Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(2), 114-128
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.152053

Hans汉斯

ω-Dendriform代数和ω-Quadri代数

王秋艳

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2025年1月6日；录用日期：2025年2月12日；发布日期：2025年2月26日

摘 要

本文定义了ω-dendriform代数和ω-quadri代数，并且研究了他们之间的代数结构的关系。首先，引入ω-左对称代数的表示的定义，研究其与ω-李代数的表示之间的关系。然后，类比结合代数与dendriform代数和quadri代数之间的关系，定义ω-dendriform代数和ω-quadri代数，并且研究了ω-李代数、ω-左对称代数、ω-dendriform代数和ω-quadri代数之间的关系。

关键词

ω-李代数，ω-Dendriform代数，ω-Quadri代数

ω-Dendriform Algebras and ω-Quadri Algebras

Qiuyan Wang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jan. 6th, 2025; accepted: Feb. 12th, 2025; published: Feb. 26th, 2025

Abstract

In this paper, we define ω-dendriform algebra and ω-quadri algebra, and study the relationship between them. Firstly, the definition of representation of ω-left-symmetric algebra is introduced, and the relationship between the representation on ω-dendriform algebra and ω-Lie algebra is studied. Then, by analogying the relationship among associative algebra, dendriform algebra and quadri algebra, ω-dendriform algebra and ω-quadri algebra are defined, and the relationship among ω-Lie algebra, ω-left-symmetric algebra, ω-dendriform algebra and ω-quadri algebra is studied.

Keywords

ω-Lie Algebra, ω-Dendriform Algebra, ω-Quadri Algebra

文章引用: 王秋艳. ω-Dendriform 代数和 ω-Quadri 代数[J]. 理论数学, 2025, 15(2): 114-128.
DOI: 10.12677/pm.2025.152053

1. 引言

Dendriform 代数是由 Loday 于 1995 年在[1]中引入的，其动机源自于代数 K-理论。Dendriform 代数与数学和物理学的多个领域有着广泛的联系，例如同调理论([2])、李代数和 Leibniz 代数([2])、组合复曲面以及量子群([3])等。此后，更多类似的代数结构相继被提出，包括 Aguiar 和 Loday 引入的 Dendriform 代数([4])、Leroux 提出的 octo-代数等，这些都被统称为 Loday 代数，或在[5]中被称为 ABQR 算子代数。所有这些代数结构均具有“分裂结合性”的性质，即将结合代数的乘法表示为一系列二元运算的和。刘立功类比 Dendriform 代数，从李代数出发，引入了 L-dendriform 代数[6]和 L-quadri 代数[7]。侯冬平同样类比 Dendriform 代数，从 Jordan 代数出发，引入了 J-dendriform 代数[8]。本文用同样的方法，从 ω-李代数出发，引入 ω-dendriform 代数和 ω-quadri 代数，并研究它们与 ω-李代数之间的关系。

设 A 是一个向量空间，$*:A\times A\to A$ 是 A 上的一个双线性映射。定义 $L_*:A\to A$ 是 A 上的左乘运算，即 $L_*(x)(y)=x*y,\forall x,y\in A$。定义 $R_*:A\to A$ 是 A 上的右乘运算，即 $R_*(x)(y)=y*x,\forall x,y\in A$。

本文的结构如下，在第二部分给出 ω-李代数和 ω-左对称代数相关的概念；第三部分引入 ω-dendriform 代数的定义，并且给出 ω-dendriform 代数与 ω-左对称代数和 ω-李代数的关系；第四部分引入 ω-quadri 代数的定义，并且给出 ω-quadri 代数与 ω-dendriform 代数、ω-左对称代数和 ω-李代数的关系。

2. 预备知识

定义 2.1 [9]设 A 是数域 F 上的向量空间，若双线性映射 $[\cdot,\cdot]:A\times A\to A$ 和 A 上的反对称双线性型 $\omega:A\times A\to F$ 满足对于任意 $x,y,z\in A$ 有

$$[x,y]=-[y,x], \tag{2.1}$$

$$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=\omega(x,y)z+\omega(y,z)x+\omega(z,x)y, \tag{2.2}$$

则称 (A,ω) 为 ω-李代数。

定义 2.2 [10]设 (A,ω) 是 ω-李代数，M 是一个向量空间。若线性映射 $\varphi:A\to \mathrm{End}(M)$ 满足

$$\varphi([x,y])m=\varphi(x)\varphi(y)m-\varphi(y)\varphi(x)m+\omega(x,y)m,\forall x,y\in A,m\in M, \tag{2.3}$$

则称 (φ,M) 或 φ 为 (A,ω) 的表示。

定义 2.3 如果 A 是数域 F 上的向量空间，A 上有双线性映射 $(x,y)\mapsto x\cdot y$ 和双线性型 $\omega:A\times A\to F$，如果任意 $x,y,z\in A$ 满足

$$(x\cdot y)\cdot z-x\cdot(y\cdot z)-(y\cdot x)\cdot z+y\cdot(x\cdot z)=\omega(x,y)z, \tag{2.4}$$

则称 $(A,\cdot,\omega)$ 为 ω-左对称代数。

定理 2.1 若在 $(A,\cdot,\omega)$ 上定义

$$[x,y]=x\cdot y-y\cdot x,\forall x,y\in A,$$

则 $(A,[\cdot,\cdot],\omega)$ 是 ω-李代数。定义线性映射 $L:A\to \mathrm{End}(A)$，其中 $L(x)y=x\cdot y,\forall x,y\in A$，则 (L,A) 是 ω-李代数 $(A,[\cdot,\cdot],\omega)$ 的表示。

类似于李代数和左对称代数的关系，本文要引入 ω-dendriform 代数的概念，在此之前我们先定义 ω-左对称代数的表示。

3. ω-Dendriform 代数

定义 3.1 设 $(A,\cdot,\omega)$ 是 ω-左对称代数，V 是一个向量空间。若线性映射 $l,r:A\to \mathrm{End}(V)$ 满足

$$l(x)r(y)-r(y)l(x)-r(x\cdot y)+r(y)r(x)=0, \tag{3.1}$$

$$l(x\cdot y)-l(y\cdot x)-l(x)l(y)+l(y)l(x)=\omega(x,y)\mathrm{id}, \tag{3.2}$$

其中 $x,y\in A$，则称 (l,r,V) 为 ω-左对称代数 $(A,\cdot,\omega)$ 的表示。

命题 3.1 设 $(A,\cdot,\omega)$ 是 ω-左对称代数，V 是一个向量空间。$l,r:A\to \mathrm{End}(V)$ 是线性映射，在 $A\oplus V$ 上定义

$$(x+u)\bullet(y+v)=x\cdot y+l(x)v+r(y)v,$$

$$\Omega(x+u,y+v)=\omega(x,y),$$

$\forall x,y\in A,\ u,v\in V$，则 $(A\oplus V,\bullet,\Omega)$ 是 ω-左对称代数当且仅当 (l,r,V) 是 ω-左对称代数 $(A,\cdot,\omega)$ 的表示。

证 $(A\oplus V,\bullet,\Omega)$ 是 ω-左对称代数当且仅当新定义的运算满足(2.4)式，将新定义的运算带入(2.4)式整理可得，新定义的运算满足(2.4)式当且仅当 (l,r,V) 是 ω-左对称代数 $(A,\cdot,\omega)$ 的表示。

命题 3.2 设 $(A,\cdot,\omega)$ 是 ω-左对称代数，V 是一个向量空间。若线性映射 $l,r:A\to \mathrm{End}(V)$ 是 ω-左对称代数 $(A,\cdot,\omega)$ 的表示，则 $(l-r,V)$ 是 ω-李代数 $(A,[\cdot,\cdot],\omega)$ 的表示。

