Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(2), 89-92
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.152049

高考中的三次函数中心对称问题探究

彭大鹏

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2025年1月8日；录用日期：2025年2月11日；发布日期：2025年2月26日

摘 要

在近几年的新高考中，关于对称中心的问题越来越频繁，主要集中在函数部分，特别是三次函数问题，2024年新高考一二卷当中都有出现。要探究三次函数的对称中心问题，就要探根溯源从教材出发，重视教材，回归教材。

关键词

高考，三次函数，对称中心，回归教材

Exploration of the Problem of Central Symmetry of Cubic Functions in the College Entrance Examination

Dapeng Peng

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Jan. 8th, 2025; accepted: Feb. 11th, 2025; published: Feb. 26th, 2025

Abstract

In recent years, the issue of symmetry center has become increasingly frequent in the new college entrance examination, mainly focusing on the function part, especially the cubic function problem, which will appear in both the first and second papers of the 2024 new college entrance examination. To explore the symmetry center problem of cubic functions, we need to trace its roots from textbooks, attach importance to textbooks, and return to textbooks.

Keywords

College Entrance Examination, Cubic Function, Symmetrical Center, Returning to Textbooks

文章引用: 彭大鹏. 高考中的三次函数中心对称问题探究[J]. 理论数学, 2025, 15(2): 89-92.
DOI: 10.12677/pm.2025.152049

1. 前言

中学生关于中心对称图形的认识，最早源于人教版九年级上册数学第二十三章《旋转》一节，通过学习，同学们认识了平面图形的旋转变换的基本特征。而对于中心对称的定义，则是把一个图形绕着某一点旋转 180°，如果它能够与另一个图像重合，那么就说这两个图像关于点对称或中心对称，这个点叫做对称中心。这个定义运用几何的视角去定义中心对称，实现了对中心对称图像的初步探索。精准定位，掌握学生的认知基础，从学生已有的认知和经验出发[1]。不仅符合《义务教育数学课程标准(2022 年版)》，也符合学生的心理发展阶段。然而到了高中，教材并没有安排具体的章节介绍中心对称问题，而是把它融入到函数与导数中。在高中，函数与导数是数学学科的必备知识和主干知识。三次函数的对称中心问题，不仅可以很好地考察学生的数形结合思想、分类讨论思想和转化思想，还可以考察逻辑推理能力和运算求解能力。通过研究三次函数的性质，多角度提升学生运用知识解决导数问题，培养学生的核心素养。

2. 教材溯源

在 2019 人教 A 版高中数学必修一第 87 页的拓广探索第 13 题给出了求函数图像对称中心的方法。题目如下：

我们知道，函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是 $y=f\left(x\right)$ 为奇函数，有同学发现可以将其推广为：函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像关于点 $P\left(a,b\right)$ 成中心对称图形的充要条件是 $y=f\left(x+a\right)-b$ 为奇函数。

求 $y=x^3-3x^2$ 图像的对称中心；

与初中的几何定义不同，这给了我们中心对称图像的一种代数关系。我们试着推导一下：我们先将函数 $y=f\left(x+a\right)-b$ 为奇函数用符号语言表示出来，即 $f\left(-x+a\right)-b+f\left(x+a\right)-b=0$，即 $f\left(-x+a\right)+f\left(x+a\right)=2b$。这就是函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像关于点 $P\left(a,b\right)$ 成中心对称的充要条件，也是用函数的视角描述了中心对称图像。我们可以利用此方法去求函数图像的对称中心。

解析：设函数 $y=x^3-3x^2$ 的对称中心为 $P\left(a,b\right)$，则函数 $y=f\left(x+a\right)-b=\left(x+a\right)^3-3\left(x+a\right)^2-b$ 是奇函数，由奇函数定义可知：$f\left(-x+a\right)-b=-\left[f\left(x+a\right)-b\right]$ 代入整理得：

$$\left(-x+a\right)^3+\left(x+a\right)^2-3\left(-x+a\right)^2-2b-3\left(x+a\right)^2=0$$

即 $\left(6a-6\right)x^2+2a^3-6a^2-2b=0$

解得：$\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$

所以函数 $y=x^3-3x^2$ 的对称中心为 $\left(1,-2\right)$。

教材中本节主要内容是讲述函数的基本性质，在课后习题最后一部分“拓广探索”中抛出该问题，并给出了具体实例，但是并没有进行一般化的推广。那么，对于本题中的三次函数有对称中心，那对于普通的三次函数是否也有对称中心呢？不妨我们来尝试一下。

求三次函数 $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\left(a\neq 0\right)$ 的对称中心。

证明：设的对称中心为 $\left(m,n\right)$，则 $f\left(m-x\right)+f\left(n+x\right)=2n$，化简得

$(3ma+b)x^2+am^3+bm^2+cm+d-n=0$，则 $3ma+b=0$， $am^3+bm^2+cm+d-n=0$

$$\begin{cases} m=-\dfrac{b}{3a} \\ n=f(m)=f\left(-\dfrac{b}{3a}\right) \end{cases}$$

即 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(-\dfrac{b}{3a},f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$。

通过以上三次函数对称中心的研究，我们得到了一般性的结论，如果熟练掌握其模型，那么在解题过程中能够迅速解决三次函数的相关问题，从而达到优化计算，以简驭繁的效果。

3. 链接高考

例 1：(2024 新高考一卷节选)已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$

证明：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形。

解析：设 $P(m,n)$ 为 $y=f(x)$ 图象上任意一点，可证 $P(m,n)$ 关于 $(1,a)$ 的对称点为 $Q(2-m,2a-n)$ 也在函数的图像上，从而可证对称性。

