Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(2), 147-152
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.152056

李代数Kuranishi形变族的收敛性

胡　严，夏　炜

重庆理工大学理学院，重庆

收稿日期：2025年1月14日；录用日期：2025年2月14日；发布日期：2025年2月28日

摘　要

Kuranishi形变族是复流形形变理论中一个重要的研究对象。在李代数上复结构的形变理论中，相应的Kuranishi形变族也是存在的，其构造方式与复流形的情况类似。本文的目标是借鉴Liu-Rao-Yang的方法为李代数上Kuranishi形变族的收敛性提供一个新的证明。

关键词

复结构，形变，Kuranishi族，幂级数法

Convergence of the Kuranishi Deformation Family for Lie Algebras

Yan Hu, Wei Xia

College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Jan. 14th, 2025; accepted: Feb. 14th, 2025; published: Feb. 28th, 2025

Abstract

Kuranishi deformation family is an important subject in the deformation theory of complex manifolds. In the deformation theory of complex structures on Lie algebras, the corresponding Kuranishi deformation family also exists, and their construction methods are similar to those in the case of complex manifolds. The goal of this paper is to provide a new proof for the convergence of Kuranishi deformation family on Lie algebras by drawing on the method of Liu-Rao-Yang.

Keywords

Complex Structures, Deformations, Kuranishi Family, Power Series Methods

文章引用: 胡严, 夏炜. 李代数 Kuranishi 形变族的收敛性[J]. 理论数学, 2025, 15(2): 147-152.
DOI: 10.12677/pm.2025.152056

1. 引言

Kuranishi 形变族是复流形形变理论中一个重要的研究对象，其光滑性与复结构形变无障碍这一性质是等价的。这方面很有名的一个结果是 Bogomolov-Tian-Todorov 定理[1] [2]：Calabi-Yau 流形的 Kuranishi 形变族是光滑的，或者说，任意 Calabi-Yau 流形上的复结构形变是没有障碍的。这个定理为后续用微分几何方法研究 Calabi-Yau 流形模空间奠定了基础[3]。此外，Kuranishi 形变族是一个完备的形变族，即：其纤维包含所有充分小的形变。这一特性意味着如果我们想研究形变稳定性问题[4]，只需对 Kuranishi 形变族进行讨论。

在经典的复结构形变理论中，人们常常应用幂级数法来构造形变。比如：在 Kodaira-Morrow 的教材[5]中，为了构造复流形的 Kuranishi 形变族，他们首先确定 Maurer-Cartan 方程的一个具有典范形式的幂级数解，然后证明这个幂级数是收敛的。这一类的收敛性证明常常是复杂的[5]-[7]。

在[8]中，Gigante 和 Tomassini 研究了实李代数上复结构的形变。他们定义了一些上同调群，以在某些上同调条件下证明刚性结果。一方面，李代数上复结构形变理论与复流形形变理论可以平行发展。另一方面，李代数上复结构形变理论的研究结果可以为探讨幂零复流形上的复结构带来潜在的应用。实际上，在文献[9]中，作者建立了一套李代数上的复结构形变理论，特别是证明了完备解析族(即：Kuranishi 形变族)的存在性。其中，关于 Kuranishi 形变族的收敛性，文献[9]用了 Kodaira-Morrow 的教材中的经典证明方法。我们注意到，Liu-Rao-Yang 在文献[10]中用了全新方法(见 2.5 小节)来证明 Calabi-Yau 流形的 Kuranishi 形变族的收敛性，并得到了具体的收敛半径。本文的目标是借鉴 Liu-Rao-Yang 的方法为李代数上 Kuranishi 形变族的收敛性提供一个新的证明。

2. 预备知识

首先，我们回忆一些基本概念和命题。关于复流形和李代数上的复结构形变，更详细的讨论可以参考[5] [9]。

2.1. 李代数上的复结构

令 $\mathfrak{g}$ 是一个 $2n$ 维的实李代数，在 $\mathfrak{g}$ 上的一个近复结构是指一个满足 $J^2=-1$ 的线性同态 $J:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$。如果 $\mathfrak{g}$ 上的一个近复结构 J 满足；

$$[JX,JY]-[X,Y]-J[JX,Y]-J[X,JY]=0\text{，对任意的 }X,Y\in\mathfrak{g}\text{，}\tag{2.1}$$

或者等价地：

$$\left[\mathfrak{g}^{1,0},\mathfrak{g}^{1,0}\right]\subseteq\mathfrak{g}^{1,0}\tag{2.2}$$

则称 J 为 $\mathfrak{g}$ 上的一个复结构。其中，$\mathfrak{g}^{1,0}$ 是 J 在复化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$ 上的 $\sqrt{-1}$ 的特征空间，且 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}^{1,0}\oplus\mathfrak{g}^{0,1}$。这样的一个带有复结构的李代数将被记作 $(\mathfrak{g},J)$。

