

离散动力系统上的一致收敛与传递集

胡印华, 邢秋菊*

南昌航空大学数学与信息科学学院, 江西 南昌

收稿日期: 2025年1月20日; 录用日期: 2025年2月14日; 发布日期: 2025年2月28日

摘 要

本文主要讨论离散动力系统上一致收敛与传递集的关系。设 (X, d) 是一个紧致度量空间, $f_n: X \rightarrow X$ 是 X 上的连续自映射序列, 并一致收敛于一个连续自映射 f 。结果表明, 当 $\lim_{m \rightarrow \infty} d_\infty(f_n^m, f^m) = 0$ 时, 若 X 的非空闭子集 A 是 (X, f_n) 的传递集, 则 A 是 (X, f) 的传递集; 若 X 的非空闭子集 A 是 (X, f_n) 的弱混合集, 则 A 是 (X, f) 的弱混合集。

关键词

传递集, 弱混合集, 一致收敛

Uniform Convergence and Transitive Sets on Discrete Dynamical Systems

Yinhua Hu, Qiuju Xing*

College of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi

Received: Jan. 20th, 2025; accepted: Feb. 14th, 2025; published: Feb. 28th, 2025

Abstract

In this paper, we mainly study the uniform convergence and transitive sets of discrete dynamical systems. Let X be a compact metric space with metric d , and $f_n: X \rightarrow X$ be a continuous self-map sequence on X such that (f_n) converges uniformly to a continuous self-map f . It is shown that under the condition $\lim_{m \rightarrow \infty} d_\infty(f_n^m, f^m) = 0$, let A be a closed subset of X , if A is a transitive set of (X, f_n) ,

*通讯作者。

then A is a transitive set of (X, f) ; if A is a weakly mixing set of (X, f_n) , then A is a weakly mixing set of (X, f) .

Keywords

Transitive Set, Weakly Mixing Set, Uniform Convergence

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

动力系统最早起源于微分方程的求解问题, 主要用来研究非线性系统的长期行为。经过多年的研究与发展, 动力系统的体系逐渐完善, 成为覆盖多个学科的综合数学分支, 其研究方向包括: 符号动力系统、拓扑动力系统、微分动力系统、遍历系统、随机动力系统及无穷维动力系统等。

设 X 为紧致可度量空间, $f: X \rightarrow X$ 为从 X 到自身的连续映射。记 $f^2(x) = f(f(x))$, f^2 仍然是 X 上的自映射。这个过程显然可以无限进行下去, 于是得到 X 上的一个连续自映射的序列: $\{f^n\}, n \geq 0$, 其中 $f^0 = id$ 即 X 的恒同映射, 对 $n > 1$, $f^n = f^{n-1} \cdot f$, 其中的 $\cdot$ 表示映射的复合。

称 X 上的连续自映射序列

$$\{f^0, f^1, \dots, f^n, \dots\}$$

为由连续自映射 f 经迭代而生成的拓扑离散半动力系统。

当 f 是 X 上的自同胚时, 有相反方向的迭代, 因而得到

$$\{\dots, f^{-n}, \dots, f^{-1}, f^0, f^1, \dots, f^n, \dots\}$$

叫做 X 上由自同胚 f 经迭代而生成的拓扑离散动力系统, 记为 (X, f) [1]。

对于一个动力系统 (X, f) , 如果 $U, V \subset X$, 定义回复时间集[2]:

$$N_f(U, V) = \{n \in \mathbb{N} : U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset\}.$$

称系统 (X, f) 是传递的, 如果对 X 的任意两个非空开子集 U, V , 回复时间集 $N_f(U, V)$ 非空; 称系统 (X, f) 弱混合的, 如果乘积系统 $(X \times X, f \times f)$ 是传递的。

运用回复时间集以及局部化的思想来研究离散动力系统, 是近年来研究工作中的两个特点。2010 年, T. K. S. Moothathu 引入了离散动力系统的多重传递性的概念, 他证明了弱混合和多重传递性的概念在最小自治离散动力系统中是等价的[3]。2014 年, Chen、Lü 和 Li 研究了一个向量上的多重传递, 并证明了多重传递系统是 Li-Yorke 混沌的[4]。2020 年, M. Salman 和 R. Das 在最小非自治系统上研究了多重传递、thick 传递和各阶弱混合等价的充分条件[5]。在[6][7]中, 作者通过 Furstenberg 族讨论了自治离散动力系统系统的各种动力学性质。R. S. Li 和 Y. Zhao 等通过 Furstenberg 族研究了敏感性的性质[8]; J. Li 通过 Furstenberg 族研究了传递点的性质[9]。关于一致收敛与传递性的研究, 近年来主要讨论的是紧度量空间 (X, d) 中, X 上的连续自映射序列 $f_n: X \rightarrow X$ 一致收敛于一个连续自映射 f , f 继承了 f_n 哪些动力学性质。2006 年 A. S. Raghib 等人研究了在一个紧度量空间 (X, d) 中, X 上的连续自映射序列 $f_n: X \rightarrow X$ 一