证 直接验证 $l-r$ 满足(2.3)式即可。

定义 3.2 如果 A 是数域 F 上的向量空间，在 A 上定义两个双线性映射 $*,\circ:A\times A\to A$ 和双线性型 $\omega:A\times A\to F$，若任意 $x,y,z\in A$ 满足

$$x*(y\circ z)-(x*y)\circ z-y\circ(x*z)-y\circ(x\circ z)+(y\circ x)\circ z=0, \tag{3.3}$$

$$(x*y)*z+(x\circ y)*z-(y*x)*z-(y\circ x)*z-x*(y*z)+y*(x*z)=\omega(x,y)z, \tag{3.4}$$

则称 $(A,*,\circ,\omega)$ 为 ω-dendriform 代数。

对于 ω-dendriform 代数 A，由(3.4)可见 ω 是反对称的。当 $\omega=0$ 时，A 是刘立功在[6]中定义的 L-dendriform 代数。

定理 3.1 设 $(A,*,\circ,\omega)$ 是 ω-dendriform 代数，若在 A 上定义

$$x\cdot y=x*y+x\circ y,\forall x,y\in A,$$

则 $(A,\cdot,\omega)$ 是 ω-左对称代数，则 $(L_*,R_\circ,A)$ 是 ω-左对称代数的 $(A,\cdot,\omega)$ 表示。

证 (1) 要证明 $(A,\cdot,\omega)$ 是 ω-左对称代数，只需证明新定义的运算满足(2.4)式。对于(3.3)式，令 $x=y$，$y=x$，则有

$$y*(x\circ z)-(y*x)\circ z-x\circ(y*z)-x\circ(y\circ z)+(x\circ y)\circ z=0, \tag{3.5}$$

将负的(3.3)式、(3.4)式和(3.5)式相加可得

$$\begin{aligned}&-x*(y\circ z)+(x*y)\circ z+y\circ(x*z)+y\circ(x\circ z)-(y\circ x)\circ z+(x*y)*z+(x\circ y)*z-(y*x)*z\\&-(y\circ x)*z-x*(y*z)+y*(x*z)+y*(x\circ z)-(y*x)\circ z-x\circ(y*z)-x\circ(y\circ z)+(x\circ y)\circ z=\omega(x,y)z,\end{aligned}$$

合并第 2、6、7、16 项可得

$$(x*y)\circ z+(x\circ y)\circ z+(x*y)*z+(x\circ y)*z=(x\cdot y)\cdot z,$$

合并第 1、10、14、15 项可得

$$-x\circ(y*z)-x\circ(y\circ z)-x*(y\circ z)-x*(y*z)=-x\cdot(y\cdot z),$$

合并第 5、8、9、13 项可得

$$-(y*x)\circ z-(y\circ x)\circ z-(y*x)*z-(y\circ x)*z=-(y\cdot x)\cdot z,$$

合并第 3、4、11、12 项可得

$$y*(x\circ z)+y\circ(x\circ z)+y\circ(x*z)+y*(x*z)=y\cdot(x\cdot z),$$

则有 $(x\cdot y)\cdot z-x\cdot(y\cdot z)-(y\cdot x)\cdot z+y\cdot(x\cdot z)=\omega(x,y)z$，即 $(A,\cdot,\omega)$ 是 ω-左对称代数。

(2) 要证 $(L_*,R_\circ,A)$ 是 ω-左对称代数 $(A,\cdot,\omega)$ 的表示，只需验证 $L_*,L_\circ$ 满足(3.1)(3.2)式，根据(3.3)式，令 $y=z$， $z=y$，可得

$$x*(z\circ y)-(x*z)\circ y-z\circ(x*y)-z\circ(x\circ y)+(z\circ x)\circ y=0, \tag{3.6}$$

合并第 3、4 项可得

$$-z\circ(x*y)-z\circ(x\circ y)=-z\circ(x\cdot y),$$

从而

$$x*(z\circ y)-(x*z)\circ y-z\circ(x\cdot y)+(z\circ x)\circ y=0,$$

即

$$L_*(x)R_\circ(y)-R_\circ(y)L_*(x)-R_\circ(x\cdot y)+R_\circ(y)R_\circ(x)=0,$$

$L_*,R_\circ$ 满足(3.1)式。

根据(3.4)式

$$(x*y)*z+(x\circ y)*z-(y*x)*z-(y\circ x)*z-x*(y*z)+y*(x*z)=\omega(x,y)z,$$

分别合并第 1、2 项和第 3、4 项可得

$$(x\cdot y)*z-(y\cdot x)*z-x*(y*z)+y*(x*z)=\omega(x,y)z,$$

从而

$$L_*(x\cdot y)-L_*(y\cdot x)-L_*(x)L_*(y)+L_*(y)L_*(x)=\omega(x,y)\mathrm{id},$$

即 $L_*,R_\circ$ 满足(3.2)式，得证。

定理 3.2 设 $(A,*,\circ,\omega)$ 是 ω-dendriform 代数，若在 A 上定义

$$x\times y=x*y-y\circ x,\forall x,y\in A,$$

则 $(A,\times,\omega)$ 是 ω-左对称代数，则 $(L_*,-L_\circ,A)$ 是 ω-左对称代数的 $(A,\cdot,\omega)$ 表示。

证 (1) 要证明 $(A,\times,\omega)$ 是 ω-左对称代数，只需证明新定义的运算满足(2.4)式。对于(3.3)式，令令 $x=y$， $y=z$， $z=x$ 得

$$-y*(z\circ x)+(y*z)\circ x+z\circ(y*x)+z\circ(y\circ x)-(z\circ y)\circ x=0, \tag{3.7}$$

将(3.4) (3.6) (3.7)式相加可得

$$\begin{aligned}&(x*y)*z+(x\circ y)*z-(y*x)*z-(y\circ x)*z-x*(y*z)+y*(x*z)+x*(z\circ y)-(x*z)\circ y-z\circ(x*y)\\&-z\circ(x\circ y)+(z\circ x)\circ y-y*(z\circ x)+(y*z)\circ x+z\circ(y*x)+z\circ(y\circ x)-(z\circ y)\circ x=\omega(x,y)z,\end{aligned}$$

合并第 1、4、9、15 项可得

$$(x*y)*z-(y\circ x)*z-z\circ(x*y)+z\circ(y\circ x)=(x\times y)\times z,$$

合并第 5、7、13、16 项可得

$$-x*(y*z)+x*(z\circ y)+(y*z)\circ x-(z\circ y)\circ x=-x\times(y\times z),$$

合并第 2、3、10、14 项可得

$$-(y*x)*z+(x\circ y)*z+z\circ(y*x)-z\circ(x\circ y)=-(y\times x)\times z,$$

合并第 6、8、11、12 项可得

$$y*(x*z)-y*(z\circ x)-(x*z)\circ y+(z\circ x)\circ y=y\times(x\times z),$$

则有 $(x\times y)\times z-x\times(y\times z)-(y\times x)\times z+y\times(x\times z)=\omega(x,y)z$，即 $(A,\times,\omega)$ 是 ω-左对称代数。

要证 $(L_*,-L_\circ,A)$ 是 ω-左对称代数 $(A,\times,\omega)$ 的表示，只需验证 $L_*,-L_\circ$ 满足(3.1) (3.2)式，根据(3.3)式，

$$-x*(y\circ z)+(x*y)\circ z+y\circ(x*z)+y\circ(x\circ z)-(y\circ x)\circ z=0,$$

合并第 2、5 项可得

$$(x*y)\circ z-(y\circ x)\circ z=(x\times y)\circ z,$$

从而

$$-x*(y\circ z)+(x\times y)\circ z+y\circ(x*z)+y\circ(x\circ z)=0,$$

即

$$L_*(x)(-L_\circ)(y)-(-L_\circ)(y)L_*(x)-(-L_\circ)(x\times y)+(-L_\circ)(y)(-L_\circ)(x)=0,$$

