Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(1), 63-68
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.151007

一类分数阶中立型时滞神经网络的稳定性

曹 行

成都理工大学数学科学学院，四川 成都

收稿日期：2024年12月2日；录用日期：2025年1月3日；发布日期：2025年1月10日

摘 要

本文考虑了一类具有时变时滞的分数阶中立型神经网络模型。根据同胚映射原理证明了该系统平衡点的存在唯一性。然后通过构造Lyapunov泛函以及利用Lyapunov稳定性理论，证明了系统渐近稳定的充分条件。

关键词

神经网络，时变时滞，分数阶中立型，全局渐近稳定性

Stability of a Class of Fractional-Order Neutral Time-Delay Neural Networks

Hang Cao

School of Mathematical Sciences, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: Dec. 2nd, 2024; accepted: Jan. 3rd, 2025; published: Jan. 10th, 2025

Abstract

In this paper, a class of fractional-order neutral neural network models with time-varying delays was considered. The uniqueness of the existence of the equilibrium point of the system is proved by the principle of homeomorphic mapping. Then, by constructing Lyapunov functional and using Lyapunov stability theory, the sufficient conditions for asymptotic stability of the system are proved.

Keywords

Neural Network, Time-Varying Delays, Fractional-Order Neutral Type, Global Asymptotic Stability

文章引用: 曹行. 一类分数阶中立型时滞神经网络的稳定性[J]. 理论数学, 2025, 15(1): 63-68.
DOI: 10.12677/pm.2025.151007

1. 引言

近年来，随着科技的飞速发展，神经网络模型已经广泛应用在很多智能计算的学科领域上[1] [2]，许多学者指出，分数阶微积分非常适合描述各种材料和过程的记忆性和遗传性[3]。在此基础上，越来越多的学者关注分数阶神经网络模型，研究分析其动力学行为[4] [5]。稳定性问题是动力系统的首要问题。因此，分数阶神经网络系统的稳定性是一个重要的研究领域，近年来取得了一系列有意义的结果[6]-[12]。

目前，关于分数阶神经网络的稳定性分析主要涉及有限时间稳定、全局渐近稳定、Mittag-Leffler 稳定等。其中，文献[9]利用分数阶 Gronwall 不等式，研究了分数阶神经网络的有限时间稳定性问题。文献[10]利用比较原理、不动点定理，研究了在 Caputo 导数意义下，一类分数阶神经网络的渐近稳定性问题。文献[11]运用 Lyapunov 泛函方法，研究了 Riemann-Liouville 分数阶神经网络的渐近稳定性。最近，文献[12]利用同胚映射原理、Lyapunov 泛函方法，研究了一类整数阶中立型时滞神经网络模型的渐近稳定性。文献[13]利用压缩映像原理、Lyapunov 泛函方法，研究了一类具有分布时滞的分数阶神经网络模型的渐近稳定性。

受上述讨论的启发，我们将一类整数阶神经网络推广到分数阶情形，提出了一类 Riemann-Liouville 分数阶中立型时滞神经网络，利用同胚映射定理证明了平衡点的存在唯一性，得到了该分数阶神经网络渐近稳定性的一个充分条件。同胚映射定理是常用的、巧妙的证明平衡点的存在唯一性的方法之一。

本文的主要结构如下：在第 2 节中介绍了 Riemann-Liouville 导数的定义、性质和一些重要结论。在第 3 节中，研究证明了平衡点的存在唯一性，同时得到渐近稳定性的一个充分条件。在第 4 节中，通过一个数值例子来验证主要结果的有效性。最后，给出全文的主要结论。

2. 模型描述与预备知识

2.1. 模型描述

本文考虑了如下分数阶中立型神经网络系统：

$$ {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} x_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} g_j\left(x_j\left(t-\tau(t)\right)\right) + \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\left({}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} x_i(t-\delta)\right) + U_i \tag{1} $$

其中，${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} x_i(t)$ 表示 Riemann-Liouville 分数阶导数，$i=1,2,\cdots n, 0<\alpha<1$，$x_i(t)$ 表示第 i 个神经元在 t 时刻的状态，n 为神经元的个数，$A = diag(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，常数 $a_i>0$ 是神经元的自调节参数，$\tau(t)$ 是连续的有界时变时滞函数，$0<\tau(t)\le\tau_0<1$，连接权重矩阵 $B=(b_{ij})_{m\times n}, C=(c_{ij})_{m\times n}, D=diag(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，$\delta$ 为常数时滞，U_i 表示恒定的外部输入，f,g 表示激活函数，系统(1)的初始条件为：${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha-1} x_i(t) = \omega_i(t), t\in[-\tau_0, 0]$。

