

$K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上分次扩张的子环

陆修灿

桂林信息科技学院基础教研部, 广西 桂林

收稿日期: 2024年12月31日; 录用日期: 2025年2月11日; 发布日期: 2025年2月26日

摘要

斜群环是一类非常重要的环, 其上的分次扩张是一类非常重要的环扩张。本文在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上分次扩张的基础上, 研究了 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上分次扩张的子环, 利用锥的理论证明了 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上分次扩张的子环与之相对应的锥的集合有一个一一对应关系。

关键词

斜群环, 分次扩张, 子环, 锥

Subrings of Graded Extensions in $K\mathbb{Z}^{(n)}$

Xiucan Lu

Basic Teaching and Research Department, Guilin Institute of Information Technology, Guilin Guangxi

Received: Dec. 31st, 2024; accepted: Feb. 11th, 2025; published: Feb. 26th, 2025

Abstract

Skew group rings are a very important class of rings, and the graded extensions over them are a very important class of ring extensions. In this paper, based on the graded extensions over $K\mathbb{Z}^{(n)}$, we study the subrings of the graded extensions over $K\mathbb{Z}^{(n)}$. By using the theory of cones, it is proved that there is a one-to-one correspondence between the set of subrings of the graded extensions over $K\mathbb{Z}^{(n)}$ and the set of corresponding cones.

Keywords

Skew Group Rings, Graded Extension, Subring, Cone



1. 绪论

环论是现代数学的重要分支，斜群环及其分次扩张是环论的重点研究对象，备受学界关注。斜群环由群在环上的作用构建，这一结构为环论问题提供了新视角，在环的结构分类中，能结合群与环的性质，助力复杂环的分类。分次扩张是斜群环的拓展，通过对环分次赋予其更丰富结构。它推动了环论发展，在环的同调性质、理想结构研究中发挥重要作用，且在与其他数学领域交叉中展现强大活力。在表示论中，斜群环及其分次扩张与群、代数表示紧密相关，为研究提供新模型与方法，其分次结构可刻画群表示的不可约性。

设 K 是一个除环， V 是 K 上的一个全赋值环， $A = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} A_u X^u$ 是 V 在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的一个分次扩张。本文探讨用 A 相对应的群的锥刻画 A 的子环。

文献[1][2]研究了斜朗朗多项式环的分次扩张，文献[3]研究了群的锥，为本文 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的分次扩张奠定了基础。在文献[4]中证明了 $\mathbb{Z}^{(2)}$ 上纯锥的集合与 $K[\mathbb{Q}, \sigma]$ 上平凡分次扩张的集合之间存在一个一一对应关系，为本文刻画子环提供了方向。为了帮助读者更好地理解相关概念，下面对斜群环、分次扩张和锥的概念进行简单清晰的解释。

设 K 是一个除环， G 是一个群， $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(K)$ 是一个群同态，其中 $\text{Aut}(K)$ 是 K 的自同构群，斜群环 $K[G, \sigma] = \{\sum k_x g \mid k_x \in K, g \in G\}$ 。

设 A 和 B 是两个分次环，且 $A \subseteq B$ ，如果 B 是一个分次 A -模，并且 $1_B \in B$ （其中 1_B 是 B 的单元元），则称 B 是 A 的分次扩张。

设 G 是一个群， C 是 G 的一个非空子集，如果对于任意的 $x, y \in C$ 和任意的正整数 n, m ，都有 $x^n y^m \in C$ ，则称 C 是 G 中的一个锥。若 C 是群 G 中的锥， H 是 G 的子群，则 $C \cap H$ 是 H 中的锥。

2. $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上分次扩张的子环

本章进一步给出一些对分次扩张和锥直观刻画的例子。

定义 1.1 [1] 设 K 是一个除环。如果对任意的 $k \in K$ ， $k \neq 0$ ，有 $k \in V$ 或 $k^{-1} \in V$ ，则称 V 是 K 的一个全赋值环。

定义 1.2 [5] 设 $A = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} A_u X^u$ 是 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的一个子集。如果对任意的 $u, v \in \mathbb{Z}^{(n)}$ ，有 $A_u \cdot A_v \subseteq A_{u+v}$ ，则称 V 是 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的一个分次子环。

定义 1.3 [5] 设 $A = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} A_u X^u$ 是 V 在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的一个分次子环，且 $A = (0, 0, \dots, 0) = V$ 。如果对任意的 $X \in \mathbb{Z}^{(n)}$ ， $a \in K$ ，有 $aX^u \in A$ 或 $(aX^u)^{-1} \in A$ ，则称 A 是 V 在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的分次扩张。

定义 1.5 [6] 设 $A = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} A_u X^u$ 是 V 在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的一个分次扩张， A 的分次极大理想的交，记作 $J_g(A)$ ，称为 A 的分次 Jacobson 根。