$L_*,-L_\circ$ 满足(3.1)式。

根据(3.4)式

$$(x*y)*z+(x\circ y)*z-(y*x)*z-(y\circ x)*z-x*(y*z)+y*(x*z)=\omega(x,y)z,$$

分别合并第 1、4 项和第 2、3 项可得

$$(x*y)*z-(y\circ x)*z=(x\times y)*z,(x\circ y)*z-(y*x)*z=-(y\times x)*z,$$

从而

$$(x\times y)*z-(y\times x)*z-x*(y*z)+y*(x*z)=\omega(x,y)z,$$

即

$$L_*(x\times y)-L_*(y\times x)-L_*(x)L_*(y)+L_*(y)L_*(x)=\omega(x,y)\mathrm{id},$$

$L_*,-L_\circ$ 满足(3.2)式，得证。

推论 3.1 设 $(A,*,\circ,\omega)$ 是 ω-dendriform 代数，若在 A 上定义

$$[x,y]=x*y+x\circ y-y*x-y\circ x,\forall x,y\in A,$$

则 $(A,[\cdot,\cdot],\omega)$ 是 ω-李代数。

证 根据定理 3.1 知由 $x\cdot y=x*y+x\circ y,\forall x,y\in A$ 定义的代数 $(A,\cdot,\omega)$ 是 ω-左对称代数。又由**定理 2.1** 可知由 $[x,y]=x\cdot y-y\cdot x,\forall x,y\in A$ 定义的 $(A,[\cdot,\cdot],\omega)$ 是 ω-李代数，从而易知如上定义的代数是 ω-李代数。

定义 3.3 设 $(A,*,\circ,\omega)$ 是 ω-dendriform 代数，V 是一个向量空间。若 $l_*,r_*,l_\circ,r_\circ:A\to\mathrm{End}(V)$ 满足

$$l_*([x,y])-[l_*(x),l_*(y)]=\omega(x,y)\mathrm{id}, \tag{3.8}$$

$$[l_*(x),l_\circ(y)]-l_\circ(x*y)+l_\circ(y\circ x)-l_\circ(y)l_\circ(x)=0, \tag{3.9}$$

$$r_*(x*y)-r_*(y)r_*(x)-r_*(y)r_\circ(x)-[l_*(x),r_*(y)]+r_*(y)l_\circ(x)=0, \tag{3.10}$$

$$r_*(x\circ y)-r_\circ(y)r_*(x)-l_\circ(x)r_*(y)-[l_\circ(x),r_\circ(y)]=0, \tag{3.11}$$

$$[l_*(x),r_\circ(y)]-r_\circ(x*y)-r_\circ(x\circ y)+r_\circ(y)r_\circ(x)=0, \tag{3.12}$$

其中

$$[x,y]=x*y+x\circ y-y*x-y\circ x,$$

$\forall x,y\in A$，则称$(l_*,r_*,l_\circ,r_\circ,V)$为$\omega$-dendriform 代数$(A,*,\circ,\omega)$的表示。

命题 3.3 设$(A,*,\circ,\omega)$是ω-dendriform 代数，V是一个向量空间。$l_*,r_*,l_\circ,r_\circ:A\to\mathrm{End}(V)$是线性映射，在$A\oplus V$上定义

$$(x+u)*'(y+v)=x*y+l_*(x)v+r_*(y)v,$$

$$(x+u)\circ'(y+v)=x\circ y+l_\circ(x)v+r_\circ(y)v,$$

$$\Omega(x+u,y+v)=\omega(x,y),$$

$\forall x,y\in A,\ u,v\in V$，则$(A\oplus V,*',\circ',\Omega)$是 ω-左对称代数当且仅当$(l_*,r_*,l_\circ,r_\circ,V)$是 ω-dendriform 代数$(A,*,\circ,\omega)$的表示。

命题 3.4 设$(A,*,\circ,\omega)$是ω-dendriform 代数，V是一个向量空间。若线性映射$l_*,r_*,l_\circ,r_\circ:A\to\mathrm{End}(V)$是$\omega$-dendriform 代数$(A,*,\circ,\omega)$的表示，则$(l_*+l_\circ,r_*+r_\circ,V)$是$\omega$-左对称代数$(A,\cdot,\omega)$的表示。

证 直接验证$l_*+l_\circ,r_*+r_\circ$满足(3.1) (3.2)式即可。

4. ω-Quadri 代数

定义 4.1 设如果A是数域F上的向量空间，在A上定义四个双线性映射$\prec,\succ,\lhd,\rhd: A\times A\to A$和双线性型$\omega:A\times A\to F$，若对任意$x,y,z\in A$满足

$$(x\cdot y)\prec z-(y\cdot x)\prec z-x\prec(y\prec z)+y\prec(x\prec z)=\omega(x,y)z, \tag{4.1}$$

$$x\prec(y\succ z)-(x\vee y)\succ z-y\succ(x*z)+(y\wedge x)\succ z=0, \tag{4.2}$$

$$x\prec(y\lhd z)-(x\prec y)\lhd z-y\lhd(x\cdot z)+(y\lhd x)\lhd z=0, \tag{4.3}$$

$$x\succ(y\circ z)-(x\succ y)\lhd z-y\rhd(x\wedge z)+(y\rhd x)\lhd z=0, \tag{4.4}$$

$$x\prec(y\rhd z)-(x*y)\rhd z-y\rhd(x\vee z)+(y\circ x)\rhd z=0, \tag{4.5}$$

其中

$$x*y=x\prec y+x\succ y, x\circ y=x\lhd y+x\rhd y,$$

$$x\vee y=x\prec y+x\rhd y, x\wedge y=x\succ y+x\lhd y,$$

$$x\cdot y=x\prec y+x\succ y+x\lhd y+x\rhd y=x*y+x\circ y=x\vee y+x\wedge y,$$

则称$(A,\prec,\succ,\lhd,\rhd,\omega)$为$\omega$-quadri 代数。

对于ω-quadri 代数A，由(4.1)式可知ω是反对称的。当$\omega=0$时，A是刘立功在[7]中定义的 L-quadri 代数。

定理 4.1 设 $(A,\prec,\succ,\lhd,\rhd,\omega)$ 是 ω-quadri 代数，若在 A 上定义

$$x*y=x\prec y+x\succ y, x\circ y=x\lhd y+x\rhd y,\forall x,y\in A,$$

则 $(A,*,\circ,\omega)$ 是 ω-dendriform 代数，则 $(L_{\prec},R_{\succ},L_{\rhd},R_{\lhd},A)$ 是 ω-dendriform 代数的 $(A,*,\circ,\omega)$ 表示。

证 (1) 要证明 $(A,*,\circ,\omega)$ 是 ω-dendriform 代数，只需证明新定义的运算满足(3.3) (3.4)式。将(4.3) (4.4) (4.5)式相加可得

$$\begin{aligned}&x\prec(y\lhd z)-(x\prec y)\lhd z-y\lhd(x\cdot z)+(y\lhd x)\lhd z+x\succ(y\circ z)-(x\succ y)\lhd z\\&-y\rhd(x\wedge z)+(y\rhd x)\lhd z+x\prec(y\rhd z)-(x*y)\rhd z-y\rhd(x\vee z)+(y\circ x)\rhd z=0,\end{aligned}$$

按照 $x\vee y=x\prec y+x\rhd y$， $x\wedge y=x\succ y+x\lhd y$ 展开得

$$\begin{aligned}&x\prec(y\lhd z)-(x\prec y)\lhd z-y\lhd(x*z)-y\lhd(x\circ z)+(y\lhd x)\lhd z+x\succ(y\circ z)-(x\succ y)\lhd z-y\rhd(x\succ z)\\&-y\rhd(x\lhd z)+(y\rhd x)\lhd z+x\prec(y\rhd z)-(x*y)\rhd z-y\rhd(x\prec z)-y\rhd(x\rhd z)+(y\circ x)\rhd z=0,\end{aligned}$$