2.2. 算子 d 及其分解

给定一个 $2n$ 维的实李代数 $\mathfrak{g}$，通过公式

$$d\omega(x,y) := -\omega[x,y]\text{，对任意的 } \omega\in\mathfrak{g}^*\text{，}\quad X,Y\in\mathfrak{g}\text{，} \tag{2.3}$$

我们可以定义一个线性算子

$$d:\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \wedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*\text{。}$$

并且利用 Leibnitz 法则，我们可以得到：

$$d:\wedge^k \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \to \wedge^{k+1}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*\text{，对任意的 } k\ge 1\text{。}$$

线性空间和算子 d 一起构成李代数 g 的 Chevalley-Eilenberg 复形。

现在假设 $\mathfrak{g}$ 上带有一个复结构 J，则有如下分解：

$$\wedge^k \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}$$

这里，$\Lambda^{p,q} := \wedge^p \mathfrak{g}^{1,0*} \wedge \wedge^q \mathfrak{g}^{0,1*}$。类似地，我们也可以将 $\wedge^k \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ 记作 Λ^k。

记投影算子 $\pi^{p,q}: \wedge^{p+q}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \to \Lambda^{p,q}$，则有算子

$$\partial:\Lambda^{p,q}\to\Lambda^{p+1,q}$$

其定义为 $\partial := \pi^{p+1,q}\circ d$。类似的，$\bar\partial:\Lambda^{p,q}\to\Lambda^{p,q+1}$ 被定义为 $\bar\partial := \pi^{p,q+1}\circ d$。在 Λ^k 上，以下分解成立：

$$d = \partial + \bar\partial\text{。}$$

2.3. $(\mathfrak{g},J)$ 上的 Hodge 分解

现在，我们假定 $(\mathfrak{g},J)$ 上配备有一个固定的 Hermitian 内积。于是，空间 Λ^k 和 $\Lambda^{0,q}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}$ 上可以配备自然诱导的内积。通过 Leibnitz 法则，$\bar\partial$ 算子可以延拓到 $\Lambda^{0,q}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}$ 上，即：

$$\bar\partial:\Lambda^{0,q}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}\to\Lambda^{0,q+1}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}\text{，}$$

其 Morre-Penrose 广义逆算子记为

$$\bar\partial^\dagger:\Lambda^{0,q}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}\to\Lambda^{0,q-1}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}\text{。}$$

对于任意 $0\le q\le n$，在 $\Lambda^{0,q}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}$ 上可以得到

$$1 = \mathcal{H}^{0,q} + \bar\partial\bar\partial^\dagger + \bar\partial^\dagger\bar\partial \tag{2.4}$$

这里，$\mathcal{H}^{0,q}:\Lambda^{0,q}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}\to\mathcal{H}^{0,q}$ 是从空间 $\Lambda^{0,q}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}$ 到其子空间 $\mathcal{H}^{0,q}$ 的投影算子，而 $\bar\partial^\dagger$ 是 $\bar\partial$ 的 Moore-Penrose 广义逆算子。注意，在 $\Lambda^{0,0}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}=\mathfrak{g}^{1,0}$ 上，我们有 $P_{(ker\bar\partial)^\perp} = \bar\partial^\dagger\bar\partial$，$P_{im\bar\partial} = \bar\partial\bar\partial^\dagger$。

实际上，(2.4)式等价于以下分解：

$$\Lambda^{0,q}\otimes\mathfrak{g}^{1,0} = \mathcal{H}^{0,q}\oplus \mathrm{im}\left(\bar\partial:\ \Lambda^{0,q-1}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}\to\Lambda^{0,q}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}\right)\oplus\ker\left(\bar\partial:\ \Lambda^{0,q}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}\to\Lambda^{0,q+1}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}\right)^\perp$$

这与紧复流形的情况是一致的。

2.4. Kuranishi 形变族

设 $\eta_1,\cdots,\eta_r$ 是 $\mathcal{H}^{0,1}\subset\Lambda^{0,q}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}$ 的一组基，对任意的 $k\ge 1$，令

$$\phi(t) := \sum_{k=1}^{\infty}\phi_k\text{，}$$

其中 ϕ_k 是关于 t 的 k 次齐次多项式且其系数在 $\Lambda^{0,1}\otimes\mathfrak{g}^{1,0}$ 中，且

$$\begin{cases} \phi_1 = \sum_{v=1}^{r} \eta_v t_v \\ \phi_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \bar{\partial}^{\dagger} \left[\phi_j, \phi_{k-j} \right] \end{cases} \tag{2.5}$$

由(2.5)式定义的幂级数 $\phi(t) \in \Lambda^{0,q} \otimes \mathfrak{g}^{1,0}$ 决定了一族 $(\mathfrak{g}, J)$ 上复结构的形变，称为：Kuranishi 形变族。我们将证明幂级数 $\phi(t)$ 关于充分小的 t 是收敛的。

