

拟线性斑秃趋化系统的最优控制问题

王 浩

重庆理工大学理学院, 重庆

收稿日期: 2024年12月30日; 录用日期: 2025年2月14日; 发布日期: 2025年2月28日

摘 要

在本文中, 我们研究了三组式趋化系统的齐次Neumann初始边界值问题, 该系统描述了斑秃的时空动态。与常规的趋化模型相比, 该系统的一个显著特征是CD8+ T细胞在CD4+ T细胞的帮助下以非线性方式增殖。我们通过Leray-Schauder不动点定理证明了该系统强解的存在性、唯一性和正则性, 随后建立了最优控制系统, 推导出了系统全局最优解的存在性, 并在Banach空间中利用拉格朗日乘子定理研究最优控制问题的一阶必要最优性条件, 最后, 我们得到了拉格朗日乘子的正则性结果。

关键词

趋化系统, 斑秃, 强解, 最优条件

Optimal Control Problem of Quasilinear Alopecia Areata Chemoataxis

Hao Wang

College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Dec. 30th, 2024; accepted: Feb. 14th, 2025; published: Feb. 28th, 2025

Abstract

In this paper, we investigate the problem of homogeneous Neumann initial boundary values for a three-group chemotaxis system that describes the spatiotemporal dynamics of alopecia areata. To compare with previous chemotaxis models, a distinctive feature of this system is that CD8+ T cells additionally proliferate in a nonlinear manner with the help of CD4+ T cells. We prove the existence, uniqueness and regularity of the strong solution of the system by the Leray-Schauder fixed point theorem, then establish the optimal control system, deduce the existence of the global optimal solution of the system, and use the Lagrange multiplier theorem in Banach space to study the first-order necessary optimality condition of the optimal control problem, and finally, we obtain the regularity result of the Lagrange multiplier.

文章引用: 王浩. 拟线性斑秃趋化系统的最优控制问题[J]. 理论数学, 2025, 15(2): 175-197.

DOI: 10.12677/pm.2025.152059

Keywords

Chemotaxis, Alopecia Areata, Strong Solutions, Optimality Conditions

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

斑秃(Alopecia Areata)是一种自身免疫性疾病。当免疫系统攻击毛囊(毛发生长的器官)时,斑秃就会发生,发生斑秃的必要前提是生理性毛囊免疫特权的崩溃,该特权通常可以防止对毛囊的自身免疫攻击。人们认为,斑秃的出现是由异常高的促炎细胞因子引发的,如干扰素-伽马 $\text{IFN-}\gamma$, 它是对毛囊免疫特权崩溃最有影响的诱导因子,它使毛囊暴露于 CD8+ T 淋巴细胞的攻击之下[1]。 $\text{IFN-}\gamma$ 可以激活 CD8+ T 细胞,也会受到 CD4+ T 细胞的促进作用。 CD4+ T 细胞, CD8+ T 细胞和 $\text{IFN-}\gamma$ 之间存在着复杂的相互作用关系。对斑秃中 T 细胞定向移动的研究[2][3]表明, $\text{IFN-}\gamma$ 产生的趋化因子 CXCL10 对斑秃中的 T 细胞起着趋化吸引作用,但对健康细胞却没有作用。由于 $\text{IFN-}\gamma$ 诱导 CXCL10, 我们可以简化假设斑秃中的 T 细胞运动可以直接响应 $\text{IFN-}\gamma$ 浓度。因此,斑秃的发病机制涉及 $\text{IFN-}\gamma$, CD4+ T 细胞和 CD8+ T 细胞之间的时空相互作用, Dobrev 等人通过引入趋化系统,研究了参与疾病发展的这三个组成部分的时空动态。通过引入趋化系统

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi_1 \nabla \cdot (u \nabla w) + w - \mu_1 u^2, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v - \chi_2 \nabla \cdot (v \nabla w) + w + ruv - \mu_2 v^2, & x \in \Omega, t > 0, \\ w_t = \Delta w + u + v - w, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

设未知变量 $u = u(x, t)$ 表示 CD4+ T 细胞的密度, $v = v(x, t)$ 表示 CD8+ T 细胞的密度和 $w = w(x, t)$ 表示 $\text{IFN-}\gamma$ 的浓度。其中, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ 是一个具有光滑边界的有界域。 χ_1 , χ_2 , μ_1 , μ_2 和 r 为给定的正参数。 ν 表示边界 $\partial \Omega$ 上的单位向外法向量, 齐次 Neumann 边界条件意味着不存在跨越边界的通量。在方程中 Δu 、 Δv 、 Δw 表示的是物质随机游走而发生的扩散现象, $(-\chi_1 \nabla \cdot (u \nabla w))$ 、 $(-\chi_2 \nabla \cdot (v \nabla w))$ 表示的是它们会向高浓度物质聚集的现象, $(-w)$ 表示引诱剂活性的衰减, $(+w)$ 项表示聚集的 $\text{IFN-}\gamma$ 越多, 产生的吸引其他细胞的信号就越多; 与经典的双分量 Keller-Segel 系统[4]相比, 模型(1)有两个新特征: 两个免疫细胞都会被趋化信号激活; 更重要的是零阶非线性生成项 ruv 是两个细胞密度的乘积。而非线性生成项通常是模拟病毒感染的系统中细胞密度和化学浓度的乘积[5], 这种不寻常的非线性生成项似乎是该系统的主要新颖之处。

在本论文中, 我们在 $Q := (0, T) \times \Omega$ 中研究系统相关的控制问题:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi_1 \nabla \cdot (u \nabla w) + w - \mu_1 u^2, \\ v_t = \Delta v - \chi_2 \nabla \cdot (v \nabla w) + w + ruv - \mu_2 v^2, \\ w_t = \Delta w + u + v - fw, \end{cases} \quad (2)$$

具有相应的初始条件和边界条件。

在这里, 比例因子 f 可被视为 w 方程中的控制函数。值得注意的是, 控制函数 f 可以解释为通过使用各种药物影响 IFN- γ 浓度的行为。关于偏微分方程的优化控制问题已有大量著作, 参见例如[6]-[12]。但是, 在与趋化性相关的最优控制问题文献很少, 其中在[13]中作者研究了二维癌症侵袭模型的分布式最优控制。通过应用 Leray-Schauder 不动点定理确定了系统弱解的存在性。此外, 他们还证明了最优控制的存在, 导出了最优控制系统。在[14]中, 他们控制作用于化学物质的边界条件, 证明了最优解的存在性。在最近的研究[15]中, 作者分析了一个分布式最优控制问题, 其中状态方程由静态趋化模型与 Navier-Stokes 方程相联系的静态化合模型, 他们验证了最优解的存在性, 并利用惩罚法推出了最优控制系统。在[16]中, 作者在一个二维域里研究了控制变量是分布的并作用于化学物质方程的问题, 最终证明了最优解的存在。其他与非平稳 Keller-Segel 系统和非平稳趋化 - 流体模型可控性相关的研究可分别参考文献[17][18]。