致收敛于一个连续自映射 f , 当满足给定一个 $\varepsilon > 0$ 和任意正整数 l , 存在一个正整数 n_0 (可能取决于 l) 对所有的 $n > n_0$ 和 $x \in X$ 都有 $d(f_n^l(x), f^l(x)) < \varepsilon$, 则若 f_n 是对初值条件敏感依赖的, 那么 f 也是[10]。2008 年, H. Román-Flores 在离散动力系统上研究了一致收敛和传递性的关系: 在一个紧度量空间 (X, d) 中, X 上的连续自映射序列 $f_n: X \rightarrow X$ 一致收敛于一个连续自映射 f , 当 f_n 是传递的, f 不一定传递, 并给出成立的充分条件[11]。2009 年 A. L. Donne 研究了一致收敛情况下, 保证极限传递性的一些条件[12]。R. S. Li 通过一致收敛性质研究了传递性, 并在一定条件下给出了传递性敏感性等性质的等价条件[13][14]。

本文主要研究一致收敛函数列传递集的性质, 主要讨论系统 (X, f) 和系统 (X, f_n) 上传递集、弱混合集、多重传递集的等价条件。设 (X, d) 是一个紧致度量空间, $f_n: X \rightarrow X$ 是 X 上的连续自映射序列, 并一致收敛于一个连续自映射 f 。结果表明, 当 $\lim_{m \rightarrow \infty} d_\infty(f_n^m, f^m) = 0$ 时, 若 X 的非空闭子集 A 是 (X, f_n) 的传递集, 则 A 是 (X, f) 的传递集; 若 X 的非空闭子集 A 是 (X, f_n) 的弱混合集, 则 A 是 (X, f) 的弱混合集。本文分为 4 个部分: 第一部分介绍了国内外研究现状, 第二部分介绍了基本定义和预备知识, 第三部分是主要结果及证明, 第四部分是结论。

2. 预备知识

定义 2.1 [2] 设 (X, f) 是一个拓扑动力系统, 称 (X, f) 是传递的, 如果 X 的任意两个非空开集 U, V , 有 $N_f(U, V) \neq \emptyset$ 。

注 2.1 [2]: 实际上, (X, f) 为传递的当且仅当 $N_f(U, V)$ 为无限集。

定义 2.2 [15] 设 (X, f) 是一个拓扑动力系统, A 是 X 的非空闭子集, 称 A 为 (X, f) 的一个传递集, 如果对 A 的任意一个非空开子集 V^A , 和 X 的任意非空开子集 U 且满足 $A \cap U \neq \emptyset$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$f^n(V^A) \cap U \neq \emptyset.$$

注 2.2 [16]: 实际上, A 为 (X, f) 的一个传递集当且仅当 $N_f(U, V^A)$ 为无限集。

定义 2.3 [2] 设 (X, f) 是一个拓扑动力系统, 称 (X, f) 为弱混合的, 如果 $(X \times X, f \times f)$ 是传递的。即对 X 的任意非空开子集 U_1, U_2, V_1, V_2 , 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset, f^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

注 2.3 [2]: 实际上, (X, f) 为弱混合的当且仅当对 X 的任意非空闭子集 U, V 回复时间集 $N_f(U, V)$ 为 thick 集。其中 thick 集是指: 若 $A \subset \mathbb{N}_+$ 且包含了任意长度的整数段, 即存在序列 $n_i \rightarrow \infty$, 使得 $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{n_i, n_i+1, \dots, n_i+i\} \subset A$, 则 A 是一个 thick 集。

