

临界阻尼型Navier-Stokes方程在 Lei-Lin-Gevrey空间 $X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3)$ 中的局部适定性

刘爱博, 常莹

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2024年12月30日; 录用日期: 2025年2月14日; 发布日期: 2025年2月28日

摘 要

本文证明带有临界型阻尼项的Navier-Stokes方程在Lei-Lin-Gevrey空间 $X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3)$ 中存在唯一的局部解。文章利用不动点定理和热方程解的有关性质来证明这一主要结论。

关键词

阻尼, Navier-Stokes方程, Lei-Lin-Gevrey空间, 局部解

The Local Suitability of the Critical Damping Navier-Stokes Equation in Lei-Lin-Gevrey Space $X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3)$

Aibo Liu, Ying Chang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 30th, 2024; accepted: Feb. 14th, 2025; published: Feb. 28th, 2025

Abstract

In this paper, it is proved that the Navier-Stokes equation with critical damping terms has a unique local solution in the Lei-Lin-Gevrey space $X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3)$. In this paper, the main conclusion is proved by using the fixed point theorem and the related properties of the solution of the heat equation.

文章引用: 刘爱博, 常莹. 临界阻尼型 Navier-Stokes 方程在 Lei-Lin-Gevrey 空间 $X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3)$ 中的局部适定性[J]. 理论数学, 2025, 15(2): 138-146. DOI: 10.12677/pm.2025.152055

Keywords

Damping, Navier-Stokes Equations, Lei-Lin-Gevrey Space, Local Solution

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在数学发展史中, 经典 Navier-Stokes 方程一直得到广泛关注, 该研究方向也已经有许多优秀成果。包括, Hopf 研究了 Navier-Stokes 方程在有界域中弱解的全局存在性[1], Fujita 和 Kato 研究了经典 Navier-Stokes 方程在小初值情况下强解的全局适定性[2], Tsai-Tai-Peng 证明了 Navier-Stokes 方程具有温和解[3]; Robinson 证明了 Navier-Stokes 方程的 3D 弱解的整体存在性和在小初值情况下 3D 强解的整体存在性[4], Melo, Souza 和 Santos 通过研究 MHD- α 方程证明了其在 $C_b([0, \infty); X_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3))$ 空间中存在唯一全局解, 并且在相同背景下给出了全局解的衰减率[5]等。

近些年, 众多学者对带有阻尼项的 Navier-Stokes 方程进行了研究, 其中阻尼项为流体运动的阻力, 它描述了各种物理情况, 如多孔介质流动, 阻力或摩擦效应以及一些耗散机制等。目前在该领域已取得许多成果, 包括, 蔡晓静和周艳杰研究了广义阻尼型 Navier-Stokes 方程强解的整体存在性[6], 刘晓风和邹露露研究了阻尼型三维广义 Navier-Stokes 方程的适定性与解的衰减性[7], 蔡晓静和酒全森证明了 $\alpha|u|^{\beta-1}u$ 的 Navier-Stokes 方程解的存在性和唯一性[8]等。在针对 Navier-Stokes 方程的研究进程中, 学者们逐渐发现 Lei-Lin-Gevrey 空间的特殊优势, 它可以更好地刻画流体的物理性质和运动状态, 并在湍流建模, 多相流等物理系统的研究中发挥重要作用。本文将研究阻尼项为 $|u|^2u$ 的临界阻尼型 Navier-Stokes 方程在 Lei-Lin-Gevrey 空间 $X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3)$ 中的局部适定。具体研究方程如下:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p + |u|^2 u &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中 $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)) \in \mathbb{R}^3$ 表示不可压缩速度场, $p(x, t) \in \mathbb{R}$ 表示静水压力; 速度场的初始数据 u_0 在方程(1.1)中给出, 假设散度自由, 即 $\operatorname{div} u_0 = 0$ 。

本文参考广义 Navier-Stokes 方程 $u_t + (-\Delta)^a u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, 在 Lei-Lin-Gevrey 空间 $X_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ 空间中的一些结果(参见[9] [10])。本文的主要结果如下。