本文的创新之处在于通过拟线性趋化系统来探索斑秃的最优控制。这不仅对治疗和预防脱发具有重要意义, 同时也极大地推动了对拟线性趋化系统的研究。同时, 本文的研究成果为研究拟线性趋化系统提供了新的思路和方法, 对相关领域的研究也具有一定的参考价值。

本文大纲如下: 在第 2 节中固定了术语, 介绍了将要使用的函数空间, 给出系统(2)的强解定义, 并阐述抛物线正则性结果。在第 3 节中, 我们将证明系统(2)的强解的存在性和唯一性。在第 4 节中, 我们证明全局最优解的存在性以及局部最优解相关的最优系统。在第 5 节中, 我们证明了拉格朗日乘子的存在性并推导出了正则性结果。

2. 预备知识

在本节中, 我们将介绍一些符号, 并给出一些初步结果。这些结果在后面的章节中将会经常用到, 而且是处理我们的问题所不可或缺的。字母 $L, C, K, C_1, K_1, \dots$, 是正常数, 与 (u, v, w) 和 f 无关。在下面的定义中, 我们给出了系统(2)的强解的概念。

定义 2.1. 设 $f \in L^4(Q)$, $w_0 \in W_n^{3/2,4}(\Omega)$, $u_0 \in H^1(\Omega)$, $v_0 \in H^1(\Omega)$ 且 $w_0 \geq 0$, $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$, 若 $w \geq 0$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ 并满足

$$w \in \mathcal{Y}_w := \{w \in L^\infty(0, T; W_n^{3/2,4}(\Omega)) \cap L^4(0, T; W_n^{2,4}(\Omega)), \partial_t w \in L^4(Q)\}, \quad (3)$$

$$u \in \mathcal{Y}_u := \{u \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_n^2(\Omega)), \partial_t u \in L^2(Q)\}, \quad (4)$$

$$v \in \mathcal{Y}_v := \{v \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_n^2(\Omega)), \partial_t v \in L^2(Q)\}, \quad (5)$$

则 (w, u, v) 被称为系统(2)的强解。

注 2.2. 我们对 $\hat{W}^{2-2/p,p}(\Omega)$ 空间定义如下

$$\hat{W}^{2-2/p,p}(\Omega) = \begin{cases} W^{2-2/p,p}(\Omega), & p < 3, \\ W_n^{2-2/p,p}(\Omega), & p > 3. \end{cases} \quad (6)$$

为了研究系统(2)解的存在性, 我们将使用以下热方程的正则性结果热方程(见[19])。

引理 2.3. 对于 $\Omega \in C^2$ 设 $1 < p < +\infty$ ($p \neq 3$), $g \in L^p(\Omega)$, $u_0 \in \hat{W}^{2-2/p,p}(\Omega)$, 若存在一个正常数 C , 使得

$$\|u\|_{C(\hat{W}^{2-2/p,p})} + \|\partial_t u\|_{L^p(Q)} + \|u\|_{L^p(W^{2,p})} \leq C \left(\|g\|_{L^p(Q)} + \|u_0\|_{\hat{W}^{2-2/p,p}} \right), \quad (7)$$

则系统

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = g, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (8)$$

存在一个为唯一解 u 满足

$$u \in C([0, T]; \hat{W}^{2-2/p, p}(\Omega)) \cap L^p(0, T; W^{2, p}(\Omega)), \partial_t u \in L^p(Q)$$

因为在下文中，我们会用到 Gagliardo-Nirenberg 不等式。为了便于读者理解为方便读者，让我们简要说明一个简单的版本。

引理 2.4. 设 $R^n, n \geq 2$ 是一个具有光滑边界的有界域， $j \geq 0$ ， $k \geq 0$ 为整数且 $p, q, r, s > 1$ 。则存在常数 $c_1, c_2 > 0$ 使得对于任何函数 $u \in L^q(\Omega) \cap L^s(\Omega)$ 和 $D^k u \in L^r(\Omega)$ ，

$$\|D^j u\|_p \leq c_1 \|D^k u\|_r^\alpha \|u\|_q^{1-\alpha} + c_2 \|u\|_s, \quad (9)$$

其中 $\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \left(\frac{1}{r} - \frac{k}{n}\right)\alpha + \frac{1-\alpha}{q}$ ， $\frac{j}{k} \leq \alpha < 1$ 。

此外在本文中，我们将使用二维域中的经典插值不等式：

$$\|u\|_{L^4} \leq C \|u\|^{1/2} \|u\|_{H^1}^{1/2}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (10)$$

3. 系统强解的存在性和唯一性

在本节中，我们将利用 Leray-Schauder 不动点定理证明(2)的解的存在性。具体来说，我们将证明以下结果：

定理 3.1. 设 $w_0 \in W_n^{3/2, 4}(\Omega)$ ， $u_0 \in H^1(\Omega)$ ， $v_0 \in H^1(\Omega)$ 且 $w_0 \geq 0$ ， $u_0 \geq 0$ ， $v_0 \geq 0$ ， $f \in L^4(Q)$ ，若存在一个正常数

$$\kappa_1 = \kappa_1(m, T, \|w_0\|_{W_n^{3/2, 4}}, \|u_0\|_{H^1}, \|v_0\|_{H^1}, \|f\|_{L^4(Q)}),$$

使得

$$\begin{aligned} & \|(\partial_t w, \partial_t u, \partial_t v)\|_{L^4(Q) \times L^2(Q) \times L^2(Q)} + \|(w, u, v)\|_{C(W_n^{3/2, 4} \times H^1 \times H^1)} + \|w\|_{L^4(W^{2, 4})} \\ & + \|u\|_{L^2(H^2)} + \|v\|_{L^2(H^2)} \leq \kappa_1. \end{aligned} \quad (11)$$

成立，则系统(2)存在一个唯一的强解 (w, u, v) 。

3.1. 存在性

为了证明系统解的局部存在性，我们需要引入“弱”空间

$$\mathcal{X}_w := C^0([0, T]; C(\bar{\Omega})), \mathcal{X}_u = \mathcal{X}_v := C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^{8/3}(0, T; W^{1, 8/3}(\Omega)). \quad (12)$$

结合定义 2.1 我们定义映射 $R: \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v \rightarrow \mathcal{Y}_w \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v \hookrightarrow \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v$ 。且 $R(\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}) = (w, u, v)$ ，即解耦合线性问题的解

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi_1 \nabla \cdot (\bar{u}_+ \nabla w) + \bar{w}_+ - \mu_1 u \bar{u}_+, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v - \chi_2 \nabla \cdot (\bar{v}_+ \nabla w) + \bar{w}_+ + r \bar{u}_+ v - \mu_2 v \bar{v}_+, & x \in \Omega, t > 0, \\ w_t = \Delta w + \bar{u}_+ + \bar{v}_+ - f \bar{w}_+, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (13)$$

其中 $\bar{w}_+ := \max\{\bar{w}, 0\} \geq 0$, $\bar{u}_+ := \max\{\bar{u}, 0\} \geq 0$, $\bar{v}_+ := \max\{\bar{v}, 0\} \geq 0$ 。接下来将参照[20]证明映射 R 有意义且为紧映射, 从而利用 Leray-Schauder 不动点定理建立起解的存在性。