合并第 1、6、11 项可得

$$x\prec(y\lhd z)+x\succ(y\circ z)+x\prec(y\rhd z)=x*(y\circ z),$$

合并第 2、7、12 项可得

$$-(x\prec y)\lhd z-(x\succ y)\lhd z-(x*y)\rhd z=-(x*y)\circ z,$$

合并第 3、8、13 项可得

$$-y\lhd(x*z)-y\rhd(x\succ z)-y\rhd(x\prec z)=-y\circ(x*z),$$

合并第 4、9、14 项可得

$$-y\lhd(x\circ z)-y\rhd(x\lhd z)-y\rhd(x\rhd z)=-y\circ(x\circ z),$$

合并第 5、10、15 项可得

$$(y\lhd x)\lhd z+(y\rhd x)\lhd z+(y\circ x)\rhd z=(y\circ x)\circ z,$$

从而

$$x*(y\circ z)-(x*y)\circ z-y\circ(x*z)-y\circ(x\circ z)+(y\circ x)\circ z=0,$$

即满足(3.3)式。

对于(4.2)式，令 $x=y$， $y=x$ 得

$$y\prec(x\succ z)-(y\vee x)\succ z-x\succ(y*z)+(x\wedge y)\succ z=0. \tag{4.6}$$

将(4.1)式减(4.2)式加(4.6)式得

$$\begin{aligned}&(x\cdot y)\prec z-(y\cdot x)\prec z-x\prec(y\prec z)+y\prec(x\prec z)-x(y\succ z)+(x\vee y)\succ z+y\succ(x*z)\\&-(y\wedge x)\succ z+y\prec(x\succ z)-(y\vee x)\succ z-x\succ(y*z)+(x\wedge y)\succ z=\omega(x,y)z,\end{aligned}$$

按照 $x\vee y=x\prec y+x\rhd y$， $x\wedge y=x\succ y+x\lhd y$ 展开得

$$\begin{aligned}&(x*y)\prec z+(x\circ y)\prec z-(y*x)\prec z-(y\circ x)\prec z-x\prec(y\prec z)+y\prec(x\prec z)-x(y\succ z)+(x\prec y)\succ z\\&+(x\rhd y)\succ z+y\succ(x*z)-(y\succ x)\succ z-(y\lhd x)\succ z+y\prec(x\succ z)-(y\prec x)\succ z-(y\rhd x)\succ z\\&-x\succ(y*z)+(x\succ y)\succ z+(x\lhd y)\succ z=\omega(x,y)z,\end{aligned}$$

合并第 1、8、17 项可得

$$(x*y)\prec z+(x\prec y)\succ z+(x\succ y)\succ z=(x*y)*z,$$

合并第 2、9、18 项可得

$$(x\circ y)\prec z+(x\rhd y)\succ z+(x\lhd y)\succ z=(x\circ y)*z,$$

合并第 3、11、14 项可得

$$-(y*x)\prec z-(y\succ x)\succ z-(y\prec x)\succ z=-(y*x)*z,$$

合并第 4、12、15 项可得

$$-(y\circ x)\prec z-(y\lhd x)\succ z-(y\rhd x)\succ z=-(y\circ x)*z,$$

合并第 5、7、16 项可得

$$-x\prec(y\prec z)-x(y\succ z)-x\succ(y*z)=-x*(y*z),$$

合并第 6、10、13 项可得

$$y\prec(x\prec z)+y\succ(x*z)+y\prec(x\succ z)=y*(x*z),$$

从而

$$(x*y)*z+(x\circ y)*z-(y*x)*z-(y\circ x)*z-x*(y*z)+y*(x*z)=\omega(x,y)z,$$

即(3.4)式。得证。

(2) 要证$(L_\prec,R_\succ,L_\rhd,R_\lhd,A)$是 ω-dendriform 代数$(A,\cdot,\omega)$的表示，只需验证 $L_\prec,R_\succ,L_\rhd,R_\lhd$ 满足(3.8) (3.9) (3.10) (3.11) (3.12)式。

对于(4.1)式合并前两项可得

$$[x,y]\prec z-x\prec(y\prec z)+y\prec(x\prec z)=\omega(x,y)z,$$

即 $L_\prec([x,y])(z)-L_\prec(x)L_\prec(y)(z)-L_\prec(y)L_\prec(x)(z)=\omega(x,y)z$， $L_\prec,R_\succ,L_\rhd,R_\lhd$ 满足(3.8)式。

对于(4.5)式按照 $x\vee y=x\prec y+x\rhd y$， $x\wedge y=x\succ y+x\lhd y$ 展开得

$$x\prec(y\rhd z)-(x*y)\rhd z-y\rhd(x\prec z)-y\rhd(x\rhd z)+(y\circ x)\rhd z=0,$$

即 $L_\prec(x)L_\rhd(y)(z)-L_\rhd(x*y)(z)-L_\rhd(y)L_\prec(x)(z)-L_\rhd(y)L_\rhd(x)(z)+L_\rhd(y\circ x)(z)=0$， $L_\prec,R_\succ,L_\rhd,R_\lhd$ 满足(3.9)式。

对于(4.2)式，令 $y=z$， $z=y$ 得

$$-x\prec(z\succ y)+(x\vee z)\succ y+z\succ(x*y)-(z\wedge x)\succ y=0,$$

按照 $x\vee y=x\prec y+x\rhd y$， $x\wedge y=x\succ y+x\lhd y$ 展开得

$$-x\prec(z\succ y)+(x\prec z)\succ y+(x\rhd z)\succ y+z\succ(x*y)-(z\succ x)\succ y-(z\lhd x)\succ y=0,$$

即 $-L_\prec(x)R_\succ(y)(z)+R_\succ(y)L_\prec(x)(x)+R_\succ(y)L_\rhd(x)(z)+R_\succ(x*y)(z)-R_\succ(y)R_\succ(x)(z)-R_\succ(y)R_\rhd(x)(z)=0$， $L_\prec,R_\succ,L_\rhd,R_\lhd$ 满足(3.10)式。

对于(4.4)式，令 $x=z$， $y=x$， $z=y$ 得

$$z\succ(x\circ y)-(z\succ x)\lhd y-x\rhd(z\wedge y)+(x\rhd z)\lhd y=0,$$

按照 $x\vee y=x\prec y+x\rhd y$， $x\wedge y=x\succ y+x\lhd y$ 展开得

$$z\succ(x\circ y)-(z\succ x)\lhd y-x\rhd(z\succ y)-x\rhd(z\lhd y)+(x\rhd z)\lhd y=0,$$

即 $L_{\succ}(x\circ y)(z)-R_{\lhd}(y)R_{\succ}(x)(z)-L_{\lhd}(x)R_{\lhd}(y)(z)+R_{\lhd}(y)L_{\rhd}(x)(z)=0$， $L_{\prec},R_{\succ},L_{\rhd},R_{\lhd}$ 满足(3.11)式。

对于(4.3)式，令 $y=z$， $z=y$ 得

$$x\prec(z\lhd y)-(x\prec z)\lhd y-z\lhd(x\cdot y)+(z\lhd x)\lhd y=0,$$

根据 $x\cdot y=x*y+x\circ y$ 展开得

$$x\prec(z\lhd y)-(x\prec z)\lhd y-z\lhd(x*y)-z\lhd(x\circ y)+(z\lhd x)\lhd y=0,$$

即 $L_{\prec}(x)R_{\lhd}(y)(z)-R_{\lhd}(y)L_{\prec}(x)(z)-R_{\lhd}(x*y)(z)-R_{\lhd}(x\circ y)(z)+R_{\lhd}(y)R_{\lhd}(x)(z)=0$， $L_{\prec},R_{\succ},L_{\rhd},R_{\lhd}$ 满足(3.12)式。得证。