定理 1.1 设 $u_0 \in X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3)$, $(a, \sigma) \in [0, +\infty) \times [1, +\infty)$, 则存在 $T > 0$, 使方程(1.1)存在唯一局部解 $u \in C_T(X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^1(X_{a,\sigma}^2(\mathbb{R}^3))$, 并且满足 $\|u\|_{L_T^\infty(X_{a,\sigma}^0)} + \|u\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^2)} \leq 4\|u_0\|_{X_{a,\sigma}^0}$ 。

注记 1.1 带有阻尼项的 Navier-Stokes 方程(1.1)在 Lei-Lin-Gevrey 空间 $X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3)$ 中, 在时间和空间尺度变化下是不变的。更准确的说, 如果 u 是方程(1.1)的解, 那么对于任意 $\lambda > 0$, 函数 $u_\lambda(x, t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^{2a} t)$ 也是方程(1.1)的解。

注记 1.2 为了获得阻尼 Navier-Stokes 方程(1.1)的温和解, 我们将应用广义不动点定理(见引理 3.2)。为此, 我们需要证明一个双线性算子和一个三线性算子的连续有界性(见(4.5)和(4.6))。

下面, 我们将给出以下符号表示和相关引理。

2 符号表示

1. $S'(\mathbb{R}^3)$ 为缓增分布空间。
2. 傅里叶变换及其逆变换定义如下

$$F(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx,$$

$$F^{-1}(g)(x) := (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\xi \cdot x} g(\xi) d\xi,$$

3. 分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^\alpha$, $\left(\forall \alpha \geq \frac{1}{2}\right)$ 定义为

$$F[(-\Delta)^\alpha f](\xi) = |\xi|^{2\alpha} \hat{f}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^3,$$

其中 $f \in S'(\mathbb{R}^3)$ 并且 $\hat{f} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ 。

4. 张量积定义为

$$f \otimes g := (g_1 f, g_2 f, g_3 f),$$

其中 $f = (f_1, f_2, f_3)$, $g = (g_1, g_2, g_3) \in S'(\mathbb{R}^3)$ 。

5. 设 $s \in \mathbb{R}$, Lei-Lin 空间定义为

$$X^s(\mathbb{R}^3) := \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^3) : \hat{f} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3) \text{ 并且 } \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s |\hat{f}(\xi)| d\xi < \infty \right\},$$

$X^s(\mathbb{R}^3)$ 空间范数定义为

$$\|f\|_{X^s} = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s |\hat{f}(\xi)| d\xi.$$

6. 设 $a > 0$, $\sigma \geq 1$, $s \in \mathbb{R}$, Lei-Lin-Gevrey 空间定义为

$$X_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3) := \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^3) : \hat{f} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3) \text{ 并且 } \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{1/\sigma}} |\hat{f}(\xi)| d\xi < \infty \right\},$$

$X_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ 空间范数定义为

$$\|f\|_{X_{a,\sigma}^s} = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{1/\sigma}} |\hat{f}(\xi)| d\xi.$$

7. 令 $T > 0$, $(X, \|\cdot\|_X)$ 为赋范空间, 并且 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为区间。定义

$$C(I; X) = \{f : I \rightarrow X \text{ 为连续函数}\},$$

$C(I; X)$ 空间范数定义为

$$\|f\|_{L^\infty(I; X)} := \sup_{t \in I} \{\|f(t)\|_X\}.$$

$C_T(X)$ 可以表示为 $C([0, T]; X)$, $\|\cdot\|_{L_T^\infty(X)}$ 也可以表示为 $\|\cdot\|_{L_T^\infty([0, T]; X)}$ 。

8. 令 $1 \leq p < \infty$, $T > 0$, $(X, \|\cdot\|_X)$ 为赋范空间, $I \subseteq \mathbb{R}$ 为区间。定义

$$L^p(I; X) := \left\{ f : I \rightarrow X \text{ 为连续函数} : \int_I \|f(t)\|_X^p dt < \infty \right\},$$

$L^p(I; X)$ 空间范数定义为

$$\|f\|_{L^p(I;X)} := \left(\int_I \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$L^p(I;X)$ 也可以表示成 $L^p([0,T];X)$ 。

3. 预备引理

本文中的主要结果即定理 1.1, 是基于以下热方程解的研究得出的。该方程具有初值 $v_0 \in X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3)$, $(a,\sigma) \in [0,+\infty) \times [1,+\infty)$:

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= f, t \in (0,T]; \\ v(\cdot,0) &= v_0(x), \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $f \in L_T^1(X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3))$, $T > 0$ 是任意的。

引理 3.1 [9]

若 $a \geq 0$, $\sigma \geq 1$, $T > 0$, $s \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $f \in L_T^1(X_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3))$, $v_0 \in X_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ 。则存在 $v \in C_T(S'(\mathbb{R}^3))$ 为方程(3.2)的解

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= f, x \in \mathbb{R}^3, t \in (0,T]; \\ v(\cdot,0) &= v_0(x), x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

且 $v \in C_T(X_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^1\left(X_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}(\mathbb{R}^3)\right)$, $(\forall p \geq 1)$ 此外还满足,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \|v\|_{L_T^p(X_{a,\sigma}^s)} \leq \|v_0\|_{X_{a,\sigma}^s} + \|f\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^s)}, \\ \text{(ii)} \quad & \|v\|_{L_T^p\left(X_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}\right)} \leq \|v_0\|_{X_{a,\sigma}^s} + \|f\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^s)}. \end{aligned}$$

为更好应用引理 3.1 对定理 1.1 进行证明, 下面将对方程(3.2)在 $p=1$, $s=0$ 时, 对于解的情况给予说明。

证明

在系统(3.2)第一个方程的两端同时乘热半群 $e^{(t-\tau)\Delta}$ ($0 \leq \tau \leq t \leq T$), 利用傅里叶变换并在 $[0,t]$ 上对所得结果进行积分, 则可以得到:

$$|\hat{v}(t)| \leq e^{-t|\xi|^2} |\hat{v}_0| + \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\hat{f}(\tau)| d\tau. \quad (3.3)$$

首先, 证明结论(i)。根据(3.3)我们可以得到

$$|\hat{v}(t)| \leq |\hat{v}_0| + \int_0^t |\hat{f}(\tau)| d\tau.$$

将不等式两端同时乘 $e^{a|\xi|^{1/\sigma}}$, 可以得到

$$e^{a|\xi|^{1/\sigma}} |\hat{v}(t)| \leq e^{a|\xi|^{1/\sigma}} |\hat{v}_0| + e^{a|\xi|^{1/\sigma}} \int_0^t |\hat{f}(\tau)| d\tau.$$

再对上式中的时间 t 在 $\mathbb{R}^3$ 上取 L^1 积分, 这样我们可以得到

$$\|v(t)\|_{X_{a,\sigma}^0} \leq \|v_0\|_{X_{a,\sigma}^0} + \|f\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^0)}, \quad \forall t \in (0,T).$$

因此, 可以得出结论

$$\|v\|_{L_T^p(X_{a,\sigma}^0)} \leq \|v_0\|_{X_{a,\sigma}^0} + \|f\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^0)}.$$

以上结论(i)证明完成。由于 $v_0 \in X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3)$, $f \in L_T^1(X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3))$, 因此可以进一步得出 $v \in C_T(X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3))$ 。其次, 证明结论(ii)。将(3.3)两端同时乘 $|\xi|^2 e^{a|\xi|^{1/\sigma}}$ 可以得到

$$|\xi|^2 e^{a|\xi|^{1/\sigma}} |\hat{v}(t)| \leq |\xi|^2 e^{a|\xi|^{1/\sigma}} e^{-t|\xi|^2} |\hat{v}_0| + |\xi|^2 e^{a|\xi|^{1/\sigma}} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\hat{f}(\tau)| d\tau.$$

对上式中的时间 t 在 $[0, T]$ 上取 L^1 积分, 可以得到

$$\int_0^T |\xi|^2 e^{a|\xi|^{1/\sigma}} |\hat{v}(t)| dt \leq e^{a|\xi|^{1/\sigma}} |\hat{v}_0| + |\xi|^2 e^{a|\xi|^{1/\sigma}} \int_0^T \left[e^{-t|\xi|^2} \right] * \left[|\hat{f}(t)| \right] dt.$$