引理 3.2. 算子 $R: \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v \rightarrow \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v$ 有意义且为紧映射。

证: 首先将证明映射 R 是有意义的, 设 $(\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v$ 。由于 $\mathcal{X}_u \hookrightarrow L^4(Q)$, $\mathcal{X}_v \hookrightarrow L^4(Q)$, $f \in L^4(Q)$ 和 $\mathcal{X}_w \subset L^\infty(Q)$, 所以 $(\bar{u}_+ + \bar{v}_+ - f \bar{w}_+) \in L^4(Q)$ 。根据引理 2.3 ($p=4$), 则存在一个唯一解 $w \in \mathcal{Y}_w$ 使得

$$\begin{aligned} & \|w\|_{C(W_n^{3/2,4})} + \|\partial_t w\|_{L^4(Q)} + \|w\|_{L^4(W^{2,4})} \\ & \leq C \left(\|\bar{u}\|_{L^4(Q)} + \|\bar{v}\|_{L^4(Q)} + \|\bar{w}\|_{L^\infty(Q)} \|f\|_{L^4(Q)} + \|w_0\|_{W_n^{3/2,4}} \right) \\ & \leq C \left(\|w_0\|_{W_n^{3/2,4}}, \|f\|_{L^4(Q)} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

现在利用 $w \in \mathcal{Y}_w$, 有

$$\nabla w \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega)) \cap L^4(0, T; W^{1,4}(\Omega)) \hookrightarrow L^8(Q), \quad \Delta w \in L^4(Q).$$

考虑到

$$\nabla \bar{u}_+ \in L^{8/3}(Q), \nabla \bar{v}_+ \in L^{8/3}(Q),$$

和 $(\bar{w}_+, \bar{u}_+, \bar{v}_+) \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v$, 有

$$\bar{u}_+ \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^4(Q)$$

$$\bar{v}_+ \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^4(Q).$$

由于 $\nabla w \in L^8(Q)$, $(\bar{u}_+, \bar{v}_+) \in L^4(Q)$, 我们得到

$$\nabla \cdot (\bar{u}_+ \nabla w) = \nabla \bar{u}_+ \nabla w + \bar{u}_+ \Delta w \in L^2(Q),$$

$$\nabla \cdot (\bar{v}_+ \nabla w) = \nabla \bar{v}_+ \nabla w + \bar{v}_+ \Delta w \in L^2(Q),$$

$$r \bar{u}_+ v \in L^2(Q), \mu_1 u \bar{u}_+ \in L^2(Q), \mu_2 v \bar{v}_+ \in L^2(Q).$$

因此再一次利用引理 2.3 ($p=2$) 我们有

$$\begin{aligned} & \|v\|_{C(W_n^{1,2})} + \|\partial_t v\|_{L^2(Q)} + \|v\|_{L^4(W^{2,2})} \\ & \leq C \left(\chi_2 \|\nabla \bar{v} \nabla w + \bar{v} \Delta w\|_{L^2(Q)} + \|w\|_{L^2(Q)} + r \|\bar{u} v\|_{L^2(Q)} + \mu_2 \|\bar{v} v\|_{L^2(Q)} \right) \\ & \leq C \left(\chi_2 \|\nabla \bar{v}\|_{L^{8/3}(Q)} \|\nabla w\|_{L^8(Q)} + \chi_2 \|\bar{v}\|_{L^4(Q)} \|\Delta w\|_{L^4(Q)} + \|w\|_{L^2(Q)} \right. \\ & \quad \left. + r \|\bar{u}\|_{L^4(Q)} \|v\|_{L^4(Q)} + \mu_2 \|\bar{v}\|_{L^4(Q)} \|v\|_{L^4(Q)} + \|v_0\|_{H^1} \right) \\ & \leq C \left(\|w_0\|_{W_n^{3/2,4}}, \|u_0\|_{H^1}, \|v_0\|_{H^1}, \|f\|_{L^4(Q)} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

和

$$\begin{aligned}
 & \|u\|_{C(W_n^{1,2})} + \|\partial_t u\|_{L^2(Q)} + \|u\|_{L^4(W^{2,2})} \\
 & \leq C \left(\chi_1 \|\nabla \bar{u} \nabla w + \bar{u} \Delta w\|_{L^2(Q)} + \|w\|_{L^2(Q)} + \mu_1 \|\bar{u} u\|_{L^2(Q)} \right) \\
 & \leq C \left(\chi_1 \|\nabla \bar{u}\|_{L^{8/3}(Q)} \|\nabla w\|_{L^8(Q)} + \chi_1 \|\bar{u}\|_{L^4(Q)} \|\Delta w\|_{L^4(Q)} + \|w\|_{L^2(Q)} \right. \\
 & \quad \left. + \mu_2 \|\bar{u}\|_{L^4(Q)} \|u\|_{L^4(Q)} + \|u_0\|_{H^1} \right) \\
 & \leq C \left(\|w_0\|_{W_n^{3/2,4}}, \|u_0\|_{H^1}, \|v_0\|_{H^1}, \|f\|_{L^4(Q)} \right).
 \end{aligned} \tag{16}$$

因此, 根据以上的估计可以得到, $R: \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v \rightarrow \mathcal{Y}_w \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v$ 有意义。

接下来我们将证明 R 为紧映射, R 的紧性是估计(14), (15)和(16)以及紧嵌入 $\mathcal{Y}_w \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v \hookrightarrow \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v$ 的结果。由(15), (16)可知, u 和 v 在 $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ 中是有界的, $\partial_t u$ 和 $\partial_t v$ 在 $L^2(Q)$ 中是有界的。由于 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ 是紧嵌入的, 从[21]的定理 5.1 中, 我们有 $\mathcal{Y}_u$ 和 $\mathcal{Y}_v$ 紧地嵌入到 $C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ 。另一方面, 在 $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ 和 $L^2(0, T; H^2(\Omega))$ 中插值, u 和 v 在 $L^{8/3}(0, T; H^{7/4}(\Omega))$ 中是有界的(见[19])。由于 $H^{7/4}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$, $p < 8$ 是紧嵌入的, $\partial_t u$ 和 $\partial_t v$ 在 $L^2(Q)$ 中是有界的, 同样的我们可以得到 $\mathcal{Y}_u$ 和 $\mathcal{Y}_v$ 是紧嵌入到 $L^{8/3}(0, T; W^{1,8/3}(\Omega))$ 的。类似地, 由(14)知 w 在 $L^\infty(0, T; W_n^{3/2,4}(\Omega))$ 中是有界的, $\partial_t w$ 在 $L^4(Q)$ 中有界。现在考虑到 $W_n^{3/2,4}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ 是紧嵌入, 我们可以推导出 $\mathcal{Y}_w$ 是紧嵌入到 $C^0([0, T]; C^0(\bar{\Omega})) = C^0([0, T]; \times \bar{\Omega})$ 的, 由此我们可以得到 R 为紧映射。

接下来我们将利用 Leray-Schauder 不动点定理证明系统(2)解的长时间存在, 为了得到此结果, 我们先给出如下引理。

引理 3.3. 若集合

$$T_\alpha = \{(w, u, v) \in \mathcal{Y}_w \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v : (w, u, v) = \alpha R(w, u, v), \alpha \in [0, 1]\}.$$