定理 4.2 设 $(A,\prec,\succ,\lhd,\rhd,\omega)$ 是 ω-quadri 代数，若在 A 上定义

$$x\vee y=x\prec y+x\rhd y,x\wedge y=x\succ y+x\lhd y,\forall x,y\in A,$$

则 $(A,\vee,\wedge,\omega)$ 是 ω-dendriform 代数，则 $(L_{\prec},R_{\rhd},L_{\succ},R_{\lhd},A)$ 是 ω-dendriform 代数的 $(A,\vee,\wedge,\omega)$ 表示。

证 (1) 要证明 $(A,\vee,\wedge,\omega)$ 是 ω-dendriform 代数，只需证明新定义的运算满足(3.3)式和(3.4)式。对于(4.4)式，令 $x=y$， $y=x$ 得

$$y\succ(x\circ z)-(y\succ x)\lhd z-x\rhd(y\wedge z)+(x\rhd y)\lhd z=0. \tag{4.7}$$

将(4.2)式、(4.3)式和(4.7)式相加得

$$\begin{aligned}&x\prec(y\succ z)-(x\vee y)\succ z-y\succ(x*z)+(y\wedge x)\succ z+x\prec(y\lhd z)-(x\prec y)\lhd z\\&-y\lhd(x\cdot z)+(y\lhd x)\lhd z-y\succ(x\circ z)+(y\succ x)\lhd z+x\rhd(y\wedge z)-(x\rhd y)\lhd z=0,\end{aligned}$$

根据 $x*y=x\prec y+x\succ y$， $x\circ y=x\lhd y+x\rhd y$ 展开得

$$\begin{aligned}&x\prec(y\succ z)-(x\vee y)\succ z-y\succ(x\prec z)-y\succ(x\succ z)+(y\wedge x)\succ z+x\prec(y\lhd z)-(x\prec y)\lhd z-y\lhd(x\vee z)\\&-y\lhd(x\wedge z)+(y\lhd x)\lhd z-y\succ(x\lhd z)-y\succ(x\rhd z)+(y\succ x)\lhd z+x\rhd(y\wedge z)-(x\rhd y)\lhd z=0,\end{aligned}$$

合并第 1、6、14 项可得

$$x\prec(y\succ z)+x\prec(y\lhd z)+x\rhd(y\wedge z)=x\vee(y\wedge z),$$

合并第 2、7、15 项可得

$$-(x\vee y)\succ z-(x\prec y)\lhd z-(x\rhd y)\lhd z=-(x\vee y)\wedge z,$$

合并第 3、8、12 项可得

$$-y\succ(x\prec z)-y\lhd(x\vee z)-y\succ(x\rhd z)=-y\wedge(x\vee z),$$

合并第 4、9、11 项可得

$$-y\succ(x\succ z)-y\lhd(x\wedge z)-y\succ(x\lhd z)=-y\wedge(x\wedge z),$$

合并第 5、10、13 项可得

$$(y\wedge x)\succ z+(y\lhd x)\lhd z+(y\succ x)\lhd z=(y\wedge x)\wedge z,$$

则有

$$x\vee(y\wedge z)-(x\vee y)\wedge z-y\wedge(x\vee z)-y\wedge(x\wedge z)+(y\wedge x)\wedge z=0,$$

即(3.3)式。

对于(4.5)式，令 $x=y$， $y=x$ 得

$$y\prec(x\rhd z)-(y*x)\rhd z-x\rhd(y\vee z)+(x\circ y)\rhd z=0, \tag{4.8}$$

将(4.1)式减(4.5)式加(4.8)式得

$$\begin{aligned}&(x\cdot y)\prec z-(y\cdot x)\prec z-x\prec(y\prec z)+y\prec(x\prec z)-x\prec(y\rhd z)+(x*y)\rhd z+y\rhd(x\vee z)\\&-(y\circ x)\rhd z+y\prec(x\rhd z)-(y*x)\rhd z-x\rhd(y\vee z)+(x\circ y)\rhd z=\omega(x,y)z,\end{aligned}$$

根据 $x*y=x\prec y+x\succ y$， $x\circ y=x\lhd y+x\rhd y$ 展开得

$$\begin{aligned}&(x\vee y)\prec z+(x\wedge y)\prec z-(y\vee x)\prec z-(y\wedge x)\prec z-x\prec(y\prec z)+y\prec(x\prec z)-x\prec(y\rhd z)\\&+(x\prec y)\rhd z+(x\succ y)\rhd z+y\rhd(x\vee z)-(y\lhd x)\rhd z-(y\rhd x)\rhd z+y\prec(x\rhd z)-(y\prec x)\rhd z\\&-(y\succ x)\rhd z-x\rhd(y\vee z)+(x\rhd y)\rhd z+(x\lhd y)\rhd z=\omega(x,y)z,\end{aligned}$$

合并第 1、8、17 项可得

$$(x\vee y)\prec z+(x\prec y)\rhd z+(x\rhd y)\rhd z=(x\vee y)\vee z,$$

合并第 2、9、18 项可得

$$(x\wedge y)\prec z+(x\succ y)\rhd z+(x\lhd y)\rhd z=(x\vee y)\vee z,$$

合并第 3、12、14 项可得

$$-(y\vee x)\prec z-(y\rhd x)\rhd z-(y\prec x)\rhd z=-(y\vee x)\vee z,$$

合并第 4、11、15 项可得

$$-(y\wedge x)\prec z-(y\lhd x)\rhd z-(y\succ x)\rhd z=-(y\wedge x)\vee z,$$

合并第 5、7、16 项可得

$$-x\prec(y\prec z)-x\prec(y\rhd z)-x\rhd(y\vee z)=-x\vee(y\vee z),$$

合并第 6、10、13 项可得

$$y\prec(x\prec z)+y\rhd(x\vee z)+y\prec(x\rhd z)=y\vee(x\vee z),$$

则有

$$(x\vee y)\vee z+(x\wedge y)\vee z-(y\vee x)\vee z-(y\wedge x)\vee z-x\vee(y\vee z)+y\vee(x\vee z)=\omega(x,y)z,$$

即满足(3.4)式。

(2) 要证 $(L_\prec,R_\rhd,L_\succ,R_\lhd,A)$ 是 ω-dendriform 代数 $(A,\cdot,\omega)$ 的表示，只需验证 $L_\prec,R_\rhd,L_\succ,R_\lhd$ 满足(3.8) (3.9) (3.10) (3.11) (3.12)式。

对于(4.1)式，根据 $x\cdot y=x\vee y+x\wedge y$ 展开得

$$(x\vee y)\prec z+(x\wedge y)\prec z-(y\vee x)\prec z-(y\wedge x)\prec z-x\prec(y\prec z)+y\prec(x\prec z)=\omega(x,y)z,$$

即 $L_\prec(x\vee y)(z)+L_\prec(x\wedge y)(z)-L_\prec(y\vee x)(z)-L_\prec(y\wedge x)(z)-L_\prec(x)L_\prec(y)(z)+L_\prec(y)L_\prec(x)(z)=\omega(x,y)z$ ， $L_\prec,R_\rhd,L_\succ,R_\lhd$ 满足(3.8)式。

对于(4.2)式

$$x\prec(y\succ z)-(x\vee y)\succ z-y\succ(x*z)+(y\wedge x)\succ z=0,$$

根据 $x*y=x\prec y+x\succ y,x\circ y=x\lhd y+x\rhd y$ 展开得

$$x\prec(y\succ z)-(x\vee y)\succ z-y\succ(x\prec z)-y\succ(x\succ z)+(y\wedge x)\succ z=0,$$