再应用 Young's 不等式, 可以得到

$$\int_0^T |\xi|^2 e^{a|\xi|^{1/\sigma}} |\hat{v}(t)| dt \leq e^{a|\xi|^{1/\sigma}} |\hat{v}_0| + e^{a|\xi|^{1/\sigma}} \int_0^T |\hat{f}(t)| dt.$$

再次对上式中的时间 t 在 $\mathbb{R}^3$ 上取 L^1 积分, 则可以得到

$$\|v\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^2)} \leq \|v_0\|_{X_{a,\sigma}^0} + \|f\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^0)}.$$

以上结论(ii)证明完成。由于 $v_0 \in X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3)$, $f \in L_T^1(X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3))$, 因此进一步证明 $v \in L_T^1(X_{a,\sigma}^2(\mathbb{R}^3))$ 。综上, 可以推断出 $v \in C_T(X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^1(X_{a,\sigma}^2(\mathbb{R}^3))$ 。

以上证明方程(3.2)在 $p=1, s=0$ 的情况下, 方程的解 $v \in C_T(X_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^1(X_{a,\sigma}^2)$ 。此外, 解 v 满足

$$(i) \quad \|v\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^0)} \leq \|v_0\|_{X_{a,\sigma}^0} + \|f\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^0)},$$

$$(ii) \quad \|v\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^2)} \leq \|v_0\|_{X_{a,\sigma}^0} + \|f\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^0)}.$$

下面给出广义不动点定理的普通形式。

引理 3.2 [11]

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间, $B_1: X \times X \times \cdots \times X$ (α 个) 是一个 α 阶线性连续算子, $B_2: X \times X \times X \times \cdots \times X$ (β 个) 是一个 β 阶线性连续算子, 即存在正常数 K_1 和 K_2 , 且 $u_1, u_2, \dots, u_\alpha, v_1, v_2, \dots, v_\beta \in X$, 满足

$$\|B_1(u_1, u_2, \dots, u_\alpha)\|_X \leq K_1 \|u_1\|_X \|u_2\|_X \cdots \|u_\alpha\|_X,$$

$$\|B_2(v_1, v_2, \dots, v_\beta)\|_X \leq K_2 \|v_1\|_X \|v_2\|_X \cdots \|v_\beta\|_X.$$

令 $K = \max\{K_1, K_2\}$, $\varepsilon > 0$ 。若满足

$$2 \max\{\alpha, \beta\} \left((2\varepsilon)^{\alpha-1} + (2\varepsilon)^{\beta-1} \right) K < 1 \quad (3.4)$$

且对任意 $y \in K$ 有 $\|y\|_X \leq \varepsilon$, 则方程

$$u = y + B_1(u, u, \dots, u) + B_2(u, u, \dots, u), \quad u \in X$$

在 X 中存在解 u 。并且满足 $\|u\|_X \leq 2\|y\|_X \leq 2\varepsilon$ 。此外, 方程的解 u 连续依赖于 y , 即如果 $\|y_1\|_X \leq \varepsilon$, 并且有方程 $v = y_1 + B_1(v, v, \dots, v) + B_2(v, v, \dots, v)$, $v \in X$, $\|v\|_X \leq 2\varepsilon$, 则有

$$\|u - v\|_X \leq \frac{1}{1 - 2 \max\{\alpha, \beta\} \left((2\varepsilon)^{\alpha-1} + (2\varepsilon)^{\beta-1} \right) K} \|y - y_1\|_X. \quad (3.5)$$

证明

首先, 令 $E := \{u : u \in X, \|u\| \leq 2\varepsilon\}$, $d(u, v) = \|u - v\|_X$ 。下面考虑映射

$T: T_u = y + B_1(u, u, \dots, u) + B_2(u, u, \dots, u)$, 可以得到

$$\begin{aligned}
\|T_u - T_v\|_X &\leq \|B_1(u, u-v, \dots, u)\|_X + \|B_1(u, v, u-v, \dots, u)\|_X \\
&\quad + \dots + \|B_1(u, u-v, \dots, u)\|_X + \|B_1(u, v, u-v, \dots, u)\|_X \\
&\quad + \|B_2(u, v, u-v, \dots, u)\|_X + \|B_2(u-v, v, \dots, v)\|_X \\
&\leq 2 \max\{\alpha, \beta\} \left((2\varepsilon)^{\alpha-1} + (2\varepsilon)^{\beta-1} \right) K \|u-v\|_X \\
&< \|u-v\|_X.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

