

浅谈微积分与概率模型的交互应用

刘 倩

西安电子科技大学数学与统计学院, 陕西 西安

收稿日期: 2024年12月2日; 录用日期: 2025年1月6日; 发布日期: 2025年1月13日

摘 要

微积分作为高等数学中的一个基础学科, 主要研究函数的微分、积分以及有关概念和应用。本文主要探讨微积分与概率模型的交互应用, 一方面, 积分在概率论中起到了至关重要的角色, 能够使我们更好地理解和分析连续型随机变量的分布和性质; 另一方面, 应用概率模型中的性质、定理同样可以解决复杂积分和极限求解问题。

关键词

微积分, 概率论, 交互应用

A Brief Discussion on the Interaction Application of Calculus and Probability Models

Qian Liu

School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an Shaanxi

Received: Dec. 2nd, 2024; accepted: Jan. 6th, 2025; published: Jan. 13th, 2025

Abstract

Calculus, as a fundamental subject in advanced mathematics, primarily studies the differentiation, integration, and related concepts and applications of functions. This paper mainly explores the interactive application of calculus and probability models. On one hand, integration plays a crucial role in probability theory, enabling us to better understand and analyze the distribution and properties of continuous random variables. On the other hand, the properties and theorems of probability models can be used to solve complex integration and limit solving problems.

Keywords

Calculus, Probability Theory, Interactive Application

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

概率论是研究各种随机现象数学规律的数学分支，它在自然科学、技术科学、社会科学中都有着广泛的应用。概率论不仅影响了数学本身的一些分支学科的发展，它还是数理统计的理论基础。目前大学概率论课程的主要内容包括随机事件和古典概型、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理。在概率论部分的学习过程中，比较困难的内容是随机变量的引入和各种统计量分布函数的推导。微积分正是通过连续随机变量这一重要途径而进入了概率统计领域，从而在根本上改变了早期概率论只讨论古典概型的状况。由于在历史上概率论的各个基本概念和理论主要都是因为数理统计的需要而自然产生的，因此在学习概率论时，应该着重学习分布函数的思想方法，特别是要注意概率论的各个基本概念和理论是怎样实际运用到数理统计中的。

对于工科专业的大多数学生，对概率论的学习往往停留在古典概型，特别是容易陷入一系列摸球问题的困境中，从而忽视了连续型随机变量及其分布的学习，这正是由于缺乏对微积分在概率统计领域众多应用的了解。本文重点以连续型随机变量条件密度函数和连续型随机变量数学期望的引入、分析、推导为例，阐述微积分的应用；最后给出三个具体例子，凑密度函数法求解复杂积分运算以及应用特征函数、中心极限定理求解极限问题，说明应用概率论相关知识点同样可以解决微积分中的常见问题。

2. 微积分在概率论中的应用

微积分为我们研究和解决概率问题提供了一种有效的数学工具，特别是针对连续型随机变量。连续型随机变量最大的特点就是具有概率密度函数，它是描述连续型随机变量统计规律的重要函数。随机变量的分布能够以积分的形式进行有效表达，在概率密度函数的连续点上，又能够对上述的表达求导。这样我们正是通过积分，完成随机变量落入一个任意区间的概率求解，从而解决复杂的概率计算问题[1]。

2.1. 连续型随机变量的条件密度函数与积分

掌握二维连续型随机变量条件分布的数学基础和原理能够有效帮助学生合理、正确地运用条件分布的相关公式解决实际问题，从而培养学生的逻辑思维和推理能力，提高解决问题的能力。

连续型随机变量条件分布函数推导[2]的难点在于连续型随机变量取单点的概率为零，所以直接应用条件概率的定义会出现 $\frac{0}{0}$ 型的不定式，为了解决这个矛盾，我们必然需要引入极限的概念，具体推导如下。

$$F_{\xi|\eta}(x|y) = P(\xi \leq x | \eta = y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} P(\xi \leq x | y \leq \eta \leq y + \Delta y)$$

$$= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(\xi \leq x, y \leq \eta \leq y + \Delta y)}{P(y \leq \eta \leq y + \Delta y)}$$

因为 (ξ, η) 为连续型随机变量, 若其密度函数为 $p(x, y)$, 则上式可以写成

$$F_{\xi|\eta}(x|y) = P(\xi \leq x | \eta = y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^x \int_y^{y+\Delta y} p(u, v) du dv}{\int_{-\infty}^x \int_y^{y+\Delta y} p(u, v) du dv} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^x \int_y^{y+\Delta y} p(u, v) du dv}{\int_y^{y+\Delta y} p_\eta(v) dv}$$