即 $L_\prec(x)L_\succ(y)(z)-L_\succ(x\vee y)(z)-L_\succ(y)L_\prec(x)(z)-L_\succ(y)L_\succ(x)(z)+L_\succ(y\wedge x)(z)=0$ ， $L_\prec,R_\rhd,L_\succ,R_\lhd$ 满足

(3.9)式。

对于(4.5)式，令 $y=z$， $z=y$ 得

$$-x\prec(z\rhd y)+(x*z)\rhd y+z\rhd(x\vee y)-(z\circ x)\rhd y=0,$$

根据 $x*y=x\prec y+x\succ y$， $x\circ y=x\lhd y+x\rhd y$ 展开得

$$-x\prec(z\rhd y)+(x\prec z)\rhd y+(x\succ z)\rhd y+z\rhd(x\vee y)-(z\lhd x)\rhd y-(z\rhd x)\rhd y=0,$$

即 $-L_{\prec}(x)R_{\rhd}(y)(z)+R_{\rhd}(y)L_{\prec}(x)(z)+R_{\rhd}(y)L_{\succ}(x)(z)+R_{\rhd}(x\vee y)(z)-R_{\rhd}(y)R_{\lhd}(x)(z)-R_{\rhd}(y)R_{\rhd}(x)(z)=0$，$L_{\prec},R_{\rhd},L_{\succ},R_{\lhd}$ 满足(3.10)式。

对于(4.4)式，令 $y=z$， $z=y$ 得

$$-x\succ(z\circ y)+(x\succ z)\lhd y+z\rhd(x\wedge y)-(z\rhd x)\lhd y=0,$$

根据 $x*y=x\prec y+x\succ y$， $x\circ y=x\lhd y+x\rhd y$ 展开得

$$-x\succ(z\lhd y)-x\succ(z\rhd y)+(x\succ z)\lhd y+z\rhd(x\wedge y)-(z\rhd x)\lhd y=0,$$

即 $-L_{\succ}(x)R_{\lhd}(y)(z)-L_{\succ}(x)R_{\rhd}(y)(z)+R_{\lhd}(y)L_{\succ}(x)(z)+R_{\rhd}(x\wedge y)(z)-R_{\lhd}(y)R_{\rhd}(x)(z)=0$，$L_{\prec},R_{\rhd},L_{\succ},R_{\lhd}$ 满足(3.11)式。

对于(4.3)式，令 $y=z$， $z=y$ 得

$$x\prec(z\lhd y)-(x\prec z)\lhd y-z\lhd(x\cdot y)+(z\lhd x)\lhd y=0,$$

根据 $x\cdot y=x\vee y+x\wedge y$ 展开得

$$x\prec(z\lhd y)-(x\prec z)\lhd y-z\lhd(x\vee y)-z\lhd(x\wedge y)+(z\lhd x)\lhd y=0,$$

即 $L_{\prec}(x)R_{\lhd}(y)(z)-R_{\lhd}(y)L_{\prec}(x)(z)-R_{\lhd}(x\vee y)(z)-R_{\lhd}(x\wedge y)(z)+R_{\lhd}(y)R_{\lhd}(x)(z)=0$， $L_{\prec},R_{\rhd},L_{\succ},R_{\lhd}$ 满足(3.12)式。得证。

定理 4.3 设 $(A,\prec,\succ,\lhd,\rhd,\omega)$ 是 ω-quadri 代数，若在 A 上定义

$$x\to y=x\prec y-y\lhd x,x\leftarrow y=x\succ y-y\rhd x,\forall x,y\in A,$$

则 $(A,\to,\leftarrow,\omega)$ 是 ω-dendriform 代数，则 $(L_{\prec},-L_{\lhd},L_{\succ},-L_{\rhd},A)$ 是 ω-dendriform 代数的 $(A,\to,\leftarrow,\omega)$ 表示。

证 (1) 要证明 $(A,\to,\leftarrow,\omega)$ 是 ω-dendriform 代数，只需证明新定义的运算满足(3.1)式和(3.2)式。对于(4.5)式，令 $y=z$， $z=y$ 得

$$-x\prec(z\rhd y)+(x*z)\rhd y+z\rhd(x\vee y)-(z\circ x)\rhd y=0, \tag{4.9}$$

对于(4.4)式，令 $x=y$， $y=z$， $z=x$ 得

$$y\succ(z\circ x)-(y\succ z)\lhd x-z\rhd(y\wedge x)+(z\rhd y)\lhd x=0. \tag{4.10}$$

将(4.2)式、(4.9)式和(4.10)式相加可得

$$\begin{aligned}&x\prec(y\succ z)-(x\vee y)\succ z-y\succ(x*z)+(y\wedge x)\succ z-x\prec(z\rhd y)+(x*z)\rhd y\\&+z\rhd(x\vee y)-(z\circ x)\rhd y+y\succ(z\circ x)-(y\succ z)\lhd x-z\rhd(y\wedge x)+(z\rhd y)\lhd x=0,\end{aligned}$$

根据 $x*y=x\prec y+x\succ y$， $x\circ y=x\lhd y+x\rhd y$ 和 $x\vee y=x\prec y+x\rhd y$， $x\wedge y=x\succ y+x\lhd y$ 展开得

$$\begin{aligned}&x\prec(y\succ z)-(x\prec y)\succ z-(x\rhd y)\succ z-y\succ(x\prec z)-y\succ(x\succ z)+(y\succ x)\succ z+(y\lhd x)\succ z-x\prec(z\rhd y)\\&+(x\prec z)\rhd y+(x\succ z)\rhd y+z\rhd(x\prec y)+z\rhd(x\rhd y)-(z\rhd x)\rhd y-(z\lhd x)\rhd y+y\succ(z\lhd x)+y\succ(z\rhd x)\\&-(y\succ z)\lhd x-z\rhd(y\succ x)-z\rhd(y\lhd x)+(z\rhd y)\lhd x=0,\end{aligned}$$

合并第 1、8、17、20 项可得

$$x \prec (y \succ z) - x \prec (z \rhd y) - (y \succ z) \lhd x + (z \rhd y) \lhd x = x \to (y \leftarrow z),$$

合并第 2、7、11、19 项可得

$$-(x \prec y) \succ z + (y \lhd x) \succ z + z \rhd (x \prec y) - z \rhd (y \lhd x) = -(x \to y) \leftarrow z,$$

合并第 4、9、14、15 项可得

$$-y \succ (x \prec z) + (x \prec z) \rhd y - (z \lhd x) \rhd y + y \succ (z \lhd x) = -y \leftarrow (x \to z),$$

合并第 5、10、13、16 项可得

$$-y \succ (x \succ z) + (x \succ z) \rhd y - (z \rhd x) \rhd y + y \succ (z \rhd x) = -y \leftarrow (x \leftarrow z),$$

合并第 3、6、12、18 项可得

$$-(x \rhd y) \succ z + (y \succ x) \succ z + z \rhd (x \rhd y) - z \rhd (y \succ x) = (y \leftarrow x) \leftarrow z,$$

则有

$$x \to (y \leftarrow z) - (x \to y) \leftarrow z - y \leftarrow (x \to z) - y \leftarrow (x \leftarrow z) + (y \leftarrow x) \leftarrow z = 0,$$

即满足(3.1)式。

对于(4.3)式，令 $y = z$， $z = y$ 得

$$x \prec (z \lhd y) - (x \prec z) \lhd y - z \lhd (x \cdot y) + (z \lhd x) \lhd y = 0, \tag{4.11}$$

对于(4.3)式，令 $x = y$， $y = z$， $z = x$ 得

$$y \prec (z \lhd x) - (y \prec z) \lhd x - z \lhd (y \cdot x) + (z \lhd y) \lhd x = 0, \tag{4.12}$$