在 $\mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v$ 与 $\mathcal{Y}_w \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v$ 中有界(与 α 无关), 则存在

$$M = M \left(m, T, \|w_0\|_{W_n^{3/2,4}}, \|u_0\|_{H^1}, \|v_0\|_{H^1}, \|f\|_{L^4(Q)} \right) > 0. \tag{18}$$

其中 M 与 α 无关, 对于 $\forall (w, u, v) \in T_\alpha$ ($\alpha \in [0, 1]$) 都满足

$$\|(w, u, v)\|_{L^4(W^{2,4}) \times L^2(H^2) \times L^2(H^2)} + \|(\partial_t w, \partial_t u, \partial_t v)\|_{L^4(Q) \times L^2(Q) \times L^2(Q)} + \|(w, u, v)\|_{C(W_n^{3/2,4} \times H^1 \times H^1)} \leq M.$$

证. 设 $(w, u, v) \in T_\alpha, \alpha \in [0, 1]$ ($\alpha = 0$ 的情况不做讨论)。然后, 由于定理 3.2, $(w, u, v) \in \mathcal{Y}_w \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v$ 且满足以下方程:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \alpha \chi_1 \nabla \cdot (u_+ \nabla w) + \alpha w_+ - \alpha \mu_1 u u_+, \\ v_t = \Delta v - \alpha \chi_2 \nabla \cdot (v_+ \nabla w) + \alpha w_+ + \alpha r u_+ v - \alpha \mu_2 v v_+, \\ w_t = \Delta w + \alpha u_+ + \alpha v_+ - \alpha f w_+, \end{cases} \tag{19}$$

具有相应的初始条件和边界条件。因此, 只需要证明 (w, u, v) 在 $\mathcal{Y}_w \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v$ 中是有界的就足够了。但在此之前, 我们需要证明 (u, v, w) 的非负性和一些估计。

引理 3.4. 满足方程(19)的解 (u, v, w) 具有非负性。

证. 将(19)₃ 两端同时乘以 $w_- := \min\{w, 0\} \leq 0$, 考虑到若 $w \geq 0$, 则 $w_- = 0$, 若 $w \leq 0$, 则 $w_- = w$, 若 $w = 0$, 则 $w_- = 0$, 所以我们有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_-\|^2 + \|\nabla w_-\|^2 = \alpha(u_+, w_-) + \alpha(v_+, w_-) - \alpha(fw_+, w_-) \leq 0,$$

因此 $w_- \equiv 0$ ，所以 $w \geq 0$ 。

类似的，将(19)₂和(19)₁两端同时分别乘以 $v_- := \min\{v, 0\} \leq 0$ 和 $u_- := \min\{u, 0\} \leq 0$ 。考虑到，若 $v \geq 0$ 则 $v_- = 0$ ，若 $v \leq 0$ 则 $\nabla v_- = \nabla v$ ，若 $v > 0$ 则 $\nabla v_- = 0$ ，我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_-\|^2 + \|\nabla v_-\|^2 &= \alpha(v_+ \nabla w, \nabla v_-) + \alpha r(u_+ v, v_-) + \alpha(w_+, v_-) + \alpha \mu_2(v_+ v, v_-) \leq 0, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_-\|^2 + \|\nabla u_-\|^2 &= \alpha(u_+ \nabla w, \nabla u_-) + \alpha(w_+, u_-) + \alpha \mu_1(u_+ u, u_-) \leq 0. \end{aligned}$$

意味着 $u_- \equiv 0$ 和 $v_- \equiv 0$ ，所以 $u, v \geq 0$ 。

引理 3.5. 存在 $m, L > 0$ 使得(2)的解满足

$$\int_{\Omega} u(\cdot, t) \leq m, \quad \int_{\Omega} v(\cdot, t) \leq m \quad \text{和} \quad \int_{\Omega} w(\cdot, t) \leq m, \quad \forall t > 0. \quad (20)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} u^2 \leq L, \quad \int_0^T \int_{\Omega} v^2 \leq L, \quad \forall t > 0. \quad (21)$$

证：由于在边界上 $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu}$ ，我们在 Ω 上对(2)中每个方程进行积分，得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u + \int_{\Omega} u &= \alpha \int_{\Omega} w + \int_{\Omega} u - \mu_1 \alpha \int_{\Omega} u^2, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v + \int_{\Omega} v &= \alpha \int_{\Omega} w + \int_{\Omega} v + r \alpha \int_{\Omega} uv - \mu_2 \alpha \int_{\Omega} v^2, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w + \int_{\Omega} w &= \alpha \int_{\Omega} u + \alpha \int_{\Omega} v + \int_{\Omega} w - \alpha \int_{\Omega} fw. \end{aligned} \quad (22)$$

由于对 $\forall t > 0$ 有 $r \int_{\Omega} uv \leq \frac{\mu_2}{2} \int_{\Omega} v^2 + \frac{r^2}{2\mu_2} \int_{\Omega} u^2$ ，根据 Young 不等式，直接计算即可得出

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u + \int_{\Omega} u &= \alpha \int_{\Omega} w + \int_{\Omega} u - \mu_1 \alpha \int_{\Omega} u^2, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v + \int_{\Omega} v &= \alpha \int_{\Omega} w + \int_{\Omega} v + r \alpha \int_{\Omega} uv - \mu_2 \alpha \int_{\Omega} v^2, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w + \int_{\Omega} w &= \alpha \int_{\Omega} u + \alpha \int_{\Omega} v + \int_{\Omega} w - \alpha \int_{\Omega} fw. \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} u + \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} \int_{\Omega} v + \left(2 + \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} \right) \int_{\Omega} w \right\} + \int_{\Omega} u + \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} \int_{\Omega} v + \int_{\Omega} w \\ &\leq \left(3 + \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} \right) \int_{\Omega} u - \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} u^2 + \left(2 + \frac{2\mu_1 \mu_2}{r^2} \right) \int_{\Omega} v - \frac{\mu_1 \mu_2^2}{2r^2} \int_{\Omega} v^2. \end{aligned} \quad (24)$$

现在令

$$y(t) := \int_{\Omega} u(\cdot, t) + \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} \int_{\Omega} v(\cdot, t) + \left(2 + \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} \right) \int_{\Omega} w(\cdot, t), \quad \forall t > 0$$

再次利用 Young 不等式，我们有

$$y'(t) + c_1 y(t) + \frac{\mu_1}{4} \int_{\Omega} u^2 + \frac{\mu_1 \mu_2^2}{4r^2} \int_{\Omega} v^2 \leq c_2, \quad \forall t > 0. \quad (25)$$

其中 $c_1 := \left(2 + \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}\right)^{-1} < 1$ 和 $c_2 := \frac{1}{\mu_1} \left(3 + \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}\right)^2 \cdot |\Omega| + \frac{r^2}{\mu_1 \mu_2^2} \left(2 + \frac{2\mu_1 \mu_2}{r^2}\right)^2 \cdot |\Omega|$ 。通过 ODE 比较定理可知

$$y(t) \leq \max \left\{ y(0), \frac{c_2}{c_1} \right\}, \quad \forall t > 0.$$

所以就得到了(20)，若对(25)两端同时对时间积分，就可以得到(21)。

根据引理 3.4.将系统(19)转化处理下列适定性系统(26)，利用相关指标和嵌入不等式得到 u, v, w 的 L^∞ 估计进而来证明 (w, u, v) 在 $\mathcal{Y}_w \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v$ 中是有界的。