$f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$ 的定义域为 $(0,2)$，

设 $P(m,n)$ 为 $y=f(x)$ 图象上任意一点，

$P(m,n)$ 关于 $(1,a)$ 的对称点为 $Q(2-m,2a-n)$，

因为 $P(m,n)$ 在 $y=f(x)$ 图象上，故 $n=\ln\dfrac{m}{2-m}+am+b(m-1)^3$，

而 $f(2-m)=\ln\dfrac{2-m}{m}+a(2-m)+b(2-m-1)^3=-\left[\ln\dfrac{m}{2-m}+am+b(m-1)^3\right]+2a=2a-n$，

所以 $Q(2-m,2a-n)$ 也在 $y=f(x)$ 图象上，

由 P 的任意性可得 $y=f(x)$ 图象为中心对称图形，且对称中心为 $(1,a)$。

评析：本题是教材习题的变形，本质上是用定义去证明函数的几何性质，即上文教材溯源中所提到的充要条件：函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $P(a,b)$ 成中心对称图形的充要条件是 $y=f(x+a)-b$ 为奇函数。

例 2：(2024 新高考二卷)设函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则(　)

A. 当 $a>1$ 时， $f(x)$ 有三个零点

B. 当 $a<0$ 时， $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. 存在 a,b，使得 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

D. 存在 a，使得点 $(1,f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

解析：A 选项， $f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$，由于 $a>1$，

故 $x\in(-\infty,0)\cup(a,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0),(a,+\infty)$ 上单调递增，

$x\in(0,a)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取到极大值，在 $x=a$ 处取到极小值，

由 $f(0)=1>0$， $f(a)=1-a^3<0$，则 $f(0)f(a)<0$，

根据零点存在定理 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上有一个零点，

又 $f(-1)=-1-3a<0$， $f(2a)=4a^3+1>0$，则 $f(-1)f(0)<0$， $f(a)f(2a)<0$，

则 $f(x)$ 在 $(-1,0),(a,2a)$ 上各有一个零点，于是 $a>1$ 时， $f(x)$ 有三个零点，A 选项正确；

B 选项，$f'(x)=6x(x-a)$，$a<0$ 时，$x\in(a,0)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取到极小值，B 选项错误；

C 选项，假设存在这样的 a,b，使得 $x=b$ 为 $f(x)$ 的对称轴，

即存在这样的 a,b 使得 $f(x)=f(2b-x)$，

即 $2x^3-3ax^2+1=2(2b-x)^3-3a(2b-x)^2+1$，

根据二项式定理，等式右边 $(2b-x)^3$ 展开式含有 x^3 的项为 $2C_3^3(2b)^0(-x)^3=-2x^3$，

于是等式左右两边 x^3 的系数都不相等，原等式不可能恒成立，

于是不存在这样的 a,b，使得 $x=b$ 为 $f(x)$ 的对称轴，C 选项错误；

D 选项，该三次函数的对称中心为 $\left(\frac{a}{2},f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$，由题意 $(1,f(1))$ 也是对称中心，故 $\frac{a}{2}=1\Leftrightarrow a=2$，即存在 $a=2$ 使得 $(1,f(1))$ 是 $f(x)$ 的对称中心，D 选项正确。

评析：本题以三次函数为载体，考察了函数的极值点、单调性和对称性等核心知识，紧贴教材，符合课程标准。其中对于对称中心的考察，若掌握对称中心的相关知识，则解决此类小题就会更加便捷。

例 3：(2022 新高考一卷)已知函数 $f(x)=x^3-x+1$，则(　)

A. $f(x)$ 有两个极值点

B. $f(x)$ 有三个零点

C. 点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

D. 直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

解析：AC，对于 C 选项：$f(-x)=-x^3+x+1\Rightarrow f(-x)+f(x)=2$

$f(-x)=-x^3+x+1\Rightarrow f(-x)+f(x)=2$　$f(x)$ 关于 $(0,1)$ 对称，故正 C 确。

评析：此题与例 2 类似，同时考察了三次函数的极值点、零点、对称中心和切线。是例 2 的“简化版”。不过从中可以窥到新高考对三次函数对称中心的重视程度，近几年反复考察这一知识点。

4. 小结

随着人教版教材的变更，三次函数的对称中心由以前所谓的“二级结论”逐渐走入正式教材。而近几年三次函数的对称性在新高考中也不断出现。高中人教 A 版教材主编章建跃老师曾指出：要下功夫分析试题与教材的关联，特别是从教材中找出试题的“题源”，引导教学重视教材，回归教材[2]。从教材出发，我们才能夯实牢固的基础。从以上题目也可以看出，求解与可以转化为奇函数加常数的“中心对称”函数相关的题型时，转化与化归的数学思想非常重要。这要求我们平时在做题的时候一定要善于观察，在解题过程中熟练此类问题的解法，积累解题经验[3]。从而不断提高学生的核心素养。

参考文献

[1] 秦小军. 关注探究活动 优化数学教学——以“中心对称与中心对称图形”的教学为例[J]. 数学教学通讯, 2024(17): 43-44.

[2] 章建跃. 高考命题严格“依标”, 教学该怎么办[J]. 中小学数学(高中版), 2023(Z2): 129.

[3] 黄日富. “中心对称”函数相关问题探究——从 2018 年高考题第 16 题出发[J]. 中学生数学, 2021(21): 38-41.