2.2. 预备知识

定义 1 函数 $y(t)$ 的 p 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分为 ${}_{t_0}^{RL}D_t^{-p} y(t) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{p-1} y(s)ds, p>0$，其中 $\Gamma(p)$ 表示 *Gamma* 函数，且 $\Gamma(p)=\int_{t_0}^{\infty} t^{p-1}e^{-t}dt$。

定义 2 函数 $y(t)$ 的 q 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数为：

$${}_{t_0}^{RL}D_t^q y(t)=\frac{1}{\Gamma(n-q)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-q-1}y(s)ds, n-1\le q<n\in Z^+ 。$$

本文给出如下假设与引理：

$A1$：假设激活函数 $f(x)$、$g(x)$ 满足 *Lipschitz* 条件，即存在 $l_i^1>0, s.t.\|f_i(u)-f_i(v)\|\le l_i^1|u-v|$，$l_j^2>0, s.t.\|g_j(u)-g_j(v)\|\le l_j^2|u-v|$ 对任意的 $u,v\in R, i=1,2,\cdots n$。

引理 1 [12] 任意向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$y=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$ 以及任意的常数 $p(p>0)$，则下列不等式成立：$\pm 2x^Ty\le px^Tx+p^{-1}y^Ty$。

引理 2 [12] 对任意实数矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 和向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，有：$x^TA^TAx\le\sum_{i=1}^{n}a_i^{\sim}x_i^2$，其中 $a_i^{\sim}=\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}\right|, i=1,2,\cdots,n$。

引理 3 [12] 设 $f(x)$ 为连续函数，且 f 是 R^n 上的单射，若 $\|x\|\to+\infty$ 时，$\|f(x)\|\to+\infty$，则 $f(x)$ 为 R^n 上的同胚映射。

引理 4 [13] 对 $\alpha>\beta>0$，有以下等式成立：${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}\left({}_{t_0}^{RL}D_t^{-\beta}y(t)\right)={}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha-\beta}y(t)$。

引理 5 [13] $y(t)\in R^n$ 是一个可微的向量函数，则有以下不等式：

$${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}\left(y^T(t)Py(t)\right)\le 2y^T(t)P\,{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}y(t)$$

3. 主要结果

3.1. 平衡点的存在唯一性

定理 1 若激活函数满足条件假设 $A1$，且存在正数 p_1 和 p_2，使得 $\varphi=\psi-L^2\gamma>0$，则系统(1)存在唯一的平衡点，其中：

$$\psi=diag(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n),\zeta_i=(2-p_1-p_2)d_i^2,\gamma=diag(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n),\gamma_i=p_1^{-1}b_i^{\sim}+p_2^{-1}c_i^{\sim}$$

$$b_i^{\sim}=\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}b_{ki}b_{kj}\right|,c_i^{\sim}=\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}c_{ki}c_{kj}\right|,i=1,2,\cdots,n$$

证明：对于系统(1)，写成向量形式为

$${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t)=-Ax(t)+Bf(x(t))+Cg(x(t-\tau(t)))+D\left({}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)\right)+U \tag{2}$$

假设 $x_0=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是系统(1)的一个平衡点，则有

$$-Ax_0(t)+Bf(x_0(t))+Cg(x_0(t-\tau(t)))+U=0 \tag{3}$$

定义映射：$\phi(x)=-Ax+Bf(x)+Cf(x)+U$。

下面证明 $\phi(x)$ 是一个单射。对任意的 $x,y\in R^n$，且 $x\ne y$，

那么：$\phi(x)-\phi(y)=-A(x-y)+B(f((x)-f(y))+C(f(x)-f(y))$。

在上式两边左乘 $2(x-y)^TA$ 得到：

$$\begin{aligned}2(x-y)^TA(\phi(x)-\phi(y))=&-2(x-y)^TAA(x-y)\\&+2(x-y)^TAB(f(x)-f(y))+2(x-y)^TAC(f(x)-f(y))\end{aligned} \tag{4}$$

