Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(2), 129-137
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.152054

一类三维抛物方程解的稳定性

马志扬

成都理工大学数学科学学院，四川 成都

收稿日期：2024年12月27日；录用日期：2025年2月14日；发布日期：2025年2月28日

摘 要

本文主要通过辅助积分法对具有时空依赖的外波源的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f\left(x,y,z,t,u\right)$$

的解的稳定性进行了讨论。分别讨论了方程关于$g\left(x,y,z,t\right)$的稳定性，关于不同初值情况下的稳定性和关于不同初值和边值情况下的稳定性。

关键词

辅助积分法，稳定性，抛物方程，热传导方程

Stability of Solutions for a Class of Three Dimensional Parabolic Equations

Zhiyang Ma

School of Mathematical Sciences, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: Dec. 27th, 2024; accepted: Feb. 14th, 2025; published: Feb. 28th, 2025

Abstract

In this paper, the stability of the solution of the heat conduction equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f\left(x,y,z,t,u\right)$$

for a time-space dependent external wave source is discussed by means of the auxiliary integral method. The stability of the equation with respect to $g\left(x,y,z,t\right)$, with respect to different initial values and with respect to different initial and boundary values are discussed respectively.

文章引用: 马志扬. 一类三维抛物方程解的稳定性[J]. 理论数学, 2025, 15(2): 129-137.
DOI: 10.12677/pm.2025.152054

Keywords

Auxiliary Integral Method, Stability, Parabolic Equation, Heat Conduction Equation

1. 前言

1.1. 研究抛物方程稳定性的目的及意义

人们对抛物方程的研究随着时代的进步和科技的发展有了更深刻的理解，前人对方程的研究局限于研究解的存在性和唯一性。而如今，在不少数学家的努力下，研究又进一步发展到了研究解的稳定性、单调性、解的爆破等方面。其中研究解的稳定性具有重大的意义。

任何系统，都会在一定程度上受到各种各样的干扰，而受到干扰后恢复原来的运行状态的能力和保持原来的运行状态的能力都与方程的解的稳定性有关，所以研究抛物方程解的稳定性具有十分重要的意义，研究它的目的是使我们能够更加理解系统的稳定性，从而能对生活中的一系列问题的深入理解并提出解决方法。抛物方程解的稳定性对于研究抛物方程的解的变化趋势和一些特性具有十分重要的意义，所以证明解的稳定性是一件十分重要的工作，推广证明解的稳定性的方法，使其能够得到更广泛的应用，这就是本次研究的意义所在。

1.2. 研究历史

稳定性的概念和理论由俄国数学家李雅普诺夫于 19 世纪 90 年代所创立，在《常微分方程》[1]一书中提到的李雅普诺夫稳定性就是由他定义的。在此之后不少学者不断完善着稳定性理论，并作出了一些发展。他们做出的努力主要是把此方法推广到研究不同的问题，即不同系统在不同情况下的稳定性。到现在，人们证明方程解的稳定性已经有了很多方法。姜礼尚在他所著《数学物理方程讲义》[2]一书中，详细介绍了能量法，弱极值原理等方法。1983 年，官毓德在发表的[3]中介绍了用于证明解的稳定性的辅助积分法。对于稳定性的理解，顾樵(德)在其所著《数学物理方法》[4]一书中的理解是考查定解条件或驱动项的微小变化是否导致解的性质的改变。杨雯抒在其发表的《含参数的非线性抛物方程解的稳定性》[5]中用李雅普诺夫稳定性方法研究一类含参数的二阶非线性抛物方程边值问题，也具有一定的参考性。施法鹏，杨裕生在[6]中使用了能量积分来证明抛物方程解的稳定性，也是一种常见的经典方法，实用性较广，有效可行。梁飞，尹洪辉在发表的[7]中，引用了稳态解的定义，并用上解和下解来证明了解是全局渐进稳定的，这种方法十分具有参考性。同时，我还参考了[8]-[10]等各种关于稳定性问题的文献，发现他们所用的方法还是极值原理，能量积分等，没有在方法上做出创新。抛物方程解的存在性是指方程在某一矩形区域内满足利普希兹条件([2]常微分方程第 77 页)，则方程存在唯一解，该引理可由皮卡逐步逼近法来证明。稳定性是适定性的一部分。一个定解问题是适定的等价于该方程的解是存在的，唯一的和稳定的。只要所给抛物方程能合理地描述对应的物理现象，那么它的解应该是适定的。但是在实际中总是存在误差，而误差会对方程的解造成一定的影响，所以我们需要对定解问题的存在性、唯一性和稳定性进行分析，选取合理的定解问题和定解条件(初值条件和边值条件)。如[11]中就研究了一些抛物方程的存在唯一性，使用了 poincare 不等式，Holder 不等式等引理，讨论了奇异扩散方程的齐次 Neumann 问