引理 3.6. 设 (u, v, w) 是方程(26)的解，则 (u, v, w) 在 $\mathcal{Y}_w \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v$ 中有界。

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \alpha \chi_1 \nabla \cdot (u \nabla w) + \alpha w - \alpha \mu_1 u^2, \\ v_t = \Delta v - \alpha \chi_2 \nabla \cdot (v \nabla w) + \alpha w + \alpha r u v - \alpha \mu_2 v^2, \\ w_t = \Delta w + \alpha u + \alpha v - \alpha f w. \end{cases} \quad (26)$$

证：为了方便读者更好理解，这个证明将分为 4 个步骤。

步骤 1: w 在 $L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$ 中有界。

将(26)₃ 两端同时乘以 w 并同时积分我们有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \|\nabla w\|^2 = \alpha(u, w) + \alpha(v, w) - \alpha(fw, w). \quad (27)$$

利用 Holder 不等式和 Young 不等式以及(10)，我们有

$$-\alpha(fw, w) \leq \|f\|_{L^4} \|w\|_{L^4} \|w\| \leq \frac{1}{2} \|f\|_{L^4}^2 \|w\|^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \|w\|_{H^1}^2, \quad (28)$$

$$\alpha(u, w) + \alpha(v, w) \leq \frac{1}{2} \alpha^2 (\|u\|^2 + \|v\|^2) + \|w\|^2, \quad (29)$$

所以我们可以得到

$$\frac{d}{dt} \|w\|^2 + C \|w\|_{H^1}^2 \leq C (1 + \|f\|_{L^4}^2) \|w\|^2 + C (\|u\|^2 + \|v\|^2), \quad (30)$$

现将(26)₃ 两端同时乘以 $-\Delta w \in L^4(Q)$ 并积分。类似的我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla w\|^2 + \|\Delta w\|^2 &= -\alpha(u + v, \Delta w) - \alpha(fw, \Delta w) \\ &\leq \frac{1}{2} \|\Delta w\|^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \|u\|^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \|v\|^2 + \alpha^2 C_\delta \|f\|_{L^4}^2 \|w\|_{H^1}^2 + \delta \|w\|_{H^2}^2, \end{aligned} \quad (31)$$

取 δ 足够小以至于可以消去 $\|\Delta w\|^2$ 和 $\|w\|_{H^2}^2$ ，所以我们有

$$\frac{d}{dt} \|w\|_{H^1}^2 + C \|w\|_{H^2}^2 \leq C \|f\|_{L^4}^2 \|w\|_{H^1}^2 + C (\|u\|^2 + \|v\|^2), \quad (32)$$

根据(30)和(32)，利用 Gronwall 定理，我们得到

$$\|w\|_{L^\infty(H^1)}^2 + \|w\|_{L^2(H^2)}^2 \leq K_1 \left(L, T, \|f\|_{L^2(L^4)}, \|w_0\|_{H^1} \right), \quad (33)$$

因此， w 在 $L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$ 中有界。

步骤 2: u, v 在 $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ 中都有界。

将(26)₁ 两端同时乘以 u 并积分, 利用 Holder 不等式和 Young 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 &= \alpha(u \nabla w, \nabla u) + \alpha(w, u) - \alpha \mu_1(u^2, u) \\ &\leq \alpha \chi_1 \|u\|_{L^4} \|\nabla w\|_{L^4} \|\nabla u\| + \frac{1}{2} \alpha \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \alpha \|w\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \alpha^4 \chi_1^4 \|u\|^2 \|\nabla w\|_{L^4}^4 + \frac{1}{2} \|u\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2} \alpha \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \alpha \|w\|_{L^2}^2, \end{aligned} \quad (34)$$

考虑 $\alpha=1$ 和在(10)中关于 $H^1(\Omega)$ 的等价定义, 我们有

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + C \|u\|_{H^1}^2 \leq C \|u\|^2 (\|\nabla w\|_{L^4}^4 + 1) + \frac{1}{2} \|w\|_{L^2}^2, \quad (35)$$

另一方面

$$\|\nabla w\|_{L^4}^4 \leq C \|w\|_{L^\infty(H^1)}^2 \|w\|_{L^2(H^2)}^2 \leq CK_1, \quad (36)$$

因此, 根据(35)和(36)利用 Gronwall 定理得到

$$\|u\|_{L^\infty(L^2)}^2 := K_2 \left(m, T, \|w_0\|_{H^1}, \|u_0\|, \|v_0\|, \|f\|_{L^2(L^4)} \right), \quad (37)$$

同时对(35)在 $(0, T)$ 上积分我们有

$$\|u\|_{L^2(H^1)}^2 := K_3 \left(L, T, \|w_0\|_{H^1}, \|u_0\|, \|v_0\|, \|f\|_{L^2(L^4)} \right), \quad (38)$$

类似可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 &= \alpha(u \nabla w, \nabla u) + \alpha(w, u) - \alpha \mu_1(u^2, u) \\ &\leq \alpha \chi_1 \|u\|_{L^4} \|\nabla w\|_{L^4} \|\nabla u\| + \frac{1}{2} \alpha \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \alpha \|w\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \alpha^4 \chi_1^4 \|u\|^2 \|\nabla w\|_{L^4}^4 + \frac{1}{2} \|u\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2} \alpha \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \alpha \|w\|_{L^2}^2, \end{aligned} \quad (39)$$

考虑到(10)中给出的 $H^1(\Omega)$ 的等价范数和(20)中给出的 v 的 L^1 估计值, 我们得到

$$\frac{d}{dt} \|v\|^2 + C \|v\|_{H^1}^2 \leq C \|v\|^2 (\|\nabla w\|_{L^4}^4 + 1) + \frac{1}{2} \alpha \|w\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 r^2 \|u\|_{L^4}^2 \|v\|^2, \quad (40)$$

根据(39)和(40)利用(10), 我们有

$$\|u\|_{L^4(Q)}^4 \leq \|u\|_{L^\infty(L^2)}^2 \|u\|_{L^2(H^1)}^2 \leq CK_2 K_3, \quad (41)$$

然后对(39)使用 Gronwall 定理, 得到

$$\|v\|_{L^2(L^2)}^2 \leq K_4 \left(L, T, \|w_0\|_{H^1}, \|u_0\|, \|v_0\|, \|f\|_{L^2(L^4)} \right), \quad (42)$$

同样的

$$\|v\|_{L^2(H^1)}^2 \leq K_5 \left(L, T, \|w_0\|_{H^1}, \|u_0\|, \|v_0\|, \|f\|_{L^2(L^4)} \right), \quad (43)$$