定义 2.4 [15] 设 (X, f) 是一个拓扑动力系统, A 是 X 的非空闭子集, 称 A 为 (X, f) 的一个弱混合集当且仅当对任意 $k \in \mathbb{N}$, A 的任意非空开子集 $V_1, V_2, \dots, V_k$, 和 X 的任意非空开子集 $U_1, U_2, \dots, U_k$ 且满足 $A \cap U_i \neq \emptyset (i=1, 2, \dots, k)$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$f^n(V_i) \cap U_i \neq \emptyset (i=1, 2, \dots, k).$$

注 2.4 [15]: 由以上定义很容易得到以下结论

- 1) 如果 (X, f) 是传递的, 那么 X 是 (X, f) 的一个传递集。
- 2) 如果 A 是 (X, f) 的弱混合集, 那么 A 是 (X, f) 的一个传递集。

定义 2.5 [11] 设 X 是一完备度量空间, 则对任意给定的两个动力系统 (X, f) 和 (X, g) , 定义两个映射间的距离为

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

定义 2.6 [5] 设 (X, f) 是一个拓扑动力系统, 称 (X, f) 是多重传递的, 如果对任意的 $m \in \mathbb{N}$, $f \times f^2 \times \cdots \times f^m : X^m \rightarrow X^m$ 是拓扑传递的, 这里 $f^m = f \cdot f \cdots f$ (m 次), $X^m = X \times X \times \cdots \times X$ (m 次)。即对于 X 的任意非空开子集 $U_1, U_2, \dots, U_m, V_1, V_2, \dots, V_m$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得对任意的 $m \in \mathbb{N}$, 以及任意 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 使得

$$f^{in}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset.$$

定义 2.7 [17] 设 (X, f) 是一个拓扑动力系统, A 是 X 的非空闭子集, 称 A 为 (X, f) 的一个多重传递集, 如果对 A 的任意非空开子集 $V_1^A, V_2^A, \dots, V_m^A$, 以及 X 的任意非空开子集 $U_1, U_2, \dots, U_m$ 且满足 $A \cap U_i \neq \emptyset (i=1, 2, \dots, m)$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得对任意的 $m \in \mathbb{N}$, 以及任意 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 有

$$f^{in}(V_i^A) \cap U_i \neq \emptyset.$$

注 2.4 [5]: 由以上关于传递性的定义, 可以得到以下蕴含关系

拓扑混合 $\Rightarrow$ 多重传递的 $\Rightarrow$ 完全传递的

3. 主要定理及证明

定理 3.1 设 X 是一个紧度量空间, 度量为 d , $f_n : X \rightarrow X$ 是 X 上的连续自映射, 且 f_n 一致收敛于 X 上的映射 f 。此外, 假设对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_{\infty}(f_n^m, f^m) = 0.$$

设 A 是 X 的非空闭子集, 若对 $\forall n, A$ 是 (X, f_n) 的传递集, 则 A 是 (X, f) 的传递集。即若对 A 的任意非空开集 V^A 和 X 的非空开集 U 且 $U \cap A \neq \emptyset$, 存在 $l \in \mathbb{N}$, 使得

$$f_n^l(V^A) \cap U \neq \emptyset,$$

则存在 $q \in \mathbb{N}$, 使得

$$f^q(V^A) \cap U \neq \emptyset.$$

证明定理 3.1: 由假设可知, 对 A 的任意非空开集 V^A 和 X 的非空开集 U 且 $U \cap A \neq \emptyset$, 存在 $l \in \mathbb{N}$ 使得 $f_n^l(V^A) \cap U \neq \emptyset$ 。

故存在 $u \in f_n^l(V^A) \cap U$ 和 $\varepsilon > 0$ 使 $B(u, \varepsilon) \subset U$ 。

又由 $\lim_{m \rightarrow \infty} d_{\infty}(f_n^m, f^m) = 0$ 可知, 对上面的 $\varepsilon > 0$ 存在一个 $M \in \mathbb{N}$, 当 $m > M$ 时 $d_{\infty}(f_n^m, f^m) < \frac{1}{2}\varepsilon$ 。

且由注 2.2 可知

$$\{l \in \mathbb{N} : f_n^l(V^A) \cap U \neq \emptyset\}$$

为无限集, 则有 $q \in \{l \in \mathbb{N} : f_n^l(V^A) \cap U \neq \emptyset\}$ 且 $q > M$ 使得

$$V^A \cap f_n^{-q}\left(B\left(u, \frac{1}{2}\varepsilon\right)\right) \neq \emptyset, \quad d_{\infty}(f_n^q, f^q) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