题。又如[12]-[15]等。都是用各种不同的方法在研究各种抛物方程的适定性，都有参考的价值。而[16]中使用格林函数方法得到半线性伪抛物线方程的逐点收敛速率。通过使用这种精确的逐点结构，并在初始数据上引入负指数 Sobolev 空间条件，释放了爆炸的非线性临界指数。结果表明，全局存在不仅取决于非线性，还取决于初始条件。也具有一定的参考性。

1.3. 本文的研究目标和主要内容

本文通过构造辅助积分对方程解的稳定性进行证明。首先选定了具有时空依赖的外波源的热传导方程作为研究对象，然后选择了第二边值条件和初值条件，导出了证明过程中所需要的一些条件。然后分别证明具有不同外波源，不同初值以及不同初值和边值条件下方程解的稳定性所需要的条件。为了具体确定物体内部的温度分布，我们还需要知道物体内部的初始温度分布以及通过物体的边界受周围介质的影响。初始温度体现在数据上即为方程的初值条件 $u(x,y,z,0)$，热传导方程有三类边界条件，分别是：1. 已知边界 $\partial\Omega$ 上的温度分布；2. 已知通过边界 $\partial\Omega$ 的热量；3. 已知通过边界 $\partial\Omega$ 与周围介质有热交换。其中第二边值条件就是第二类条件，已知通过边界 $\partial\Omega$ 的热量：$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\Psi(x,y,z,t)$。热传导方程里面的外波源指的是热源，热传导是一个很正常的现象，当物体内部的温度分布不均时，热量就会从温度较高的地方向温度较低的地方流动。在这个过程中，温度是时间和空间的函数。热传导方程就是温度所满足的偏微分方程，它的解给出任意时刻物体内的温度分布。当热传导方程为源热传导方程时，即物体内部或外部有热源时，方程的表现形式即为摘要中所示。具有时空依赖的外波源的热传导方程，即源热传导方程可以用来分析物体的温度随时间的变化情况，这使得它在现实生活中常常被用来分析物体的温度变化情况。比如钢铁工业中对产成品镀锌钢板的质量检测问题就涉及到介质中的热传导问题。除此之外，热传导方程还在金融数学，图像分析和黎曼几何等领域具有应用价值，因此十分值得研究。

2. 证明过程

2.1. 方程及初步推导

辅助积分之所以构造成这个样子，是因为在后续的计算过程中我们发现可以利用 $J(t)$ 得到解的稳定性，在本论文的计算过程以及参考论文[3]中，可以体会到它的具体用处。接下来引入热传导方程的混合问题，它是一个三维抛物方程：

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(x,y,z,t,u)\\ u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)\\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\Psi(x,y,z,t)\end{cases}$$

其中 $f(x,y,z,t,u)$ 在相应区域中关于 u 满足 Lipschitz 条件：

$$\left|f(x,y,z,t,u_1)-f(x,y,z,t,u_2)\right|\le L\left|u_1-u_2\right| \tag{1}$$

假设方程有两个解 $u_1(x,y,z,t)$，$u_2(x,y,z,t)$，令 $u\equiv u_1-u_2$，则 u 满足：

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial n}=0\\ u(x,y,z,0)=0\\ \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(x,y,z,t,u_1)-f(x,y,z,t,u_2)\end{cases} \tag{2}$$