因此, T 是一个从 (E, d) 到自身的压缩映射。

其次, 由(3.4)可得 $\|y\|_X \leq \varepsilon$, 那么对 $y \in E$ 有

$$\begin{aligned}
\|T_u\|_X &\leq \|y\|_X + \|B_1(u, u, \dots, u)\|_X + \|B_1(u, u, \dots, u)\|_X \\
&\leq \|y\|_X + K \left(\|u\|_X^\alpha + \|u\|_X^\beta \right) \\
&\leq \varepsilon + 2 \left((2\varepsilon)^{\alpha-1} + (2\varepsilon)^{\beta-1} \right) K \varepsilon \\
&< 2\varepsilon,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

从而, 可以得到 $T_u \in E$ 。根据压缩映射原理, 压缩映射 T 有唯一一个不动点 $u, u \in E$, 并且满足 $\|u\|_X \leq 2\varepsilon$ 。

最后, 证明不等式(3.5), 对满足引理条件的 u 和 v , 可以得到

$$\begin{aligned}
\|u-v\|_X &\leq \|y-y_1\|_X + \|B_1(u, u-v, \dots, u)\|_X + \|B_1(u, v, u-v, \dots, u)\|_X \\
&\quad + \dots + \|B_1(u, u-v, \dots, u)\|_X + \|B_1(u, v, u-v, \dots, u)\|_X \\
&\quad + \|B_2(u, v, u-v, \dots, u)\|_X + \|B_2(u-v, v, \dots, v)\|_X \\
&\leq \|y-y_1\|_X + 2 \max\{\alpha, \beta\} \left((2\varepsilon)^{\alpha-1} + (2\varepsilon)^{\beta-1} \right) K \|u-v\|_X.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

由(3.4)和(3.7)易得 $\|u\|_X \leq 2\|y\|_X$ 。

以上, 引理 3.2 证明完成。

引理 3.3 [9]

设 a, σ 为实数, 且满足 $(a, \sigma) \in [0, +\infty) \times [1, +\infty)$ 。若 $f \in X_{a, \sigma}^0(\mathbb{R}^3)$, 则 $f \in X_{\frac{a}{\sigma}, \sigma}^0(\mathbb{R}^3)$ 。此外, 存在一个正常数 C , 使得 $\|f\|_{X_{\frac{a}{\sigma}, \sigma}^0} \leq C \|f\|_{X_{a, \sigma}^0}$ 。

引理 3.4 [12]

设 $a \geq 0, \sigma \geq 1$ 。若 $f, g \in X_{a, \sigma}^1(\mathbb{R}^3) \cap X_{\frac{a}{\sigma}, \sigma}^0(\mathbb{R}^3)$, 则有 $fg \in X_{a, \sigma}^1(\mathbb{R}^3)$ 。而且, 存在正常数 C , 使得

$$\|fg\|_{X_{a, \sigma}^1} \leq C \left[\|f\|_{X_{\frac{a}{\sigma}, \sigma}^0} \|g\|_{X_{a, \sigma}^1} + \|f\|_{X_{a, \sigma}^1} \|g\|_{X_{\frac{a}{\sigma}, \sigma}^0} \right].$$

4. 定理 1.1 证明

定义赋范空间 X_T , $X_T := C_T(X_{a, \sigma}^0(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^1(X_{a, \sigma}^2(\mathbb{R}^3))$, ($T > 0$)。并且, X_T 空间范数定义为 $\|g\|_{X_T} = \|g\|_{L_T^2(X_{a, \sigma}^0)} + \|g\|_{L_T^1(X_{a, \sigma}^2)}$, $\forall g \in X_T$ 。下面, 证明方程(1.1)在 $X_{a, \sigma}^0(\mathbb{R}^3)$ 空间中解的适定性。

首先将算子 $e^{(t-\tau)\Delta}$ (其中 $\tau \in [0, t]$) 作用于(1.1)中的第一个方程, 可以得到

$$e^{(t-\tau)\Delta} u_t - e^{(t-\tau)\Delta} \cdot u + e^{(t-\tau)\Delta} P(u \cdot \nabla u + |u|^2 u) = 0, \tag{4.1}$$