根据定义，对任意的 $[\varphi,\psi] \in \Lambda^{0,q} \otimes \mathfrak{g}^{1,0}$，有

$$\|[\varphi,\psi]\| \le C_1 \|\varphi\| \cdot \|\psi\|,$$

其中 $C_1 > 0$ 是只依赖于 $(\mathfrak{g}, J)$ 的常数。

于是得到：

$$\|\phi_k\| \le \frac{C_1}{2} \|\bar{\partial}^{\dagger}\| \sum_{j=1}^{k} \|\phi_j\| \cdot \|\phi_{k-j}\|, \tag{2.6}$$

这里：

$$\|\bar{\partial}^{\dagger}\| := \max\left\{ \|\bar{\partial}^{\dagger}\varphi\| \middle| \varphi \in \Lambda^{0,\bullet} \otimes \mathfrak{g}^{1,0}, \|\varphi\| = 1 \right\}。$$

是 $\bar{\partial}^{\dagger} : \Lambda^{0,2} \otimes \mathfrak{g}^{1,0} \to \Lambda^{0,1} \otimes \mathfrak{g}^{1,0}$ 的算子范数。

2.5. Liu-Rao-Yang 的方法

现在，我们介绍 Liu-Rao-Yang 在文献[10]中对 Calabi-Yau 流形的 Kuranishi 形变族收敛性的证明。设

$$\varphi(t) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$$

是 Calabi-Yau 流形 X Kuranishi 形变族，这里，$\varphi(t)$ 满足：

(1) $\varphi_k = \frac{1}{2} \bar{\partial}^{*} G\left(\sum_{i=1}^{k-1} [\varphi_{k-i}, \varphi_i] \right)$，

(2) $i_{\varphi_k} \Omega_0 \in \operatorname{im} \partial$，

这里，Ω_0 是 Calabi-Yau 流形 X 上非平凡的全纯 $(n,0)$-形式。通过下列迭代的方式定义数列

$$y_k = \sum\nolimits_{j=1}^{k} y_j y_{k-j},\ y_1 = \frac{1}{4},\ y_0 = 0。$$

则可以归纳地证明：对每个 k，向量值 1 次微分形式 φ_k 的 Holder 范数可以由 y_k 控制住，但是，由文献[10]中的引理 4.1 可知：级数 $\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} y_k$ 的收敛半径是 1。由此，可推出 Kuranishi 形变族 $\varphi(t)$ 是收敛的。

3. Kuranishi 形变族的收敛性证明

我们叙述并证明本文的主要结果。

定理 3.1：定义为(2.5)的幂级数 $\phi(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k$ 对于充分小的 t 是收敛的。

证明：不失一般性，我们可以假设空间 $\mathcal{H}^{0,1}$ 的维数 $r = 1$。令

$$c = \frac{C_1}{2} \|\bar{\partial}^{\dagger}\|,$$

且

$$x_k = c\|\phi_k\| (x_0 = 0)\text{。}$$

将 c 同时应用到等式(2.5)的两边可以得到：

$$c\|\phi_k\| \le \frac{C_1}{2}\|\bar{\partial}^\dagger\| \sum_{j=1}^{k} \|\phi_j\| \cdot c\|\phi_{k-j}\|\text{，}$$

或等价地，

$$x_k \le \sum_{j=1}^{k} c\|\phi_j\| \cdot c\|\phi_{k-j}\| = \sum_{j=1}^{k} x_j x_{k-j}\text{。}$$

受 Liu-Rao-Yang 的方法启发，考虑数列

$$M_k := \sum_{j=1}^{k} M_j M_{k-j},\ M_1 = 1,\ M_0 = 0\text{。}$$

我们断言：

$$\text{如果 } x_1 \le 1\text{，那么，对每个 } k \ge 1\text{，都有 } x_k \le M_k\text{。} \tag{3.1}$$

实际上，假设对任意的 $1 \le k \le N$，有 $x_k \le M_k$ 成立。那么：

$$x_{N+1} \le \sum_{j=1}^{N+1} x_j x_{N+1-j} \le \sum_{j=1}^{N+1} M_j M_{N+1-j} = M_{N+1}\text{。}$$

因此，上述断言成立。设 $S := S(T) = \sum_{k=1}^{\infty} M_j t^j$，这里的 t 是取实数值。我们有：

$$\begin{aligned}
S^2 &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} M_j t^j\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} M_j t^j\right) \\
&= \left[M_1 M_1 t^2 + (M_1 M_2 + M_2 M_1) t^3 + \cdots + (M_1 M_k + \cdots + M_k M_1) t^{k+1} + \cdots\right] \\
&= M_2 t^2 + M_3 t^3 + \cdots + M_{k+1} t^{k+1} + \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} M_k t^k - M_1 t^1 = S - M_1 t
\end{aligned}$$