因此, 我们可以得到 u, v 在 $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ 中是有界的。

步骤 3: w 在 $\mathcal{Y}_w$ 中有界。

由于 $f \in L^4(Q)$, $w \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, 又因为 $\alpha fw \in L^{7/2}(Q)$ 。所以现在对(26)₃用引理 2.3 ($p = 7/2$)我们可以得到 w 满足下列不等式:

$$\begin{aligned} & \|w\|_{C(w_n^{10/7, 7/2})} + \|\partial_t w\|_{L^{7/2}(Q)} + \|w\|_{L^{7/2}(w^{10/7, 7/2})} \\ & \leq C \left(\|u\|_{L^{7/2}(Q)} + \|v\|_{L^{7/2}(Q)} + \|w\|_{L^{28}(Q)} \|f\|_{L^4(Q)} + \|w_0\|_{W_1^{10/7, 7/2}} \right) \\ & \leq C \left(\|u\|_{L^4(Q)} + \|v\|_{L^4(Q)} + \|w\|_{L^{28}(Q)} \|f\|_{L^4(Q)} + \|w_0\|_{W_1^{10/7, 7/2}} \right), \end{aligned} \quad (44)$$

由于 $\|w\|_{L^{28}} \leq K_1$, 利用(10)并考虑到(42)和(43), 我们得到:

$$\|v\|_{L^4}^4 \leq \|v\|_{L^\infty(L^2)}^2 \|v\|_{L^2(H^1)}^2 \leq CK_4 K_5. \quad (45)$$

因此, 从(45)知 $\|w\|_{C(w_n^{10/7, 7/2})}$ 是有界的。又因为 $\|w\|_{C(w_n^{10/7, 7/2})} \hookrightarrow \|w\|_{L^\infty(Q)}$, 所以我们得到 $\|w\|_{L^\infty(Q)}$ 同样也是有界的。

那么, 再次利用引理 2.3 ($p = 4$), 我们可以得出 w 的估计:

$$\begin{aligned} & \|w\|_{C(w_n^{10/7, 7/2})} + \|\partial_t w\|_{L^{7/2}(Q)} + \|w\|_{L^{7/2}(w^{10/7, 7/2})} \\ & \leq C \left(\|u\|_{L^{7/2}(Q)} + \|v\|_{L^{7/2}(Q)} + \|w\|_{L^{28}(Q)} \|f\|_{L^4(Q)} + \|w_0\|_{W_1^{10/7, 7/2}} \right) \\ & \leq C \left(\|u\|_{L^4(Q)} + \|v\|_{L^4(Q)} + \|w\|_{L^{28}(Q)} \|f\|_{L^4(Q)} + \|w_0\|_{W_1^{10/7, 7/2}} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

因此 w 在 $\mathcal{Y}_w$ 中是有界的。

步骤 4: u, v 分别在 $\mathcal{Y}_u$ 和 $\mathcal{Y}_v$ 中有界。

(26)₁ 两边同时乘以 $-\Delta u \in L^2(Q)$ 并积分, 然后利用 Holder 不等式和 Young 不等式我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 &= -\alpha \chi_1 (u \Delta w + \nabla u \cdot \nabla w, \Delta u) - \alpha (w, \Delta u) + \alpha \mu_1 (u^2, \Delta u) \\ &\leq (\|u\|_{L^4} \|\Delta w\|_{L^4} + \|\nabla u\|_{L^4} \|\nabla w\|_{L^4}) \|\Delta u\| + \frac{1}{2} \alpha^2 \|w\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \mu_1^2 \|u\|_{L^4}^4 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 \\ &\leq \delta \|\Delta u\|^2 + C_\delta \|u\|_{L^4}^2 \|\Delta w\|_{L^4}^2 + C \|\nabla u\|^{1/2} \|\nabla w\|_{L^4} \|u\|_{H^2}^{3/2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha^2 \|w\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \mu_1^2 \|u\|_{L^4}^4 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 \\ &\leq \delta \|\Delta u\|^2 + C_\delta \|u\|_{L^4}^2 \|\Delta w\|_{L^4}^2 + C_\delta \|\nabla u\|^2 \|\nabla w\|_{L^4}^4 + \delta \|u\|_{H^2}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha^2 \|w\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \mu_1^2 \|u\|_{L^4}^4 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2, \end{aligned} \quad (47)$$

取 δ 足够小以至于可以消去 $\|u\|^2$ 和 $\|u\|_{H^2}^2$, 所以我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|_{H^1}^2 + C \|u\|_{H^2}^2 &\leq C \|u\|_{L^4}^2 \|\Delta w\|_{L^4}^2 + C \|\nabla u\|^2 \|\nabla w\|_{L^4}^4 + \frac{1}{2} \alpha \|w\|^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \mu_1^2 \|u\|_{L^4}^4 \\ &\leq C \|u\|_{H^1}^2 \|\Delta w\|_{L^4}^2 + C \|u\|_{H^1}^2 \|\nabla w\|_{L^4}^4 + \frac{1}{2} \alpha \|w\|^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \mu_1^2 \|u\|_{L^4}^4 \\ &\leq C \|u\|_{H^1}^2 \|w\|_{W^{2,4}}^4 + \frac{1}{2} \alpha \|w\|^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \mu_1^2 \|u\|_{L^4}^4. \end{aligned} \quad (48)$$

应用 Gronwall 定理, 我们可以得到

$$\|u\|_{L^{\infty}(H^1)}^2 \leq K_7 \left(L, T, \|u_0\|_{H^1}, \|v_0\|_{H^1}, \|w_0\|_{W_n^{3/2,4}}, \|f\|_{L^4(Q)} \right). \quad (49)$$

最后, 对(48)在\$(0, T)\$上积分, 我们得到

$$\|u\|_{L^2(H^2)}^2 \leq K_8 \left(L, T, \|u_0\|_{H^1}, \|v_0\|_{H^1}, \|w_0\|_{W_n^{3/2,4}}, \|f\|_{L^4(Q)} \right), \quad (50)$$

且

$$\begin{aligned} \|\partial_t u\|_{L^2(Q)} &= \|\Delta u - \alpha \chi_1 \nabla \cdot (u \nabla w) + w - \alpha \mu_1 u^2\|_{L^2(Q)} \\ &\leq \|\Delta u\|_{L^2(Q)} + \alpha \chi_1 \|u\|_{L^4(Q)} \|\Delta w\|_{L^4(Q)} + \|\nabla u\|_{L^4(Q)} \|\nabla w\|_{L^4(Q)} \\ &\quad + \|w\|_{L^2(Q)} + \alpha \mu_1 \|u\|_{L^4}^2 \\ &\leq K_9 \left(L, T, \|u_0\|_{H^1}, \|v_0\|_{H^1}, \|w_0\|_{W_n^{3/2,4}}, \|f\|_{L^4(Q)} \right). \end{aligned} \quad (51)$$