其中 P 是 Leray-Hopf 投影算子。且该算子满足

$$|\mathbb{F}[P(f)](\xi)| \leq |\hat{f}(\xi)|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3. \quad (4.2)$$

将(4.1)在 $[0, t]$ 上积分得到

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} P(u \cdot \nabla u + |u|^2 u)(\tau) d\tau, \quad (4.3)$$

另一方面, (4.3)可以写成

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + B_1(u, u)(t) + B_2(u, u, u)(t), \quad (4.4)$$

其中

$$B_1(u, u) = -\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} P(u \cdot \nabla u)(\tau) d\tau, \quad \forall u \in X_T, \quad (4.5)$$

$$B_2(u, u, u) = -\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} P(|u|^2 u)(\tau) d\tau, \quad \forall u \in X_T. \quad (4.6)$$

根据(4.5)和(4.6)易验证 $B_1: X_T \times X_T \rightarrow X_T$ 是一个双线性算子, $B_2: X_T \times X_T \times X_T \rightarrow X_T$ 是一个三线性算子。下证算子 B_1 和 B_2 分别为双连续算子和三连续算子。

首先验证算子 B_1 是双连续的。由(4.5)可以得到:

$$\begin{aligned} \partial_t B_1(u, u)(t) &= -\Delta \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} P(u \cdot \nabla u)(\tau) d\tau - P(u \cdot \nabla u)(t) \\ &= \Delta B_1(u, u)(t) - P(u \cdot \nabla u)(t). \end{aligned}$$

因此, 我们可以得到与 B_1 相关的以下系统:

$$\begin{aligned} \partial_t B_1(u, u)(t) &= \Delta B_1(u, u)(t) - P(u \cdot \nabla u)(t); \\ B_1(u, u)(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

我们将应用引理 3.1 和(4.7)来证明 B_1 是连续的, 通过观察(4.2), 我们可以得到:

$$\begin{aligned} P(u \cdot \nabla u)_{L_T^1(X_{a,\sigma}^0)} &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} e^{a|\xi|^{1/\sigma}} |\mathbb{F}[P(u \otimes \nabla u)(t)]| d\xi dt \\ &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\xi| e^{a|\xi|^{1/\sigma}} |\mathbb{F}[(u \otimes u)(t)]| d\xi dt. \end{aligned}$$

从而, 可以得到

$$\|P(u \cdot \nabla u)\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^0)} \leq \int_0^T \|(u \otimes u)(t)\|_{X_{a,\sigma}^1} dt.$$

对上式应用引理 3.4, 可以得到

$$\|P(u \cdot \nabla u)\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^0)} \leq C \int_0^T \left[\|u\|_{X_{a,\sigma}^0} \|u\|_{X_{a,\sigma}^1} + \|u\|_{X_{a,\sigma}^1} \|u\|_{X_{a,\sigma}^0} \right] dt,$$

由于 $a \geq 0, \sigma \geq 1$ 。故应用引理 3.3 和 Hölder 不等式可以得到

$$\|P(u \cdot \nabla u)\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^0)} \leq 2C \|u\|_{L_T^\infty(X_{a,\sigma}^0)} \|u\|_{L_T^2(X_{a,\sigma}^0)}^{\frac{1}{2}} \int_0^T \|u\|_{X_{a,\sigma}^2}^{\frac{1}{2}} dt, \quad (4.8)$$

其中 $(a, \sigma) \in [0, +\infty) \times [1, +\infty)$ 。对(4.8)再次应用 Hölder 不等式可以得到,

$$\|P(u \cdot \nabla u)\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^0)} \leq 2CT^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L_T^\infty(X_{a,\sigma}^0)} \|u\|_{L_T^2(X_{a,\sigma}^0)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L_T^2(X_{a,\sigma}^2)}^{\frac{1}{2}}.$$

因此, 可以得到

$$\|P(u \cdot \nabla u)\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^0)} \leq 2CT^{\frac{1}{2}} \|u\|_{X_T} \|u\|_{X_T}, \quad \forall u \in X_T, \quad (4.9)$$