同时成立。

令 $v \in V^A \cap f_n^{-q}\left(B\left(u, \frac{1}{2}\varepsilon\right)\right)$, 则有

$$d(f^q(v), u) \leq d(f^q(v), f_n^q(v)) + d(f_n^q(v), u) \leq d_{\infty}(f_n^q, f^q) + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon,$$

即

$$f^q(v) \in B(u, \varepsilon) \subset U, \quad V^A \cap f_n^{-q}B(u, \varepsilon) \neq \emptyset, \\ f^q(V^A) \cap B(u, \varepsilon) \neq \emptyset,$$

也就是说

$$f^q(V^A) \cap U \neq \emptyset,$$

则 A 是 (X, f) 的传递集。

定理 3.2 设 X 是一个紧度量空间, 度量为 d , $f_n: X \rightarrow X$ 是 X 上的连续自映射, 且 f_n 一致收敛于 X 上的映射 f 。此外, 假设

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_\infty(f_n^m, f^m) = 0.$$

设 A 是 X 的非空闭子集, 若 $\forall n, A$ 是 (X, f) 的弱混合集, 则 A 是 (X, f_n) 的弱混合集。即若对 A 的非空开集 $V_1^A, V_2^A, \dots, V_k^A$ 和 X 的非空开集 $U_1, U_2, \dots, U_k$ 且 $U_i \cap A \neq \emptyset (1 \leq i \leq k)$, 存在 $l \in \mathbb{N}$, 有

$$f_n^l(V_i^A) \cap U_i \neq \emptyset,$$

则存在 $q \in \mathbb{N}$, 使得

$$f^q(V_i^A) \cap U_i \neq \emptyset.$$

证明定理 3.2: 由假设可知, 对 A 的任意非空开集 $V_1^A, V_2^A, \dots, V_k^A$ 和 X 的非空开集 $U_1, U_2, \dots, U_k$ 且 $U_i \cap A \neq \emptyset (1 \leq i \leq k)$, 存在 $l \in \mathbb{N}$ 使得 $f_n^l(V_i^A) \cap U_i \neq \emptyset$ 。

故存在 $u_i \in f_n^l(V_i^A) \cap U_i \neq \emptyset$ 和 $\varepsilon > 0$ 使 $B(u_i, \varepsilon) \subset U_i$ 。

又由 $\lim_{m \rightarrow \infty} d_\infty(f_n^m, f^m) = 0$ 可知, 对上面的 $\varepsilon > 0$ 存在一个 $M \in \mathbb{N}$, 当 $m > M$ 时 $d_\infty(f_n^m, f^m) < \frac{1}{2}\varepsilon$ 。

且由注 2.2 和注 2.4 可知

$$\{l \in \mathbb{N}: f_n^l(V_i^A) \cap U_i \neq \emptyset\}$$

为无限集, 则有 $q \in \{l \in \mathbb{N}: f_n^l(V_i^A) \cap U_i \neq \emptyset\}$ 且 $q > M$ 使得

$$V_i^A \cap f_n^{-q}\left(B\left(u_i, \frac{1}{2}\varepsilon\right)\right) \neq \emptyset, \quad d_\infty(f_n^q, f^q) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

同时成立。

令 $v_i \in V_i^A \cap f_n^{-q}\left(B\left(u_i, \frac{1}{2}\varepsilon\right)\right)$, 则有

$$d(f^q(v_i), u_i) \leq d(f^q(v_i), f_n^q(v_i)) + d(f_n^q(v_i), u_i) \leq d_\infty(f_n^q, f^q) + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon,$$

即

$$f^q(v_i) \in B(u_i, \varepsilon) \subset U_i, \quad V_i^A \cap f_n^{-q}B(u_i, \varepsilon) \neq \emptyset, \\ f^q(V_i^A) \cap B(u_i, \varepsilon) \neq \emptyset,$$

也就是说

$$f^q(V_i^A) \cap U_i \neq \emptyset.$$

则 A 是 (X, f) 的弱混合集。

根据定理 3.1 和定理 3.2, 以及多重传递集的定义和注 2.4 可以得到以下结论:

推论 3.1: 设 X 是一个紧度量空间, 度量为 d , $f_n: X \rightarrow X$ 是 X 上的连续自映射, 使 f_n 一致收敛于 X 上的映射 f 。此外, 假设

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_{\infty}(f_n^m, f^m) = 0.$$