将(4.1)式、(4.11)式和(4.12)式相加可得

$$\begin{aligned}&(x \cdot y) \prec z - (y \cdot x) \prec z - x \prec (y \prec z) + y \prec (x \prec z) + x \prec (z \lhd y) - (x \prec z) \lhd y - z \lhd (x \cdot y)\\&+ (z \lhd x) \lhd y - y \prec (z \lhd x) + (y \prec z) \lhd x + z \lhd (y \cdot x) - (z \lhd y) \lhd x = \omega(x, y) z,\end{aligned}$$

根据 $x * y = x \prec y + x \succ y$， $x \circ y = x \lhd y + x \rhd y$ 和 $x \vee y = x \prec y + x \rhd y$， $x \wedge y = x \succ y + x \lhd y$ 展开得

$$\begin{aligned}&(x \prec y) \prec z + (x \succ y) \prec z + (x \lhd y) \prec z + (x \rhd y) \prec z - (y \prec x) \prec z - (y \succ x) \prec z - (y \lhd x) \prec z\\&- (y \rhd x) \prec z - x \prec (y \prec z) + y \prec (x \prec z) + x \prec (z \lhd y) - (x \prec z) \lhd y - z \lhd (x \prec y) - z \lhd (x \succ y)\\&- z \lhd (x \lhd y) - z \lhd (x \rhd y) + (z \lhd x) \lhd y - y \prec (z \lhd x) + (y \prec z) \lhd x + z \lhd (y \prec x) + z \lhd (y \succ x)\\&+ z \lhd (y \lhd x) + z \lhd (y \rhd x) - (z \lhd y) \lhd x = \omega(x, y) z,\end{aligned}$$

合并第 1、7、13、22 项可得

$$(x \prec y) \prec z - (y \lhd x) \prec z - z \lhd (x \prec y) + z \lhd (y \lhd x) = (x \to y) \to z,$$

合并第 2、8、14、23 项可得

$$(x \succ y) \prec z - (y \rhd x) \prec z - z \lhd (x \succ y) + z \lhd (y \rhd x) = (x \leftarrow y) \to z,$$

合并第 3、5、15、20 项可得

$$(x \lhd y) \prec z - (y \prec x) \prec z - z \lhd (x \lhd y) + z \lhd (y \prec x) = -(y \to x) \to z,$$

合并第 4、6、16、21 项可得

$$(x \rhd y) \prec z - (y \succ x) \prec z - z \lhd (x \rhd y) + z \lhd (y \succ x) = -(y \leftarrow x) \to z,$$

合并第 9、11、19、24 项可得

$$-x\prec(y\prec z)+x\prec(z\lhd y)+(y\prec z)\lhd x-(z\lhd y)\lhd x=-x\to(y\to z),$$

合并第 10、12、17、18 项可得

$$y\prec(x\prec z)-(x\prec z)\lhd y+(z\lhd x)\lhd y-y\prec(z\lhd x)=y\to(x\to z),$$

则有

$$(x\to y)\to z+(x\leftarrow y)\to z-(y\to x)\to z-(y\leftarrow x)\to z-x\to(y\to z)+y\to(x\to z)=\omega(x,y)z,$$

即满足(3.2)式。

(2) 要证 $(L_\prec,-L_\lhd,L_\succ,-L_\rhd,A)$ 是 ω-左对称代数 $(A,\cdot,\omega)$ 的表示，只需验证 $L_\prec,-L_\lhd,L_\succ,-L_\rhd$ 满足(3.8) (3.9) (3.10) (3.11) (3.12)式。

对于(4.1)式，按照 $x\cdot y=x\prec y+x\succ y+x\lhd y+x\rhd y$ 展开得

$$\begin{aligned}&(x\prec y)\prec z+(x\succ y)\prec z+(x\lhd y)\prec z+(x\rhd y)\prec z-(y\prec x)\prec z-(y\succ x)\\&\prec z-(y\lhd x)\prec z-(y\rhd x)\prec z-x\prec(y\prec z)+y\prec(x\prec z)=\omega(x,y)z,\end{aligned}$$

按照 $x\to y=x\prec y-y\lhd x$， $x\leftarrow y=x\succ y-y\rhd x$ 合并得

$$(x\to y)\prec z+(x\leftarrow y)\prec z-(y\to x)\prec z-(y\leftarrow x)\prec z-x\prec(y\prec z)+y\prec(x\prec z)=\omega(x,y)z,$$

即

$$([x,y])\prec z-x\prec(y\prec z)+y\prec(x\prec z)=\omega(x,y)z,$$

亦即 $L_\prec([x,y])(z)-L_\prec(x)L_\prec(y)(z)+L_\prec(y)L_\prec(x)(z)=\omega(x,y)z$， $L_\prec,-L_\lhd,L_\succ,-L_\rhd$ 满足(3.8)式。

对于(4.2)式，根据 $x*y=x\prec y+x\succ y$， $x\vee y=x\prec y+x\rhd y$， $x\wedge y=x\succ y+x\lhd y$ 展开得

$$x\prec(y\succ z)-(x\prec y)\succ z-(x\rhd y)\succ z-y\succ(x\prec z)-y\succ(x\succ z)+(y\succ x)\succ z+(y\lhd x)\succ z=0,$$

按照 $x\to y=x\prec y-y\lhd x,x\leftarrow y=x\succ y-y\rhd x$ 合并得

$$x\prec(y\succ z)-(x\to y)\succ z-y\succ(x\prec z)-y\succ(x\succ z)+(y\leftarrow x)\succ z=0,$$

即 $L_\prec(x)L_\succ(y)(z)-L_\succ(x\to y)(z)-L_\succ(y)L_\prec(x)(z)-L_\succ(y)L_\succ(x)(x)+L_\succ(y\leftarrow x)(z)=0$， $L_\prec,-L_\lhd,L_\succ,-L_\rhd$ 满足(3.9)式。

对于(4.3)式，根据 $x\cdot y=x\prec y+x\succ y+x\lhd y+x\rhd y$ 展开得

$$x\prec(y\lhd z)-(x\prec y)\lhd z-y\lhd(x\prec z)-y\lhd(x\succ z)-y\lhd(x\lhd z)-y\lhd(x\rhd z)+(y\lhd x)\lhd z=0,$$

按照 $x\to y=x\prec y-y\lhd x,x\leftarrow y=x\succ y-y\rhd x$ 合并得

$$x\prec(y\lhd z)-(x\to y)\lhd z-y\lhd(x\prec z)-y\lhd(x\succ z)-y\lhd(x\lhd z)-y\lhd(x\rhd z)=0,$$

即 $L_\prec(x)L_\lhd(z)-L_\lhd(x\to y)(z)-L_\lhd(y)L_\prec(x)(z)-L_\lhd(y)L_\succ(x)(z)-L_\lhd(y)L_\lhd(x)(z)-L_\lhd(y)L_\rhd(x)(z)=0$， $L_\prec,-L_\lhd,L_\succ,-L_\rhd$ 满足(3.10)式。

对于(4.4)式，根据 $x\circ y=x\lhd y+x\rhd y$， $x\wedge y=x\succ y+x\lhd y$ 展开得

$$x\succ(y\lhd z)+x\succ(y\rhd z)-(x\succ y)\lhd z-y\rhd(x\succ z)-y\rhd(x\lhd z)+(y\rhd x)\lhd z=0,$$

按照 $x\leftarrow y=x\succ y-y\rhd x$ 合并得

$$x\succ(y\lhd z)+x\succ(y\rhd z)-(x\leftarrow y)\lhd z-y\rhd(x\succ z)-y\rhd(x\lhd z)=0,$$

即 $L_{\succ}(x)L_{\lhd}(y)(z)+L_{\succ}(x)L_{\rhd}(y)(z)-L_{\lhd}(x\leftarrow y)(z)+L_{\rhd}(y)L_{\succ}(x)(z)-L_{\rhd}(y)L_{\lhd}(x)(z)=0$，$L_{\prec},-L_{\lhd},L_{\succ},-L_{\rhd}$ 满足(3.11)式。