将引理 3.1 (i) 应用于系统(4.7), 并利用(4.9)可以推断出

$$\|B_1(u, u)\|_{L_T^\infty(X_{a,\sigma}^0)} \leq 2CT^{\frac{1}{2}} \|u\|_{X_T} \|u\|_{X_T}, \quad \forall u \in X_T, \quad (4.10)$$

将引理 3.1 (ii) 应用于系统(4.7), 并利用(4.9)可以得到

$$\|B_1(u, u)\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^2)} \leq 2CT^{\frac{1}{2}} \|u\|_{X_T} \|u\|_{X_T}, \quad \forall u \in X_T, \quad (4.11)$$

由(4.10)和(4.11), 可以得出

$$\|B_1(u, u)\|_{X_T} \leq K_1 \|u\|_{X_T} \|u\|_{X_T}, \quad \forall u \in X_T, \quad (4.12)$$

其中 $K_1 = 2CT^{\frac{1}{2}}$ 。该不等式表明算子 B_1 是连续的。

其次验证算子 B_2 是三连续的。由(4.6)可以得到

$$\begin{aligned} \partial_t B_2(u, u, u)(t) &= -\Delta \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} P(|u|^2 u)(\tau) d\tau - P(|u|^2 u)(t) \\ &= \Delta B_2(u, u, u)(t) - P(|u|^2 u)(t). \end{aligned}$$

因此, 我们可以得到与 B_2 相关的以下系统:

$$\begin{aligned} \partial_t B_2(u, u, u)(t) &= \Delta B_2(u, u, u)(t) - P(|u|^2 u)(t); \\ B_2(u, u, u)(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

由此可以得到

$$\|P(|u|^2 u)\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^0)} \leq \int_0^T \| |u|^2 u \|_{X_{a,\sigma}^0} dt \leq CT \sup_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{X_{a,\sigma}^0}^3. \quad (4.14)$$

将引理 3.1 应用于系统(4.13), 并利用(4.14)可以推断出

$$\begin{aligned} \|B_2(u, u, u)\|_{L_T^\infty(X_{a,\sigma}^0)} &\leq CT \sup_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{X_{a,\sigma}^0}^3, \quad \forall u \in X_T. \\ \|B_2(u, u, u)\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^2)} &\leq CT \sup_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{X_{a,\sigma}^0}^3, \quad \forall u \in X_T. \end{aligned}$$

结合以上两个不等式, 可以得到

$$\|B_2(u, u, u)\|_{X_T} \leq K_2 \sup_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{X_T}^3, \quad \forall u \in X_T,$$

其中 $K_2 = CT$ 。该不等式表明算子 B_2 是三连续的。

因此, 我们只需根据空间 X_T , 估计方程(4.4)中的项 $e^{t\Delta} u_0$ 。应用引理 3.2 可以得到

$$\|e^{t\Delta} u_0\|_{X_{a,\sigma}^0} = \int_{\mathbb{R}^3} e^{a|\xi|^{1/\sigma}} e^{-t|\xi|^2} |\hat{u}_0(\xi)| d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^3} e^{a|\xi|^{1/\sigma}} |\hat{u}_0(\xi)| d\xi = \|u_0\|_{X_{a,\sigma}^0}, \quad \forall t \in [0, T].$$

从而可以得到结论

$$\|e^{t\Delta} u_0\|_{L_T^\infty(X_{a,\sigma}^0)} \leq \|u_0\|_{X_{a,\sigma}^0}. \quad (4.15)$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\|e^{t\Delta}u_0\|_{L^1_T(X^2_{a,\sigma})} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 e^{a|\xi|^{1/\sigma}} |\hat{u}_0(\xi)| \left(\int_0^T e^{-t|\xi|^2} dt \right) d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} e^{a|\xi|^{1/\sigma}} |\hat{u}_0(\xi)| d\xi = \|u_0\|_{X^0_{a,\sigma}}.\end{aligned}\quad (4.16)$$