现在构造辅助积分

$$J(t)=\iiint_{\Omega}u^{2}(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{3}$$

则

$$\begin{aligned}J'(t)&=2\cdot\iiint_{\Omega}u\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=2\cdot\iiint_{\Omega}u\cdot\left[a^{2}\Delta u+f(x,y,z,t,u_{1})-f(x,y,z,t,u_{2})\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&\le 2\cdot\iiint_{\Omega}|u|\cdot\left|f(x,y,z,t,u_{1})-f(x,y,z,t,u_{2})\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2\cdot a^{2}\iiint_{\Omega}u\cdot\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&\le 2\cdot L\iiint_{\Omega}u^{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2\cdot a^{2}\iiint_{\Omega}u\cdot\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=2LJ(t)+2a^{2}\iiint_{\Omega}u\cdot\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

再由格林第一公式：

$$\iiint_{\Omega}u\cdot\Delta v\mathrm{d}V=\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

令 $v=u$，则

$$\iiint_{\Omega}u\cdot\Delta u\mathrm{d}V=\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

于是，由 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ 得

$$J'(t)\le 2LJ(t)+2a^{2}\left[\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right] \tag{4}$$

$$\le 2LJ(t)-2a^{2}\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{5}$$

于是有估计：

$$J'(t)\le 2LJ(t)$$

$$J'(t)\mathrm{e}^{-2Lt}-2LJ(t)\mathrm{e}^{-2Lt}\le 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-2Lt}\cdot J(t)\right]\le 0$$

$$\mathrm{e}^{-2Lt}\cdot J(t)-J(0)\le 0$$

$$J(t)\le J(0)\mathrm{e}^{2Lt} \tag{6}$$

2.2. 关于 $g(x,y,z,t)$ 的稳定性

如果方程变为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^{2}\Delta u+f(x,y,z,t,u)+g(x,y,z,t)$$

并设 u_1，u_2 分别为具有时空依赖外波源 $g_1(x,y,z,t)$，$g_2(x,y,z,t)$ 的两个方程的解，又令 $u \equiv u_1 - u_2$，则 u 也满足齐次边界条件和齐次初值条件(2)，同时有：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,y,z,t,u_1) - f(x,y,z,t,u_2) + g(x,y,z,t) \tag{7}$$

其中 $g(x,y,z,t) \equiv g_1(x,y,z,t) - g_2(x,y,z,t)$。

利用辅助积分 $J(t) = \iiint\limits_{\Omega} u^2(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，并利用(7)得：

$$\begin{aligned}
J'(t) &= 2\iiint\limits_{\Omega} u\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 2\iiint\limits_{\Omega} u\left[a^2\Delta u + f(x,y,z,t,u_1) - f(x,y,z,t,u_2) + g(x,y,z,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&\le 2\iiint\limits_{\Omega} u(x,y,z,t)\cdot g(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2L\cdot J(t) \\
&\quad + 2a^2\left[\iint\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S - \iiint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right] \\
&\le 2L\cdot J(t) + 2\iiint\limits_{\Omega} u(x,y,z,t)\,g(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \left(\text{因为}\frac{\partial u}{\partial n} = 0\right) \\
&\le 2L\cdot J(t) + \iiint\limits_{\Omega} u^2(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega} g^2(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= (2L+1)J(t) + \iiint\limits_{\Omega} g^2(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-(2L+1)t}\cdot J(t)\right] = -(2L+1)\mathrm{e}^{-(2L+1)t}J(t) + \mathrm{e}^{-(2L+1)t}J'(t)$$

将 $J'(t) \le (2L+1)J(t) + \iiint\limits_{\Omega} g^2(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 代入上式即得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-(2L+1)t}\cdot J(t)\right] \le \mathrm{e}^{-(2L+1)t}\cdot\iiint\limits_{\Omega} g^2(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