设 A 是 X 的非空闭子集, 若 $\forall n, A$ 是 (X, f) 的多重传递集, 则 A 是 (X, f_n) 的多重传递集。

4. 结论

设 (X, d) 是一个紧致度量空间, $f_n: X \rightarrow X$ 是 X 上的连续自映射, 并一致收敛于一个连续自映射 f 。当 $\lim_{m \rightarrow \infty} d_{\infty}(f_n^m, f^m) = 0$ 时, 我们有以下结论:

- 1) 若 X 的非空闭子集 A 是 (X, f_n) 的传递集, 则 A 是 (X, f) 的传递集;
- 2) 若 X 的非空闭子集 A 是 (X, f_n) 的弱混合集, 则 A 是 (X, f) 的弱混合集。
- 3) 若 X 的非空闭子集 A 是 (X, f_n) 的多重传递集, 则 A 是 (X, f) 的多重传递集。

综上, 传递集、弱混合集和多重传递集在一致收敛条件下保持不变。

参考文献

- [1] 周作领, 尹建东, 许绍元. 拓扑动力系统: 从拓扑方法到遍历理论方法[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [2] 叶向东, 黄文, 邵松. 拓扑动力系统概论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [3] Moothathu, T.K.S. (2010) Diagonal Points Having Dense Orbit. *Colloquium Mathematicum*, **120**, 127-138. <https://doi.org/10.4064/cm120-1-9>
- [4] Chen, Z., Li, J. and Lü, J. (2014) On Multi-Transitivity with Respect to a Vector. *Science China Mathematics*, **57**, 1639-1648. <https://doi.org/10.1007/s11425-014-4797-z>
- [5] Salman, M. and Das, R. (2020) Multi-Transitivity in Non-Autonomous Discrete Systems. *Topology and Its Applications*, **278**, Article ID: 107237. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107237>
- [6] Li, R., Zhao, Y. and Wang, H. (2017) Furstenberg Families and Chaos on Uniform Limit Maps. *The Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, **10**, 805-816. <https://doi.org/10.22436/jnsa.010.02.40>
- [7] Xiong, J., Fu, H. and Wang, H. (2013) A Class of Furstenberg Families and Their Applications to Chaotic Dynamics. *Science China Mathematics*, **57**, 823-836. <https://doi.org/10.1007/s11425-013-4720-z>
- [8] Li, R., Zhao, Y., Wang, H. and Liang, H. (2019) Stronger Forms of Transitivity and Sensitivity for Nonautonomous Discrete Dynamical Systems and Furstenberg Families. *Journal of Dynamical and Control Systems*, **26**, 109-126. <https://doi.org/10.1007/s10883-019-09437-6>
- [9] Li, J. (2011) Transitive Points via Furstenberg Family. *Topology and Its Applications*, **158**, 2221-2231. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.07.013>
- [10] Abu-Saris, R. and Al-Hami, K. (2006) Uniform Convergence and Chaotic Behavior. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **65**, 933-937. <https://doi.org/10.1016/j.na.2005.04.056>
- [11] Román-Flores, H. (2008) Uniform Convergence and Transitivity. *Chaos, Solitons & Fractals*, **38**, 148-153. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.10.052>
- [12] Fedeli, A. and Le Donne, A. (2009) A Note on the Uniform Limit of Transitive Dynamical Systems. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society—Simon Stevin*, **16**, 59-66. <https://doi.org/10.36045/bbms/1235574192>
- [13] Li, R. (2012) A Note on Uniform Convergence and Transitivity. *Chaos, Solitons & Fractals*, **45**, 759-764. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2012.02.007>
- [14] Li, R. and Wang, H. (2014) Erratum to “A Note on Uniform Convergence and Transitivity” [Chaos, Solitons and Fractals 45 (2012) 759-764]. *Chaos, Solitons & Fractals*, **59**, 112-118. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2013.12.005>
- [15] Liu, L. and Sun, Y. (2014) Weakly Mixing Sets and Transitive Sets for Non-Autonomous Discrete Systems. *Advances in Difference Equations*, **2014**, Article No. 217. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-217>

-
- [16] Oprocha, P. and Zhang, G. (2011) On Local Aspects of Topological Weak Mixing in Dimension One and Beyond. *Studia Mathematica*, **202**, 261-288. <https://doi.org/10.4064/sm202-3-4>
 - [17] 周小凯. 非自治动力系统的多重传递集[J]. 理论数学, 2022, 12(5): 683-686. <https://doi.org/10.12677/pm.2022.125078>