这意味着 \$u\$ 在 \$\mathcal{Y}_u\$ 中是有界的。

类似地, (26)₂ 两边同时乘以 \$-\Delta v \in L^2(Q)\$ 并积分利用 Holder 不等式和 Young 不等式我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v\|^2 + \|\Delta v\|^2 &= -\alpha \chi_2 (\nabla v \nabla w + v \Delta w, \nabla v) - \alpha (w, \Delta v) + \alpha \mu_2 (v^2, \Delta v) - \alpha r (uv, \Delta v) \\ &\leq \delta \|\Delta v\|^2 + C_\delta \|v\|_{L^4}^2 \|\Delta w\|_{L^4}^2 + C_\delta \|\nabla v\|^2 \|\nabla w\|_{L^4}^4 + \delta \|v\|_{H^2}^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \|w\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\Delta v\|^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \mu_2^2 \|v\|_{L^4}^4 + \frac{1}{2} \|\Delta v\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta v\|^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 r^2 \|u\|_{L^4}^2 \|v\|_{L^4}^2. \end{aligned} \quad (52)$$

所以

$$\frac{d}{dt} \|v\|_{H^1}^2 + C \|v\|_{H^2}^2 \leq C \|v\|_{H^1}^2 \|w\|_{W^{2,4}}^4 + C \left(\|w\|^2 + \|v\|_{L^4}^4 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^4}^2 \|v\|_{L^4}^2 \right), \quad (53)$$

应用 Gronwall 定理并对(53)在\$(0, T)\$上积分我们有

$$\|v\|_{L^{\infty}(H^1)}^2 \leq K_{10} \left(L, T, \|u_0\|_{H^1}, \|v_0\|_{H^1}, \|w_0\|_{W_n^{3/2,4}}, \|f\|_{L^4(Q)} \right), \quad (54)$$

$$\|v\|_{L^2(H^2)}^2 \leq K_{11} \left(L, T, \|u_0\|_{H^1}, \|v_0\|_{H^1}, \|w_0\|_{W_n^{3/2,4}}, \|f\|_{L^4(Q)} \right), \quad (55)$$

和

$$\begin{aligned} \|\partial_t v\|_{L^2(Q)} &= \|\Delta v - \alpha \chi_2 \nabla \cdot (v \nabla w) + w - \alpha \mu_2 v^2 + \alpha r u v\|_{L^2(Q)} \\ &\leq \|\Delta v\|_{L^2(Q)} + \|v\|_{L^4(Q)} \|\Delta w\|_{L^4(Q)} + \|\nabla v\|_{L^4(Q)} \|\nabla w\|_{L^4(Q)} + \|w\|_{L^2(Q)} \\ &\quad + \alpha \mu_1 \|v\|_{L^4}^2 + \alpha r (\|u\|_{L^4} + \|v\|_{L^4}) \\ &\leq K_{12} \left(L, T, \|u_0\|_{H^1}, \|v_0\|_{H^1}, \|w_0\|_{W_n^{3/2,4}}, \|f\|_{L^4(Q)} \right), \end{aligned} \quad (56)$$

这意味着 \$v\$ 在 \$\mathcal{Y}_v\$ 中是有界的。

最后, 综上所述我们可以得到 \$T_\alpha\$ 在 \$\mathcal{Y}_w \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v\$ 中是有界的 (\$\alpha \in (0, 1]\$)。 (18)取决于(46), (49)~(51)和(54)~(56)。

引理 3.7. 映射 \$R: \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v \rightarrow \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v\$ 是连续的。

证明. 设 \$\{(\bar{w}_m, \bar{u}_m, \bar{v}_m)\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v\$ 是一个序列, 有

$$\text{在 } \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v \text{ 中 } (\bar{w}_m, \bar{u}_m, \bar{v}_m) \rightarrow (\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}), \quad (57)$$

特别地, $\{(\bar{w}_m, \bar{u}_m, \bar{v}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v$ 中有界, 因此, 从(14), (15)和(16)我们可以推导出序列 $\{(w_m, u_m, v_m) := R(\bar{w}_m, \bar{u}_m, \bar{v}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v$ 中有界。又因为, 从 $\mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v$ 在 $\mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v$ 的紧性可知(见引理 3.2 证明), 存在一个序列 $\{R(\bar{w}_m, \bar{u}_m, \bar{v}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$, 同样记为 $\{R(\bar{w}_m, \bar{u}_m, \bar{v}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$, 和一个元素 $(\tilde{w}, \tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{Y}_w \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v$ 使得

$$R(\bar{w}_m, \bar{u}_m, \bar{v}_m) \rightarrow (\tilde{w}, \tilde{u}, \tilde{v}) \text{ 在 } \mathcal{Y}_w \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v \text{ 中为弱收敛, 在 } \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v \text{ 中为强收敛,} \quad (58)$$

根据(57)和(58)我们可以对(26)取极限, 当 m 趋向于 $+\infty$ 时, 有 $(w, u, v) = R(\bar{w}_m, \bar{u}_m, \bar{v}_m)$ 和 $(\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}) = (\bar{w}_m, \bar{u}_m, \bar{v}_m)$, 这意味着 $R(\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}) = (\tilde{w}, \tilde{u}, \tilde{v})$ 。然后, 根据极限的唯一性, 整个序列 $\{R(\bar{w}_m, \bar{u}_m, \bar{v}_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v$ 中强收敛到 $R(\bar{w}, \bar{u}, \bar{v})$ 。因此, 映射 $R: \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v \rightarrow \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_v$ 是连续的。

因此, 根据引理 3.2~引理 3.7 可以得出映射 R 和集合 T_a 满足 Leray-Schauder 不动点定理的条件。因此, 我们得出映射 $R(\bar{w}, \bar{u}, \bar{v})$ 有一个不动点 $R(w, u, v) = (w, u, v)$ 为系统(2)的解。最后我们可以发现估计式(11)是由(46), (49)~(51)和(54)~(56)推导出来的。

3.2. 唯一性

接下来证明系统解的唯一性, 设 $(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) \in \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v \times \mathcal{Y}_w$ 是系统(2)的两个解。将 (u_1, v_1, w_1) and (u_2, v_2, w_2) 代入方程并相减, 记 $u := u_1 - u_2$, $v := v_1 - v_2$ 和 $w := w_1 - w_2$ 我们可以得到

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi_1 \nabla (u_1 \nabla w + u \nabla w_2) + w - \mu_1 u_1^2 + \mu_1 u_2^2, \\ v_t = \Delta v - \chi_2 \nabla (v_1 \nabla w + v \nabla w_2) + w + r u_1 v_1 - r u_2 v_2 - \mu_2 v_1^2 + \mu_2 v_2^2, \\ w_t = \Delta w + u + v - fw, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, x \in \partial \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, v(x, 0) = 0, w(x, 0) = 0, x \in \Omega. \end{cases} \quad (59)$$

对每个方程两边分别乘以 $u, v, -\Delta w$ 并积分我们有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 = \chi_1 (u_1 \nabla w, \nabla u) + \chi_1 (u \nabla w_2, \nabla u) + (w, u) - \mu_1 (u_1^2, u) + \mu_1 (u_2^2, u), \quad (60)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 + \|\nabla v\|^2 = \chi_2 (v_1 \nabla w, \nabla v) + \chi_2 (v \nabla w_2, \nabla v) + (w, v) + r (u_1 v_1 - u_2 v_2, v) - \mu_2 (v_1^2 - v_2^2, v), \quad (61)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla w\|^2 + \|\Delta w\|^2 = -(u + v, \Delta w) + (fw, \Delta w), \quad (62)$$