由引理 1 可知：

$$-2(x-y)^TAA(x-y)=-2(x-y)^TA^2(x-y) \tag{5}$$

$$2(x-y)^T AB(f(x)-f(y)) \le p_1 (x-y)^T A^2 (x-y) + p_1^{-1} (f(x)-f(y))^T B^T B(f(x)-f(y)) \tag{6}$$

$$2(x-y)^T AC(f(x)-f(y)) \le p_2 (x-y)^T A^2 (x-y) + p_2^{-1} (f(x)-f(y))^T C^T C(f(x)-f(y)) \tag{7}$$

将(5)~(7)式代入(4)式得到：

$$2(x-y)^T A(\phi(x)-\phi(y)) \le -2(x-y)^T A^2(x-y) + (p_1+p_2)(x-y)^T A^2(x-y) +$$
$$p_1^{-1}(f(x)-f(y))^T B^T B(f(x)-f(y)) + p_2^{-1}(f(x)-f(y))^T C^T C(f(x)-f(y))$$

由引理 2 与假设 $A1$ 可得：

$$2(x-y)^T A(\phi(x)-\phi(y)) \le -2(x-y)^T A^2(x-y) + (p_1+p_2)(x-y)^T A^2(x-y) +$$
$$p_1^{-1}\sum_{i=1}^n b_i^{\sim} l_i^2 (x_i-y_i)^2 + p_2^{-1}\sum_{i=1}^n c_i^{\sim} l_i^2 (x_i-y_i)^2$$

$$2(x-y)^T A(\phi(x)-\phi(y)) \le -\sum_{i=1}^n \left[(2-p_1-p_2)a_i^2 - p_1^{-1} l_i^2 b_i^{\sim} - p_2^{-1} l_i^2 c_i^{\sim}\right](x_i-y_i)^2$$

$$-\sum_{i=1}^n \left[(2-p_1-p_2)a_i^2 - p_1^{-1} l_i^2 b_i^{\sim} - p_2^{-1} l_i^2 c_i^{\sim}\right](x_i-y_i)^2 = -\sum_{i=1}^n \left[(2-p_1-p_2)a_i^2 - l_i^2\left(p_1^{-1} b_i^{\sim} + p_2^{-1} c_i^{\sim}\right)\right](x_i-y_i)^2$$

$$= -\sum_{i=1}^n \left(\zeta_i^{\sim} - l_i^2 \gamma_i\right)(x_i-y_i)^2 = -(x-y)^T\left(\psi - L^2\gamma\right)(x-y) = -(x-y)^T \varphi(x-y)$$

所以，$2(x-y)^T A(\phi(x)-\phi(y)) \le -(x-y)^T \varphi(x-y)$，由于 $\varphi = \psi - L^2\gamma > 0$，那么对于任意的 $x \ne y$，都有 $\phi(x) \ne \phi(y)$，即 $\phi(x)$ 是一个单射。

另外，在上述证明过程中令 $y=0$，则有：$2x^T A(\phi(x)-\phi(0)) \le -x^T \varphi x \le -\lambda_{\min}(\varphi) x^T x \le -\lambda_{\min}(\varphi)\|x\|^2$，由 *Schwarz* 不等式可知：

$$2\|x^T\|\|A\|\|\phi(x)-\phi(0)\| \ge \lambda_{\min}(\varphi)\|x\|^2$$

当 $\|x\| \ne 0$ 时，$\|\phi(x)-\phi(0)\| \ge \dfrac{\lambda_{\min}(\varphi)\|x\|}{2\|A\|}$。

那么 $\|x\| \to +\infty$ 时，$\|\phi(x)\| \to +\infty$，所以 $\phi(x)$ 是一个同胚映射。

由上述证明与引理 3 可得，$\phi(x)$ 是同胚映射，由同胚映射定理知，系统(1)存在唯一的平衡点。

3.2. 渐近稳定性

定理 2 假设条件 $A1$ 与定理 1 成立，若存在正定矩阵 P、Q、R，使得以下不等式成立，

$$\Omega = \begin{bmatrix} -2PA + L_2^T Q L_2 & \left(PB + L_1^T P L_1 B\right) & PC & PD \\ * & -2PL_1 A\left(L_1^{-1}\right) & PL_1 C & PL_1 D \\ * & * & -Q & 0 \\ * & * & * & -R \end{bmatrix} < 0 \tag{8}$$