所以

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-(2L+1)t}\cdot J(t)\right] &\le \mathrm{e}^{-(2L+1)t}\cdot\iiint\limits_{\Omega} g^2(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&\le \iiint\limits_{\Omega} g^2(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

两边关于 t 积分得：

$$\mathrm{e}^{-(2L+1)t}\cdot J(t) - J(0) \le \int_0^t\iiint\limits_{\Omega} g^2(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

由(2)中 $u(x,y,z,0) = 0$ 得 $J(0) = 0$，于是

$$J(t) \le \mathrm{e}^{(2L+1)t}\cdot\int_0^t\iiint\limits_{\Omega} g^2(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

如果令 $t \in [0,T]$，则：

$$\iiint\limits_{\Omega} u^2(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \le B\cdot\int_0^t\iiint\limits_{\Omega} g^2(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

其中 B 是与 T 有关的常数，方程的解关于 $g(x,y,z,t)$ 是稳定的等价于：

$$\forall\varepsilon>0\text{，}\ \exists\delta_T>0\text{，}\ \forall\left\|g_1(x,y,z,t)-g_2(x,y,z,t)\right\|_{L^2(\Omega\times[0,T])}<\delta_T$$

有：

$$\left\|u_1(x,y,z,t)-u_2(x,y,z,t)\right\|_{L^2(\Omega)}<\varepsilon\quad\forall t\in[0,T]\text{成立}$$

2.3. 关于初值的稳定性

设 u_1,u_2 分别为具有不同初值 $\varphi_1(x,y,z),\varphi_2(x,y,z)$ 的问题的解，同时令 $u\equiv u_1-u_2$，则 u 满足：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial n}=0\\ u(x,y,z,0)=\varphi_1(x,y,z)-\varphi_2(x,y,z)\equiv\varphi(x,y,z)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(x,y,z,t,u_1)-f(x,y,z,t,u_2)\end{cases}\tag{8}$$

由 $J(t)=\iiint\limits_{\Omega}u^2(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 得：

$$J(t)\le J(0)\mathrm{e}^{2Lt}$$

由 $u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)$ 得：

$$\iiint\limits_{\Omega}u^2(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\le\mathrm{e}^{2Lt}\iiint\limits_{\Omega}\varphi^2(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

令 $t\in[0,T]$，则：

$$\iiint\limits_{\Omega}u^2(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\le\tilde{B}\iiint\limits_{\Omega}\varphi^2(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $\tilde{B}$ 是与 T 有关的常数，即解关于初值的稳定性可以总结为：

$$\forall\varepsilon>0\text{，}\ \exists\delta_T>0\text{，当}\left\|\varphi_1(x,y,z)-\varphi_2(x,y,z)\right\|_{L^2(\Omega)}<\delta_T\text{，}$$

有：

$$\left\|u_1(x,y,z,t)-u_2(x,y,z,t)\right\|_{L^2(\Omega)}<\varepsilon\quad\forall t\in[0,T]\text{成立}$$

2.4. 关于初值和边值的稳定性

设 u_1,u_2 分别为具有不同初值和边值的问题的解，则 $u\equiv u_1-u_2$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial n}=\psi_1(x,y,z,t)-\psi_2(x,y,z,t)\equiv\psi(x,y,z,t)\\ u(x,y,z,0)=\varphi_1(x,y,z)-\varphi_2(x,y,z)\equiv\varphi(x,y,z)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(x,y,z,t,u_1)-f(x,y,z,t,u_2)\end{cases}\tag{9}$$

引用辅助积分

$$\iiint\limits_{\Omega}u^2(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

同 2.1 的证明过程一样，将下列条件

$$\left|f(x,y,z,t,u_1)-f(x,y,z,t,u_2)\right| \le L\left|u_1-u_2\right| \text{和} \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(x,y,z,t,u_1)-f(x,y,z,t,u_2)$$

代入 $J(t)$ 的表达式得出：

$$J'(t)\le 2L\cdot J(t)+2a^2\left[\iint_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]$$