由此可知：$S = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4M_1 t}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2}$。这里，我们取 $S = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2}$，因为：$S(0) = 0$。因此，我们有

$$S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} M_j t^j = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2}\text{。}$$

文献[10]中的引理 4.1(或直接计算)可知：幂级数 $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} M_j t^j$ 的收敛半径是 $\frac{1}{4}$。

通过调整 $(\mathfrak{g}, J)$ 上的 Hermitian 内积，我们总可以假设：$x_1 = c\|\phi_1\| \le 1$。另一方面，因为 $r = 1$，我们有：$\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k$，这里，$\phi_k \in \Lambda^{0,1} \otimes \mathfrak{g}^{1,0}$，$t$ 取复数值。于是，利用断言(3.1)，我们得到

$$\|\phi(t)\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|\phi_k\| \cdot |t|^k \le \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot |t|^k \le \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cdot |t|^k\text{。}$$

我们已经知道：上式最右端级数的收敛半径是 $\frac{1}{4}$。最后，根据 Weierstrass 的 M 判别法可知：级数 $\phi(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k$ 对于充分小的 t 是收敛的。证毕。

上述证明中出现的数列 M_k 与组合数学中常见的 Catalan 数 C_k 有密切的关系。实际上，Catalan 数 C_k 的定义为：

$$C_k = \frac{(2k)!}{k!(2k+1)!} \text{ 或者 } C_{k+1} := \sum_{j=0}^{k} C_j C_{k-j}, \quad C_0 = 1 。$$

所以，数列 M_k 与 Catalan 数 C_k 数的关系是：$M_{k+1} = C_k$，对任意的自然数 k 成立。关于 Catalan 数的历史和相关研究可以参考文献[11] [12]。

4. 结论

基于 Liu-Rao-Yang 证明 Calabi-Yau 流形的 Kuranishi 形变族收敛性的方法，本文为李代数上 Kuranishi 形变族的收敛性提供了一个新的证明。与传统的方法相比，现在这个证明更清晰且容易掌握。此外，这个证明方法未来也许可以应用到文献[6]中考虑的更多其他形变理论的收敛性问题。

基金项目

这项研究得到了重庆市自然科学基金(编号：CSTB2022NSCQ-MSX0876)的资助。

参考文献

[1] Todorov, A.N. (1989) The Weil-Petersson Geometry of the Moduli Space of $SU(n \geq 3)$ (Calabi-Yau) Manifolds I. *Communications in Mathematical Physics*, **126**, 325-346. https://doi.org/10.1007/bf02125128

[2] Tian, G. (1987). Smoothness of the Universal Deformation Space of Compact Calabi-Yau Manifolds and Its Peterson-Weil Metric. *Mathematical Aspects of String Theory*, **1**, 629-646. https://doi.org/10.1142/9789812798411_0029

[3] Lu, Z. (2001) On the Hodge Metric of the Universal Deformation Space of Calabi-Yau Threefolds. *The Journal of Geometric Analysis*, **11**, 103-118. https://doi.org/10.1007/bf02921956

[4] Popovici, D. (2014) Deformation Openness and Closedness of Various Classes of Compact Complex Manifolds; Examples. *Annali Scuola Normale Superiore—Classe Di Scienze*, **13**, 255-305. https://doi.org/10.2422/2036-2145.201110_008

[5] Morrow, J. and Kodaira, K. (2006) Complex Manifolds. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/chel/355

[6] Forster, O. (1975) Power Series Methods in Deformation Theory. Several Complex Variables. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **30**, 199-217.

[7] Xia, W. (2021) Deformations of Dolbeault Cohomology Classes. *Mathematische Zeitschrift*, **300**, 2931-2973. https://doi.org/10.1007/s00209-021-02900-w

[8] Gigante, G. and Tomassini, G. (1993) Deformations of Complex Structures on a Real Lie Algebra. In: *Complex Analysis and Geometry*, Springer, 377-385. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-9771-8_16

[9] Xia, W. (2021) Deformations of Dolbeault Cohomology Classes for Lie Algebra with Complex Structures. *Annals of Global Analysis and Geometry*, **60**, 709-734. https://doi.org/10.1007/s10455-021-09794-1

[10] Liu, K., Rao, S. and Yang, X. (2014) Quasi-Isometry and Deformations of Calabi-Yau Manifolds. *Inventiones Mathematicae*, **199**, 423-453. https://doi.org/10.1007/s00222-014-0516-1

[11] 罗见今. 明安图是卡特兰数的首创者[J]. 内蒙古大学学报, 1998, 19(2): 239-245.

[12] Stanley, R.P. (2015) Catalan Numbers. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139871495