) Multiplication Operator on the Weighted Bergman Space of the Unit Ball. *Acta*

Mathematica Sinica, **58**, 125-130.

[6] Girela, D. and Peláez, J.Á. (2006) Carleson Measures, Multipliers and Integration Operators for Spaces of Dirichlet Type. *Journal of Functional Analysis*, **241**, 334-358. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2006.04.025

[7] Galanopoulos, P., Girela, D. and Peláez, J.Á. (2011) Multipliers and Integration Operators on Dirichlet Spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, **363**, 1855-1855. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-2010-05137-2

[8] Zhu, K.H. (2012) Analysis on Fock Spaces. Springer.

[9] Isralowitz, J. (2014) Invertible Toeplitz Products, Weighted Norm Inequalities, and A_p Weights. *Journal of Operator Theory*, **71**, 381-410. https://doi.org/10.7900/jot.2012apr10.1989

[10] Cascante, C., Fàbrega, J. and Peláez, J.A. (2018) Littlewood-Paley Formulas and Carleson Measures for Weighted Fock Spaces Induced by A_∞ Type Weights. *Potential Analysis*, **50**, 221-244. https://doi.org/10.1007/s11118-018-9680-z

[11] Bonet, J. and Taskinen, J. (2015) A Note about Volterra Operators on Weighted Banach Spaces of Entire Functions. *Mathematische Nachrichten*, **288**, 1216-1225. https://doi.org/10.1002/mana.201400099

[12] Mengestie, T. (2015) Generalized Volterra Companion Operators on Fock Spaces. *Potential Analysis*, **44**, 579-599. https://doi.org/10.1007/s11118-015-9520-3

[13] Mengestie, T. and Ueki, S. (2018) Integral, Differential and Multiplication Operators on Generalized Fock Spaces. *Complex Analysis and Operator Theory*, **13**, 935-958. https://doi.org/10.1007/s11785-018-0820-7