再由：$\dfrac{\partial u}{\partial n}=\psi(x,y,z,t)$，

有估计：

$$\begin{aligned}J'(t)&=2\iiint_{\Omega} u\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=2\iiint_{\Omega} u\left[a^2\Delta u+f(x,y,z,t,u_1)-f(x,y,z,t,u_2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=2a^2\iiint_{\Omega} u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2\iiint_{\Omega} u\left[f(x,y,z,t,u_1)-f(x,y,z,t,u_2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

由格林第一公式

$$\iint_{\partial u} u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega} u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{，得：}$$

$$\begin{aligned}J'(t)&=2a^2\left\{\iint_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right\}\\&\quad+2\iiint_{\Omega} u\left[f(x,y,z,t,u_1)-f(x,y,z,t,u_2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&\le 2a^2\iint_{\partial\Omega} u\psi(x,y,z,t)\mathrm{d}S-2a^2\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&\quad+2\iiint_{\Omega} u^2(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&\le 2L\cdot J(t)+2a^2\iint_{\partial\Omega} u\psi(x,y,z,t)\mathrm{d}S-2a^2\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&\le 2L\cdot J(t)+2a^2\iint_{\partial\Omega} u\psi(x,y,z,t)\mathrm{d}S\end{aligned}$$

对 $\iint_{\partial\Omega} u\psi(x,y,z,t)\mathrm{d}S$ 使用柯西不等式得：

$$J'(t)\le 2L\cdot J(t)+2a^2\left(\iint_{\partial\Omega} u^2(x,y,z,t)\mathrm{d}S\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_{\partial\Omega}\psi^2(x,y,z,t)\mathrm{d}S\right)^{\frac{1}{2}}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-2Lt}\cdot J(t)\right]\le 2a^2\left(\iint_{\partial\Omega} u^2(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_{\partial\Omega}\psi^2(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$J(t)\le \mathrm{e}^{2Lt}\cdot J(0)+2a^2\mathrm{e}^{2Lt}\int_0^t\left(\iint_{\partial\Omega} u^2(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_{\partial\Omega}\psi^2(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

再利用一次柯西不等式得：

$$J(t) \le \mathrm{e}^{2Lt} \cdot J(0) + 2a^2\mathrm{e}^{2Lt}\left(\int_0^t \iint_{\partial\Omega} u^2(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \iint_{\partial\Omega} \psi^2(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

现假设 $u(x,y,z,t)$ 属于有界函数类，则

$$\forall T > 0, \int_0^T \iint_{\partial\Omega} u^2(x,y,z,t)\mathrm{d}S\mathrm{d}t < +\infty,$$

令 $t \in [0,T]$，有：

$$\iiint_{\Omega} u^2(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \le \hat{B}\iiint_{\Omega} \varphi^2(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \overline{B}\left(\int_0^T \iint_{\partial\Omega} \psi^2(x,y,z,t)\mathrm{d}S\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $\hat{B},\overline{B}$ 是与 T 有关的常数，即方程的解如果属于有界函数类，则满足下列条件时解关于初值和边值条件是稳定的：

$$\forall \varepsilon > 0，\exists \delta_T > 0，当 \left\|\varphi_1(x,y,z) - \varphi_2(x,y,z)\right\|_{L^2(\Omega)} < \delta_T，$$

$$\left\|\psi_1(x,y,z,t) - \psi_2(x,y,z,t)\right\|_{L^2(\partial\Omega\times[0,T])} < \delta_T，$$

有：

$$\left\|u_1(x,y,z,t) - u_2(x,y,z,t)\right\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon，\quad \forall t \in [0,T] 成立$$