若 $p(u, v)$ 及 $p_\eta(u, v)$ 是连续函数, 且 $p_\eta(v) > 0$, 则有

$$F_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^x \int_y^{y+\Delta y} p(u, v) du dv / \Delta y \right]}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\int_y^{y+\Delta y} p_\eta(v) dv / \Delta y \right]} = \frac{\int_{-\infty}^x p(u, y) du}{p_\eta(y)} = \int_{-\infty}^x \frac{p(u, y)}{p_\eta(y)} du$$

显然, 这时 $F_{\xi|\eta}(x|y)$ 关于 x 的导数存在, 且有

$$p_{\xi|\eta}(x|y) = F'_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_\eta(y)}$$

这样就得到了在已知 $(\eta = y)$ 发生的条件下 ξ 的条件概率密度函数。

2.2. 连续型随机变量的期望与积分

数学期望是随机变量概率加权的结果, 反映了随机变量的平均水平。离散型随机变量的数学期望易于理解, 简单、直观。然而对于连续型随机变量, 数学期望如何定义? 人类思维的认知过程一定是从简单到复杂, 从已知到未知, 此时, 我们可以应用连续问题离散化的思路进行推导。在离散化的过程中, 必然要引入积分的思想。

假设 ξ 是一个连续型随机变量, 密度函数为 $p(x)$, 取分点:

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1},$$

则随机变量 ξ 落在 $\Delta x_i = (x_i, x_{i+1})$ 中的概率为

$$P(\xi \in \Delta x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx$$

当 Δx_i 相当小时, 就有

$$P(\xi \in \Delta x_i) \approx p(x_i) \Delta x_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

这时, 分布律为

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ p(x_0) \Delta x_0 & p(x_1) \Delta x_1 & \cdots & p(x_n) \Delta x_n \end{pmatrix}$$

的离散型随机变量可以看成是 ξ 的一种近似, 而这个离散型随机变量的数学期望为

$$\sum_{i=0}^n x_i p(x_i) \Delta x_i$$

它近似地表示了连续型随机变量 ξ 的平均值。分点越密, 这种近似也就越好, 由数学分析知上述和式以积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

为极限，这样就引入了连续型随机变量数学期望的计算公式。

结果发现，通过积分计算，我们可以将连续型随机变量的概率密度函数与函数本身进行加权积分，得到期望值。

2.3. 经典案例

条件分布及其期望在近代概率论中有着重要的作用，在实际问题中也有很大用处。比如，公安机关经过现场侦查，如何“知道”犯罪嫌疑人的身高？原来，在案发现场公安人员发现了犯罪嫌疑人的脚印，根据脚印的长度按下述脚印公式：

$$\text{身高} = \text{脚印长度} \times 6.876$$

推算出犯罪嫌疑人的身高。那么这个公式是怎么来的？这正是条件分布的数学期望，我们称为条件期望。对于一个由身高和脚印长度构成的二维连续型随机变量，一般认为它是一个二维正态分布。通过先构建条件分布，再进行数学期望求解，便可以实现对其中一个变量的“合理”预测，即得到脚印公式。这样一个经典案例是古典概型无法解决的，它足以激发学生的学习兴趣，提升学习效果。

3. 概率论在微积分中的应用

极限是微积分的基石，通过极限，定义了连续、导数以及积分等重要概念。极限着眼于函数的微观情况，而微积分同时反映了函数微观和宏观上的情况，所以微积分基于极限而又高于极限。极限、积分的求解问题都富于技巧性，在计算某些极限问题时，概率论中的概念和方法可以用来简化计算过程。比如，利用密度函数的性质及特征函数、中心极限定理可以解决一些复杂问题。

3.1. 凑密度函数法求积分

连续型随机变量概率密度函数的积分等于 1，这是密度函数最本质的性质之一，这一性质在微积分中也发挥作用。在微积分求解问题中，凡是涉及伽玛函数的积分问题尤为复杂。如果学生能够灵活应用如伽玛分布、卡方分布以及贝塔分布等连续型分布的密度函数以及其变形形式，这将大大简化我们的运算复杂度，达到事半功倍的效果。

$$\text{例 1 求二重积分 } \int_0^{+\infty} \int_0^y \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda y} (y-x)^{\alpha_1-1} x^{\alpha_2-1} dx dy$$

其中， $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \lambda > 0$ 为三个常数。

解 这个二重积分的被积函数包含了伽玛函数，且形式复杂。

$$\text{令里层积分为 } p(y) = \int_0^y \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda y} (y-x)^{\alpha_1-1} x^{\alpha_2-1} dx$$