定义 1.7 [4] 一个加群 G 的子集 H 称为锥。如果 $H + H \subseteq H$ ， $H \cup \{-H\} = G$ ，其中

$$-H = \{-h \mid h \in H\}, \quad H \cup \{-H\} = G.$$

定义 1.8 [4] 设 H 是加群 G 的一个锥。如果有 $H \neq G$ ，则称 H 是 G 的真锥。其中 $U(H) = H \cap \{-H\}$

为锥 H 的单位。

定义 1.9 [4] 一个加群 G 的非空子集 H 称为纯锥。如果 $H + H \subseteq H$, $H \cup \{-H\} = G$, $H \cap \{-H\} = \{0\}$, 其中 0 为加群 G 的零元。

定理 1.1 [4] 设 G 是一个有纯锥的群, $K[G, e]$ 有一个左商环 $K(G, e)$, $V \notin K$ 是 K 的一个全赋值环, 则 V 在 $K[G, e]$ 上的所有平凡分次扩张的集合与 G 的所有纯锥的集合之间有一个一一对应关系。

定义 1.10 [7] 设 $A = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} A_u X^u$ 是 V 在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的一个分次扩张。如果对任意的 $u, v \in \mathbb{Z}^{(n)}$, 存在 $\alpha_u, \alpha_v \in K$, 使得 $A_u = V\alpha_u$, $A_{-u} = V\alpha_u^{-1}$ 且 $\alpha_0 = 1$, 有 $\alpha_u \cdot \alpha_v \in K$, 则称 A 是 V 在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的(a)类分次扩张。

下面将研究 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上分次扩张的子环与之相对应的锥的集合存在一个一一对应关系。

设 $A = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} A_u X^u$ 是 V 在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的一个分次扩张。如果存在 $B = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} B_u X^u$ 是 V 在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的一个分次扩张, 有 $S_v(A) = \{B \mid A \subseteq B\}$, 则称 $S_v(A)$ 的集合元素 B 是 V 在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上分次扩张 A 的子环。

引理 2.1 设 $A = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} A_u X^u$ 是 V 在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的一个分次扩张, 令

$$H = \{u \in \mathbb{Z}^{(n)} \mid A_u \cdot A_{-u} = V\},$$

则 H 是一个群, 且对任意的 $r \in \mathbb{Z}^{(n)}$, $u \in H$, 有 $A_u \cdot A_r = A_{u+r}$ 。

引理 2.2 设 $A = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} A_u X^u$ 是 V 在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的一个分次扩张, 令

$$H = \{u \in \mathbb{Z}^{(n)} \mid A_u \cdot A_{-u} = V\}, \quad H_B = \{u \in H \mid A_u = B_u\},$$

则 H_B 是 H 的一个锥。

用简单的符号表示 H 的锥的集合, 记为 C_H 。

引理 2.3 对任意的 $H_0 \in C_H$, 令

$$B = \bigoplus_{u \notin H} A_u X^u \oplus \left(\bigoplus_{u \in H_0} A_u X^u \right) \oplus \left(\bigoplus_{u \in H \setminus H_0} J(V) A_u X^u \right) \triangleq \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} B_u X^u,$$

则 $B_{H_0} \in S_v(A)$ 。

在环论中, 子环是环的一个子集, 它本身对于环的加法和乘法运算也构成一个环。当考虑一些具有特殊结构的环, 如有序环时, 锥集合可以提供一种有效的研究工具。

在有序环 R 中, 可以定义一个正锥 $P \subseteq R$ 。满足以下性质: $P + P \subseteq P$ (加法封闭性), $P \cdot P \subseteq P$ (乘法封闭性), $P \cap P = \{0\}$, 并且对于任意的 $r \in R$, 要么 $r \in P$, 要么 $-r \in P$, 要么 $r = 0$ 。

对于环 R 的子环 S , 通过研究 S 与 R 的正锥 P 的交集 $S \cap P$ 来获取子 S 的性质: $S \cap P$ 的锥集合与子环 S 的序性质之间存在一个一一对应关系。

定理 1.2 设 $A = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} A_u X^u$ 是 V 在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的一个分次扩张, 令 $H = \{u \in \mathbb{Z}^{(n)} \mid A_u \cdot A_{-u} = V\}$, 则 $S_v(A)$ 与 C_H 两集合之间存在一个一一对应的关系。

证明由引理 2.1 和引理 2.2, 构造两个映射:

$$\varphi: S_v(A) \rightarrow C_H, \quad \phi: C_H \rightarrow S_v(A).$$

对任意的 $H_0 \in C_H$, 由引理 2.3 有

$$\phi(H_0) = B_{H_0} = \bigoplus_{u \notin H} A_u X^u \oplus \left(\bigoplus_{u \in H_0} A_u X^u \right) \oplus \left(\bigoplus_{u \in H \setminus H_0} J(V) A_u X^u \right),$$

那么 $\phi(\phi(H_0)) = \phi(B_{H_0}) = H_0$, 即 $\phi \cdot \phi = 1_{C_H}$ 。

对任意的 $B = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} B_u X^u \in S_v(A)$, $\phi(B) = H_B = \{u \in H \mid A_u = B_u\}$ 有

$$\phi(\phi(B)) = \phi(H_B) = B_H = \bigoplus_{u \in H} A_u X^u \oplus \left(\bigoplus_{u \in H_0} A_u X^u \right) \oplus \left(\bigoplus_{u \in H \setminus H_0} J(V) A_u X^u \right) = B,$$