3. 结论

要满足解对初值或边值或时空依赖的外波源的稳定性，必须满足一定的条件。研究这些稳定性的目的是为了证明驱动项(如初值和边值条件等)的微小变化不会导致解的性质的改变(比如：驱动项受到干扰前的解和干扰后的解之间有较大误差)。所以只要证明方程中的初值和边值等条件受到干扰时，热传导方程的解的前后变动极其微小，即可证明解的稳定性，此时可以称方程的解对于驱动项受到的干扰并不敏感，具有稳定性。研究热传导方程解的稳定性对于利用热传导方程进行建模的数学物理模型具有重大的意义，例如对于依赖时间的热传导方程，方程的稳定性是非常重要的，不稳定的数值方法可能会导致计算区域内的数值解被污染，即数值解的准确性受到影响。

关于各项的稳定性总结为：

1. 方程的解关于 $g(x,y,z,t)$ 是稳定的等价于：

$$\forall \varepsilon > 0，\exists \delta_T > 0，当 \left\|g_1(x,y,z,t) - g_2(x,y,z,t)\right\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} < \delta_T，$$

有：

$$\left\|u_1(x,y,z,t) - u_2(x,y,z,t)\right\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon \quad \forall t \in [0,T] 成立$$

2. 解关于初值是稳定性的等价于：

$$\forall \varepsilon > 0，\exists \delta_T > 0，当 \left\|\varphi_1(x,y,z) - \varphi_2(x,y,z)\right\|_{L^2(\Omega)} < \delta_T，$$

有：

$$\left\|u_1(x,y,z,t) - u_2(x,y,z,t)\right\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon \quad \forall t \in [0,T] 成立$$

3. 解关于初值和边值条件是稳定的等价于：

$$\forall\varepsilon>0，\ \exists\delta_T>0，\text{当}\left\|\varphi_1(x,y,z)-\varphi_2(x,y,z)\right\|_{L^2(\Omega)}<\delta_T，$$

$$\left\|\psi_1(x,y,z,t)-\psi_2(x,y,z,t)\right\|_{L^2(\partial\Omega\times[0,T])}<\delta_T，$$

有：

$$\left\|u_1(x,y,z,t)-u_2(x,y,z,t)\right\|_{L^2(\Omega)}<\varepsilon，\ \forall t\in[0,T]\text{成立}$$

参考文献

[1] 王高雄. 常微分方程[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[2] 姜礼尚. 数学物理方程讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[3] 官毓德. 一类热传导方程解的唯一性、稳定性的辅助积分法[J]. 四川师院学报(自然科学版), 1983(4): 54-62.

[4] 顾樵. 数学物理方法[M]. 北京: 科学出版社, 2019.

[5] 杨雯抒. 含参数的非线性抛物方程解的稳定性[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2013, 31(1): 53-55.

[6] 施法鹏, 杨裕生. 一类非线性抛物型方程解的稳定性与唯一性[J]. 工科数学, 1995(1): 16-19.

[7] 梁飞, 尹洪辉. 一个非局部抛物方程的稳态解及其稳定性[J]. 淮阴师范学院学报(自然科学版), 2011, 10(2): 95-98.

[8] 张璐. 带有 Laplace 算子的非局部方程解的稳定性[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中科技大学, 2014.

[9] 廖晓昕. 稳定性的理论、方法和应用[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1999: 39-69.

[10] 周臻. 一类退化抛物方程的解的稳定性及其相关性质研究[D]: [硕士学位论文]. 厦门: 集美大学, 2018.

[11] 林雪清. 一类抛物方程(组)适定性的若干性质之研究[D]: [硕士学位论文]. 厦门: 集美大学, 2011.

[12] 李珊珊. 波方程, 热方程与 NLS 方程的整体适定性研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2014.

[13] 刘晓平. 两类非线性抛物方程的适定性研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2016.

[14] 王宇彤. 带非经典抛物项的非线性发展方程的解的适定性[D]: [博士学位论文]. 上海: 上海交通大学, 2019.

[15] 于涛. 非线性热传导方程适定性研究[D]: [博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2012.

[16] Wang, W. and Wang, Y. (2019) The Well-Posedness of Solution to Semilinear Pseudo-Parabolic Equation. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, *English Series*, **35**, 386-400. https://doi.org/10.1007/s10255-019-0817-7