对于(4.5)式，根据 $x*y=x\prec y+x\succ y$，$x\circ y=x\lhd y+x\rhd y$，$x\vee y=x\prec y+x\rhd y$ 展开得

$$-x\prec(y\rhd z)+(x\succ y)\rhd z+(x\prec y)\rhd z+y\rhd(x\prec z)+y\rhd(x\rhd z)-(y\lhd x)\rhd z-(y\rhd x)\rhd z=0,$$

按照 $x\to y=x\prec y-y\lhd x, x\leftarrow y=x\succ y-y\rhd x$ 合并得

$$-x\prec(y\rhd z)+(x\leftarrow y)\rhd z+(x\to y)\rhd z+y\rhd(x\prec z)+y\rhd(x\rhd z)=0,$$

即 $-L_{\prec}(x)L_{\rhd}(y)(z)+L_{\rhd}(x\leftarrow y)(z)+L_{\rhd}(x\to y)(z)+L_{\rhd}(y)L_{\prec}(x)(z)+L_{\rhd}(y)L_{\rhd}(x)(z)=0$，$L_{\prec},-L_{\lhd},L_{\succ},-L_{\rhd}$ 满足(3.12)式，得证。

推论 4.1 设 $(A,\prec,\succ,\lhd,\rhd,\omega)$ 是 ω-quadri 代数。设 $L_{\prec},L_{\succ},L_{\lhd},L_{\rhd},R_{\succ},R_{\lhd},R_{\rhd}:A\to \mathrm{End}(V)$ 是线性映射。

(1) 若在 A 上定义

$$x\cdot y=x\prec y+x\succ y+x\lhd y+x\rhd y=x*y+x\circ y=x\vee y+x\wedge y,\forall x,y\in A,$$

则 $(A,\cdot,\omega)$ 是 ω-左对称代数，且 $L_{\prec}+L_{\succ},R_{\rhd}+R_{\lhd}$ 是 ω-左对称代数 $(A,\cdot,\omega)$ 的表示，$L_{\prec}+L_{\rhd},R_{\succ}+R_{\lhd}$ 也是 ω-左对称代数 $(A,\cdot,\omega)$ 的表示。

(2) 若在 A 上定义

$$x\times y=x\prec y+x\rhd y-y\succ x-y\lhd x=x\vee y-y\wedge x=x\to y-y\leftarrow x,\forall x,y\in A,$$

则 $(A,\times,\omega)$ 是 ω-左对称代数，且 $L_{\prec}+L_{\rhd},-(L_{\succ}+L_{\lhd})$ 是 ω-左对称代数 $(A,\times,\omega)$ 的表示，$L_{\prec}-R_{\lhd}$，$R_{\rhd}-L_{\succ}$ 也是 ω-左对称代数 $(A,\times,\omega)$ 的表示。

(3) 若在 A 上定义

$$x\bullet y=x\prec y+x\succ y-y\lhd x-y\rhd x=x*y-y\circ x=x\to y+x\leftarrow y,\forall x,y\in A,$$

则 $(A,\bullet,\omega)$ 是 ω-左对称代数，且 $L_{\prec}+L_{\succ},-(L_{\rhd}+L_{\lhd})$ 是 ω-左对称代数 $(A,\bullet,\omega)$ 的表示，$L_{\prec}-R_{\lhd}$，$R_{\succ}-L_{\rhd}$ 也是 ω-左对称代数 $(A,\bullet,\omega)$ 的表示。

证由**定理 4.1** 可知由 $x*y=x\prec y+x\succ y$，$x\circ y=x\lhd y+x\rhd y$，$\forall x,y\in A$ 定义的代数 $(A,*,\circ,\omega)$ 是 ω-dendriform 代数。又定理 3.1 可知 $x\cdot y=x*y+x\circ y$，$\forall x,y\in A$ 定义的代数 $(A,\cdot,\omega)$ 是 ω-左对称代数，易知(1)中定义的新的代数是 ω-左对称代数。$L_{\prec}+L_{\succ}$，$R_{\rhd}+R_{\lhd}$ 和 $L_{\prec}+L_{\rhd}$，$R_{\succ}+R_{\lhd}$ 是 ω-左对称代数 $(A,\cdot,\omega)$ 的表示只需验证满足(3.1) (3.2)式即可。

又由**定理 3.2** 可知由 $x\times y=x*y-y\circ x$，$\forall x,y\in A$ 定义的代数 $(A,\times,\omega)$ 是 ω-左对称代数，易知(3)中定义的新的代数是 ω-左对称代数。$L_{\prec}+L_{\succ},-(L_{\rhd}+L_{\lhd})$ 和 $L_{\prec}-R_{\lhd}$，$R_{\succ}-L_{\rhd}$ 是 ω-左对称代数 $(A,\bullet,\omega)$ 的表示只需验证满足(3.1) (3.2)式即可。

由**定理 4.2** 可知由 $x\vee y=x\prec y+x\rhd y$，$x\wedge y=x\succ y+x\lhd y$，$\forall x,y\in A$ 定义的代数 $(A,\vee,\wedge,\omega)$ 是 ω-dendriform 代数。又由**定理 3.2** 可知由 $x\times y=x*y-y\circ x$，$\forall x,y\in A$ 定义的代数 $(A,\times,\omega)$ 是 ω-左对称代数，易知(2)中定义的新的代数是 ω-左对称代数。$L_{\prec}+L_{\rhd},-(L_{\succ}+L_{\lhd})$ 和 $L_{\prec}-R_{\lhd}$，$R_{\rhd}-L_{\succ}$ 是 ω-左对称代数 $(A,\times,\omega)$ 的表示只需验证满足(3.1) (3.2)式即可。

推论 4.2 设 $(A,\prec,\succ,\lhd,\rhd,\omega)$ 是 ω-quadri 代数，若在 A 上定义

$$[x,y]=x\prec y+x\succ y+x\lhd y+x\rhd y-y\prec x-y\succ x-y\lhd x-y\rhd x,\forall x,y\in A,$$

则 $(A,[\cdot,\cdot],\omega)$ 是 ω-李代数。

证 由**推论 3.1** 和**推论 4.1** 易证。

参考文献

[1] Loday, J.-L. (2001) Dialgebras, in Dialgebras and Related Operads. Springer-Verlag.

[2] Frabetti, A. (1998) Leibniz Homilogy of Dialgebras of Matrices. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **129**, 123-141. https://doi.org/10.1016/s0022-4049(97)00066-2

[3] Foissy, L. (2002) Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés, II. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **126**, 249-288. https://doi.org/10.1016/s0007-4497(02)01113-2

[4] Aguiar, M. and Loday, J. (2004) Quadri-Algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **191**, 205-221. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2004.01.002

[5] Ebrahimi-Fard, K. and Guo, L. (2005) On Products and Duality of Binary, Quadratic, Regular Operads. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **200**, 293-317. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2004.12.020

[6] Bai, C., Liu, L. and Ni, X. (2010) Some Results on L-Dendriform Algebras. *Journal of Geometry and Physics*, **60**, 940-950. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2010.02.007

[7] Liu, L., Bai, C. and Ni, X. (2011) L-Quadri-Algebras. *SCIENTIA SINICA Mathematica*, **41**, 105-124. https://doi.org/10.1360/012009-1000

[8] Hou, D. and Bai, C. (2011) J-Dendriform Algebras. *Frontiers of Mathematics in China*, **7**, 29-49. https://doi.org/10.1007/s11464-011-0160-7

[9] Nurowski, P. (2007) Deforming a Lie Algebra by Means of a 2-Form. *Journal of Geometry and Physics*, **57**, 1325-1329. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2006.10.008

[10] Zusmanovich, P. (2010) ω-Lie Algebras. *Journal of Geometry and Physics*, **60**, 1028-1044. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2010.03.005