首先进行换元，令 $\frac{x}{y} = t$ ，则有

$$\int_0^y (y-x)^{\alpha_1-1} x^{\alpha_2-1} dx = y^{(\alpha_1+\alpha_2)-1} \int_0^1 (1-t)^{\alpha_1-1} t^{\alpha_2-1} dt$$

$$\text{其中，} \int_0^1 (1-t)^{\alpha_1-1} t^{\alpha_2-1} dt = B(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}。$$

$$\begin{aligned}
 p(y) &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda y} y^{(\alpha_1+\alpha_2)-1} \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \\
 \text{于是,} \quad &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} y^{(\alpha_1+\alpha_2)-1} e^{-\lambda y}, y > 0
 \end{aligned}$$

而上式恰好就是 $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$ 分布的概率密度函数。在概率论中, 密度函数的积分必然等于 1。于是

$$\int_0^{+\infty} \int_0^y \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda y} (y-x)^{\alpha_1-1} x^{\alpha_2-1} dx dy = 1$$

3.2. 利用特征函数、中心极限定理求极限

随机变量的特征函数与随机变量的分布函数一一对应, 是证明中心极限定理的有力工具, 除此之外, 它也被用来解决一些极限求解问题。

例 2 用特征函数的方法证明: “二项分布收敛于泊松分布” 的泊松定理。

证明: 设 $\{\xi_i^n\}_{1 \leq i \leq n}$ 独立同二项分布的随机变量序列, 即

$$P(\xi_i^n = 1) = p_n, P(\xi_i^n = 0) = 1 - p_n = q_n, 1 \leq i \leq n$$

而且 ξ_i^n 的特征函数为 $(q_n + p_n e^{it})$, 记 $\eta_n = \sum_{i=1}^n \xi_i^n$, 则它的特征函数 $\phi_n(t) = (q_n + p_n e^{it})^n$ 。

因为 $np_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$, 故 $p_n = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), q_n = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, 代入上式可得

$$\phi_n(t) = (q_n + p_n e^{it})^n = \left[1 + \frac{1}{n} \lambda (e^{it} - 1) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\lambda(e^{it} - 1)}$$

而 $e^{\lambda(e^{it} - 1)}$ 是参数为 λ 的泊松分布的特征函数, 由特征函数的逆极限定理知泊松定理成立。

当然, 本题利用高等数学的方法也易于求解, 过程请读者自行完成。

例 3 应用中心极限定理证明: $\left(\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}\right) e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$ 。

证明: 设 $\{\xi_i^n\}_{1 \leq i \leq n}$ 独立同参数为 1 的泊松分布的随机变量序列, 即

$$E\xi_i^n = D\xi_i^n = 1, B_n^2 = \sum_{k=1}^n D\xi_k^n = n$$

由林德贝格 - 列维中心极限定理知

$$P\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^n \leq n\right) = P\left(\frac{\sum_{k=1}^n (\xi_k^n - E\xi_k^n)}{B_n} \leq 0\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}$$

由泊松分布的可加性知 $\sum_{k=1}^n \xi_k^n$ 是参数为 n 的泊松分布, 因而 $P\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^n \leq n\right) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} e^{-n}$, 从而命题得证。

我们将在概率论发展历程的近 200 年时间中, 研究由大量的相互独立的随机变量的综合影响而构成的复杂随机变量的极限分布是正态分布的定理统称为中心极限定理。这个例子正是一个应用中心极限定理求极限的问题。然而, 本题利用高等数学的方法进行证明比较繁琐, 过程也请读者自行完成。

这两个例子的共性是, 通过相应的概率论模型, 让看似抽象和复杂的问题更加容易被学生理解, 通过问题的讲解, 能够使学生更好地体会模型的重要性, 建立数学模型与实际问题的对应关系, 提升学生

解决实际问题的能力。

4. 结束语

微积分和概率论在数学中有着紧密的联系，它们相互依存。微积分是研究函数变化规律和曲线面积等问题的一门学科，主要研究函数在某一点处的导数和函数在某一区间上的积分等问题。概率论则是研究随机事件发生可能性大小及其规律性质的数学学科，主要研究随机变量在不同取值下出现的概率。微积分中的积分概念不仅在理论上具有重要意义，而且在概率模型和贝叶斯统计等实际应用中发挥着不可替代的作用[3][4]。通过积分运算，我们可以解决复杂的概率计算问题，为数据分析、机器学习等领域提供有力的数学工具。希望本文能够帮助读者更好地理解积分的概念以及概率模型与微积分的交互应用。

基金项目

2024 年西安电子科技大学教育教学改革研究项目(B2316)。

参考文献

- [1] 赵丽姝. 微积分在概率论中的应用[J]. 科技资讯, 2018, 14(29): 176-177.
- [2] 魏宗舒. 概率论与数理统计教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 111-112.
- [3] 韦来生, 张伟平. 贝叶斯分析[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2013: 5-6.
- [4] 杨静, 陈冬, 程小红. 贝叶斯公式的几个应用[J]. 大学数学, 2011, 27(2): 166-169.