因此, 根据(4.15)和(4.16)可以得出结论:

$$\|e^{t\Delta}u_0\|_{X_T} \leq 2\|u_0\|_{X^0_{a,\sigma}}. \quad (4.17)$$

下面, 让我们证明定理 1.1。

由上述证明可以得出, B_1 为双连续线性算子, B_2 三连续线性算子, 且 $K_1 = 2CT^{\frac{1}{2}}\|u\|_{X_T}$, $K_2 = CT$ 。

那么令 $K = \max\{K_1, K_2\}$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 若 K 满足 $K < \frac{1}{6(2\varepsilon + (2\varepsilon)^2)}$, 存在 $T > 0$, 根据引理 3.2 可以得

到方程(4.4)存在局部唯一解 $u \in X_T$, 且满足 $\|u\|_{X_T} \leq 2\|e^{t\Delta}u_0\|_{X^0_{a,\sigma}}$ 。由(4.17)可以得到

$$\|u\|_{X_T} \leq 4\|e^{t\Delta}u_0\|_{X_T} \leq 4\|u_0\|_{X^0_{a,\sigma}}, \text{ 即 } \|u\|_{L^2_T(X^0_{a,\sigma})} + \|u\|_{L^1_T(X^2_{a,\sigma})} \leq 4\|u_0\|_{X^0_{a,\sigma}}.$$

综上, 可以得到方程(1.1)存在唯一局部解 $u \in C_T(X^0_{a,\sigma}(\mathbb{R}^3)) \cap L^1_T(X^2_{a,\sigma}(\mathbb{R}^3))$, 并且满足

$$\|u\|_{L^2_T(X^0_{a,\sigma})} + \|u\|_{L^1_T(X^2_{a,\sigma})} \leq 4\|u_0\|_{X^0_{a,\sigma}}. \text{ 定理 1.1 证明完成。}$$

参考文献

- [1] Hopf, E. (1950) Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. Erhard Schmidt zu seinem 75. Geburtstag gewidmet. *Mathematische Nachrichten*, **4**, 213-231. <https://doi.org/10.1002/mana.3210040121>
- [2] Fujita, H. and Kato, T. (1964) On the Navier-Stokes Initial Value Problem. I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, 269-315. <https://doi.org/10.1007/bf00276188>
- [3] Tsai, T. (2018) Lectures on Navier-Stokes Equations. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/gsm/192>
- [4] Robinson, J.C., Rodrigo, J.L. and Sadowski, W. (2016) The Three-Dimensional Navier-Stokes Equations. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9781139095143>
- [5] Melo, W.G., de Souza, M. and Santos, T.S.R. (2022) On the Generalized Magnetohydrodynamics- α Equations with Fractional Dissipation in Lei-Lin and Lei-Lin-Gevrey Spaces. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **73**, Article No. 44. <https://doi.org/10.1007/s00033-022-01677-0>
- [6] Cai, X. and Zhou, Y. (2022) Global Existence of Strong Solutions for the Generalized Navier-Stokes Equations with Damping. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **38**, 627-634. <https://doi.org/10.1007/s10255-022-1106-4>
- [7] Liu, X.F. and Zou, L.L. (2020) Well-Posedness and Decay of Solution to Three-Dimensional Generalized Navier-Stokes Equations with Damping. *Journal of Donghua University (English Edition)*, **37**, 396-401. <https://doi.org/10.19884/j.1672-5220.202008054>
- [8] Cai, X. and Jiu, Q. (2008) Weak and Strong Solutions for the Incompressible Navier-Stokes Equations with Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **343**, 799-809. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.041>
- [9] Melo, W.G., Rocha, N.F. and dos Santos Costa, N. (2023) Solutions for the Navier-Stokes Equations with Critical and Subcritical Fractional Dissipation in Lei-Lin and Lei-Lin-Gevrey Spaces. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2023**, 1-12. <https://doi.org/10.58997/ejde.2023.78>
- [10] Wu, J. (2003) Generalized MHD Equations. *Journal of Differential Equations*, **195**, 284-312. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.07.007>
- [11] Cannone, M. (1995) Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes. Diderot Editeur.
- [12] Melo, W.G. and Rocha, N.F. (2022) New Blow-Up Criteria for Local Solutions of the 3D Generalized MHD Equations in Lei-Lin-Gevrey Spaces. *Mathematische Nachrichten*, **296**, 757-778. <https://doi.org/10.1002/mana.202000309>