则系统(1)的解是渐近稳定的。其中，$L_1 = \mathrm{diag}\left[l_1^1, l_2^1, \cdots, l_n^1\right], L_2 = diag\left[l_1^2, l_2^2, \cdots, l_n^2\right]$。

证明：构造 *Lyapunov* 泛函 $V(t) = \sum_{i=1}^4 V_i(t)$，其中：

$$V_1(t) = {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha-1} x^T(t) P x(t),\quad V_2(t) = {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha-1} f^T(x(t)) P f(x(t))$$

$$V_3(t)=\int_{t-\tau(t)}^{t} g^T(x(s))Qg(x(s))ds,\quad V_4(t)=\int_{\delta}^{t}\left({}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)\right)^T R\,{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)dt$$

对 $V(t)=\sum_{i=1}^{4}V_i(t)$ 求导，并且由引理 4、5 可得：

$$V_1'(t)={}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x^T(t)Px(t)\le 2x^T(t)P\,{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t)$$

$$=-2x^T(t)PAx(t)+2x^T(t)PBf(x(t))+2x^T(t)PCg(x(t-\tau(t)))+2x^T(t)PD\,{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)\tag{9}$$

$$\begin{aligned}V_2'(t)&={}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}f^T(x(t))Pf(x(t))\le 2f^T(x(t))P\,{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}f(x(t))\\&\le -2f^T(x(t))PL_1Ax(t)+2f^T(x(t))PL_1Bf(x(t))+\\&2f^T(x(t))PL_1Cg(x(t-\tau(t)))+2f^T(x(t))PL_1D\,{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)\end{aligned}\tag{10}$$

$$V_3'(t)=g^T(x(t))Qg(x(t))-g^T(x(t-\tau(t)))Qg(x(t-\tau(t)))\tag{11}$$

$$V_4'(t)=\left({}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)\right)^T R\,{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)\tag{12}$$

根据上述(9)~(12)式有：

$$\begin{aligned}&V'(t)=V_1'(t)+V_2'(t)+V_3'(t)+V_4'(t)\\&\le -2x^T(t)PAx(t)+2x^T(t)PBf(x(t))+2x^T(t)PCg(x(t-\tau(t)))+2x^T(t)PD\,{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)-\\&2f^T(x(t))PL_1Ax(t)+2f^T(x(t))PL_1Bf(x(t))+2f^T(x(t))PL_1Cg(x(t-\tau(t)))+2f^T(x(t))PL_1D\,{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)+\\&g^T(x(t))Qg(x(t))-g^T(x(t-\tau(t)))Qg(x(t-\tau(t)))-\left({}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)\right)^T R\,{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)\end{aligned}$$

由假设 $A1$ 激活函数 $f(x)$、$g(x)$ 满足 *Lipschitz* 条件，所以有：

$$\begin{aligned}&V'(t)=V_1'(t)+V_2'(t)+V_3'(t)+V_4'(t)\\&\le -x^T(t)(2PA-L_2^TQL_2)x(t)+x^T(t)(2PB+2L_1^TPL_1B)f(x(t))+x^T(t)(2PC)g(x(t-\tau(t)))+\\&x^T(t)(2PD)\,{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)-2f^T(x(t))PL_1A(L_1^{-1})f(x(t))+f^T(x(t))(2PL_1C)g(x(t-\tau(t)))+\\&f^T(x(t))(2PL_1D)\,{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)-g^T(x(t-\tau(t)))Qg(x(t-\tau(t)))-\left({}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)\right)^T R\,{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix}x(t)\\f(x(t))\\g(x(t-\tau(t)))\\{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}-2PA+L_2^TQL_2 & (PB+L_1^TPL_1B) & PC & PD\\ * & -2PL_1A(L_1^{-1}) & PL_1C & PL_1D\\ * & * & -Q & 0\\ * & * & * & -R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\f(x(t))\\g(x(t-\tau(t)))\\{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)\end{bmatrix}$$