那么 $\phi(\phi(B)) = \phi(H_B) = B$, 即 $\phi \cdot \phi = 1_{S_v(A)}$ 。

故 $S_v(A)$ 与 C_H 两集合之间存在一个一一对应的关系。证毕。

下面探讨 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上(a)类分次扩张的子环, 并给出与之相对应的例子。

如果 $A = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} A_u X^u$ 是 V 在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的(a)类分次扩张, 则由定理 1.2 有下面结论。

命题 设 $A = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} A_u X^u$ 是 V 在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的(a)类分次扩张。对任意 $u, v \in \mathbb{Z}^{(n)}$, 存在 $\alpha_u, \alpha_v \in K$, 使得 $A_u = V\alpha_u$, $A_{-u} = V\alpha_u^{-1}$ 且 $\alpha_0 = 1$, 有 $\alpha_u \cdot \alpha_v = \alpha_{u+v}$, 则 $H = \mathbb{Z}^{(n)}$, $S_v(A)$ 的秩为 $\mathbb{Z}^{(n)}$ 的锥集合的基数。

例 设 F 是一个域, $F[x, y]$ 是域 F 上以 x, y 为不定元的多项式环, 令 $K = F(x, y)$ 是 $F[x, y]$ 的商域, $V = F[x, y]_{(y)}$ 是 $F[x, y]$ 在素理想 (y) 处的局部化, 那么 V 是 K 的全赋值环。

对任意的 $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{(n)}$, 令 $k = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, 则 $A = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} V y^k X^u$ 是 V 在 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的(a)类分次扩张。由命题 $H = \mathbb{Z}^{(n)}$, $S_v(A)$ 的秩为 $\mathbb{Z}^{(n)}$ 的锥集合的基数, 对 $\mathbb{Z}^{(n)}$ 任意的一个真锥 $P \neq \mathbb{Z}^{(n)}$, 令 $B = \bigoplus_{u \in P} A_u X^u \oplus \left(\bigoplus_{u \in H \setminus P} J(V) A_u X^u \right) \triangleq \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^{(n)}} B_u X^u$, 由引理 2.3 得, $B_p \in S_v(A)$ 。

3. 结束语

本文是研究利用锥理论刻画 $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上分次扩张的子环, 但锥理论存在一定的局限性。一环结构的限制: 锥理论在研究结构完整的环时性质对应, 如整数环。但面对非交换环和特征不为零的环时, 由于非交换环中乘法交换律不成立, 故其应用受阻。这使得基于交换定义的锥性质难以应用, 相关理论体系难以搭建; 二环基数的限制: 环基数较大时, 如无限维向量空间上的线性变换环, 用传统方式定义锥并研究其与子环的关系困难重重; 三序结构的复杂性: 在具有特殊序结构的环中, 锥理论推广艰难。如偏序环元素非全序, 正锥定义不能像全序环那样简单确定, 子环与锥的相互作用复杂, 难以用锥理论刻画子环性质; 四环分解和扩张问题: 在环分解(如直和、半直积分解)和扩张(如理想、域扩张)方面, 锥理论应用体系不完备。环直和分解中, 各直和项锥的确定及组合方式不明, 子环性质研究方法缺失; 环扩张时, 新元素对锥结构的影响未知, 新环中合适锥的定义及子环研究方法有待探索。如基于正锥定义, 环中其锥及研究的子环是难题。以上问题有待进一步研究, 可以有力地推动环论研究的持续发展。

参考文献

- [1] Xie, G. and Marubayshi, H. (2008) A Classification of Graded Extensions in a Skew Laurent Polynomial Ring. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **60**, 423-443. <https://doi.org/10.2969/jmsj/06020423>
- [2] Xie, G. and Marubayshi, H. (2009) A Classification of Graded Extensions in a Skew Laurent Polynomial Ring II. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **61**, 1111-1130. <https://doi.org/10.2969/jmsj/06141111>
- [3] Dubrovina, T.V. and Dubrovin, N.I. (1996) Cone in Groups. *Sbornik: Mathematics*, **187**, 1005-1019. <https://doi.org/10.1070/SM1996v187n07ABEH000144>
- [4] 谢光明, 谷学伟, 陈义. $\mathbb{Z}^{(2)}$ 上的纯锥与 $K[\mathbb{Z}^{(2)}, \sigma]$ 上的平凡分次扩张[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2009, 27(4): 36-40.
- [5] Brungs, H.H., Marubayshi, H. and Osmanagic, E. (2007) Gauss Extensions and Total Graded Subrings for Crossed

Product Algebras. *Journal of Algebra*, **316**, 189-205. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2007.06.011>

- [6] Năstăsescu, C. and Van Oystaeyen, F. (1982) Graded Ring Theory. North-Holland Publishing Company, 28.
- [7] 李海贺. $K\mathbb{Z}^{(n)}$ 上的分次扩张[D]: [硕士学位论文]. 桂林: 广西师范大学, 2017.