根据公式(8)，可以得到 $V(t)'<0$，因此系统(1)的解是渐近稳定的。

4. 数值例子

例 1 考虑如下的二维中立型神经网络模型：

$${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t)=-Ax(t)+Bf(x(t))+Cg(x(t-\tau(t)))+D\left({}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t-\delta)\right)+U\tag{13}$$

其中，$\alpha\in(0,1), x(t)=(\cos(x_1(t)),\cos(x_2(t)))^T$，$U=(0,0)^T$。

$f(x(t))=(2\cos(x_1(t)),2\cos(x_2(t)))^T$，$g(x(t-\tau(t)))=\left(\frac{1}{2}\cos(x_1(t-\tau(t))),\frac{1}{2}\cos(x_2(t-\tau(t)))\right)^T$。

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

则 $l_i^1 = l_j^2 = 1\ (i=1,2, j=1,2)$，那么 $L_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, L_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。

解 *LMI* 得可行解：

$$P=\begin{bmatrix}0.2027 & -0.0148\\ -0.0148 & 0.2321\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}0.5466 & 0.0695\\ 0.0695 & 0.5723\end{bmatrix}, R=\begin{bmatrix}1.0392 & -0.0305\\ -0.0305 & 1.0459\end{bmatrix}$$

根据定理 2 可知，神经网络模型(13)是渐近稳定的。

5. 结语

本文研究一类分数阶时滞中立型神经网络模型。利用同胚映射原理证明平衡点的存在唯一性问题。结合 Lyapunov 稳定性方法，得到神经网络模型渐近稳定的条件，例子表明结果是可行有效的。相对于其他神经网络模型的研究，本文的研究突出于对分数阶中立型神经网络模型的分析，对于具有时变时滞的分数阶中立型神经网络而言，其他的动力学性质仍值得我们分析。

参考文献

[1] 白琮, 黄玲, 陈佳楠, 等. 面向大规模图像分类的深度卷积神经网络优化[J]. 软件学报, 2018, 29(4): 1029-1038.

[2] 刘涛. 基于粒计算-神经网络的汽车电子控制系统故障分析[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2021, 39(4): 59-67.

[3] Podlubny, I. (1999) Fractional Differential Equations. Academic Press, 62-75.

[4] Pahnehkolaei, S.M.A., Alfi, A. and Tenreiro Machado, J.A. (2017) Dynamic Stability Analysis of Fractional Order Leaky Integrator Echo State Neural Networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **47**, 328-337. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.11.013

[5] 张欣欣. Caputo 型分数阶神经网络的稳定性分析[D]: [硕士学位论文]. 秦皇岛: 燕山大学, 2015.

[6] Du, F. and Lu, J. (2020) Finite-time Stability of Neutral Fractional Order Time Delay Systems with Lipschitz Nonlinearities. *Applied Mathematics and Computation*, **375**, Article ID: 125079. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125079

[7] Wang, Q., Lu, D. and Fang, Y. (2015) Stability Analysis of Impulsive Fractional Differential Systems with Delay. *Applied Mathematics Letters*, **40**, 1-6. https://doi.org/10.1016/j.aml.2014.08.017

[8] 韩小花. 分数阶微分方程的若干稳定性问题[D]: [硕士学位论文]. 南宁: 广西民族大学, 2016.

[9] Du, F. and Lu, J. (2021) New Criteria for Finite-Time Stability of Fractional Order Memristor-Based Neural Networks with Time Delays. *Neurocomputing*, **421**, 349-359. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2020.09.039

[10] 王利敏, 宋乾坤, 赵振江. 基于忆阻的分数阶时滞复值神经网络的全局渐近稳定性[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(3): 333-346.

[11] Zhang, H., Ye, R., Cao, J., Ahmed, A., Li, X. and Wan, Y. (2017) Lyapunov Functional Approach to Stability Analysis of Riemann-Liouville Fractional Neural Networks with Time-Varying Delays. *Asian Journal of Control*, **20**, 1938-1951. https://doi.org/10.1002/asjc.1675

[12] 田宝单, 钱紫舒, 徐鑫. 一类中立型时滞神经网络的稳定性分析[J]. 海南大学学报自然科学版, 2024, 42(3): 244-250.

[13] 刘雪铃, 黄静. 分数阶时滞神经网络渐近稳定与同步分析[J]. 淮北师范大学学报自然科学版, 2023, 44(1): 16-20.