应用 Holder 不等式和 Young 不等式以及(10), 我们得到

$$\begin{aligned} \chi_1 (u_1 \nabla w, \nabla u) &\leq \chi_1 \|u_1\|_{L^4} \|\nabla w\|_{L^4} \|\nabla u\| \leq \chi_1 \|u_1\|_{L^4} \|\nabla w\|_{H^1}^{1/2} \|\nabla w\|_{H^1}^{1/2} \|\nabla u\| \\ &\leq \chi_1 \delta (\|\nabla w\|_{H^1}^2 + \|\nabla u\|^2) + \chi_1 C_\delta \|u_1\|_{L^4}^4 \|\nabla w\|^2, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \chi_1 (u \nabla w_2, \nabla u) &\leq \chi_1 \|u\|_{L^4} \|\nabla w_2\|_{L^4} \|\nabla u\| \leq \chi_1 \|\nabla w_2\|_{L^4} \|u\|_{H^1}^{1/2} \|u\|_{H^1}^{1/2} \|\nabla u\| \\ &\leq \chi_1 \delta (\|u\|_{H^1}^2 + \|\nabla u\|^2) + \chi_1 C_\delta \|\nabla w_2\|_{L^4}^4 \|u\|^2, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\chi_2(v_1 \nabla w, \nabla v) \leq \chi_2 \delta (\|\nabla w\|_{H^1}^2 + \|\nabla v\|^2) + \chi_2 C_\delta \|v_1\|_{L^4}^4 \|\nabla w\|^2, \quad (65)$$

$$\chi_2(v_1 \nabla w, \nabla v) \leq \chi_2 \delta (\|\nabla w\|_{H^1}^2 + \|\nabla v\|^2) + \chi_2 C_\delta \|v_1\|_{L^4}^4 \|\nabla w\|^2, \quad (66)$$

$$(fw, \Delta w) \leq \|f\|_{L^4} \|w\|_{L^4} \|\Delta w\| \leq \delta \|w\|_{H^2}^2 + C_\delta \|f\|_{L^4}^2 \|w\|_{H^1}^2, \quad (67)$$

同样的，我们也有

$$(w, u) \leq \frac{1}{2} \|w\|^2 + \frac{1}{2} \|u\|^2, \quad (w, v) \leq \frac{1}{2} \|w\|^2 + \frac{1}{2} \|v\|^2, \quad (68)$$

$$-(u + v, \Delta w) \leq \frac{1}{2} \|\Delta w\|^2 + \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2), \quad (69)$$

在这里我们考虑

$$\begin{aligned} -\mu_1(u_1^2, u) + \mu_1(u_2^2, u) &= -\mu_1((u_1 - u_2)(u_1 + u_2), u) = -\mu_1(u(u_1 + u_2), u), \\ -\mu_2(v_1^2, v) + \mu_2(v_2^2, v) &= -\mu_2((v_1 - v_2)(v_1 + v_2), v) = -\mu_2(v(v_1 + v_2), v), \\ r(u_1 v_1 - u_2 v_2, v) &= r(uv_1 + vu_2, v), \end{aligned}$$

对于剩余项，同样应用 Holder 不等式和 Young 不等式以及(10)，我们得到

$$\begin{aligned} -\mu_1(u_1^2, u) + \mu_1(u_2^2, u) &= -\mu_1(u(u_1 + u_2), u) \leq \mu_1(\|u_1\|_{L^4} + \|u_2\|_{L^4}) \|u\|_{L^4} \|u\| \\ &\leq \delta (\|u\|^2 + \|u\|_{H^1}^2) + C_\delta (\|u_1\|_{L^4}^4 + \|u_2\|_{L^4}^4) \|u\|^2, \end{aligned} \quad (70)$$

$$-\mu_2(v_1^2, v) + \mu_2(v_2^2, v) = -\mu_2(v(v_1 + v_2), v) \leq \delta (\|v\|^2 + \|v\|_{H^1}^2) + C_\delta (\|v_1\|_{L^4}^4 + \|v_2\|_{L^4}^4) \|v\|^2, \quad (71)$$

$$\begin{aligned} r(u_1 v_1 - u_2 v_2, v) &= r(uv_1 + vu_2, v) \leq \|u\|_{L^4} \|v_1\|_{L^4} \|v\| + \|v\|_{L^4} \|u_2\|_{L^4} \|v\| \\ &\leq \delta (\|v\|^2 + \|u\|_{H^1}^2 + \|v\|_{H^1}^2) + C_\delta \|v_1\|_{L^4}^4 \|u\|^2 + C_\delta \|u_2\|_{L^4}^4 \|v\|^2, \end{aligned} \quad (72)$$

根据(60)~(72)，取 δ 足够小，我们有

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} (\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|_{H^1}^2) + C (\|u\|_{H^1}^2 + \|v\|_{H^1}^2 + \|w\|_{H^2}^2) \\ &\leq C (\|u\|^2 (\|\nabla w_2\|_{L^4}^4 + \|u_1\|_{L^4}^4 + \|u_2\|_{L^4}^4 + \|v_1\|_{L^4}^4 + 1) \\ &\quad + \|v\|^2 (\|\nabla w_2\|_{L^4}^4 + \|v_1\|_{L^4}^4 + \|v_2\|_{L^4}^4 + \|u_2\|_{L^4}^4 + 1) + \|w\|_{H^1}^2 (\|u_1\|_{L^4}^4 + \|v_1\|_{L^4}^4 + \|f\|_{L^4}^2)). \end{aligned} \quad (73)$$

因此，根据(73)和 Gronwall 引理，且 $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ ，所以我们得到了 $u = v = w = 0$ ，也就意味着系统(2)的解存在且唯一。

4. 最优控制问题

在这一节中我们将建立与系统相关的最优控制问题，并证明控制问题最优解的存在性，从生物学角度来看，人们试图通过服用激素类药物或物理干扰等方式来控制 and 预防斑秃的发生，但都会出现比较明显的副作用。由于 CD8+ T 淋巴细胞由 IFN- γ 激活并由 CD8+ T 淋巴细胞协助增殖，因此为了尽量减少副作用的影响我们可以利用类似于[20]中所用技巧定义以下与系统(2)相关的最小约束化问题：

$$J(u, v, w) := \frac{\beta_u}{2} \int_0^T \int_{\Omega_d} |u(x, t) - u_d(x, t)|^2 dx dt + \frac{\beta_v}{2} \int_0^T \int_{\Omega_d} |v(x, t) - v_d(x, t)|^2 dx dt \\ + \frac{\beta_w}{2} \int_0^T \int_{\Omega_d} |w(x, t) - w_d(x, t)|^2 dx dt + \frac{N}{4} \int_0^T \int_{\Omega_d} |f(x, t)|^4 dx dt. \quad (74)$$

是最小的, 其中 $(u, v, w, f) \in \mathcal{M}$ 满足系统(2)

$$\mathcal{M} := \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_v \times \mathcal{Y}_w \times \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} \subset L^4(Q_c) := L^4(0, T; L^4(Q_c)), \quad (75)$$

我们假设 $\Omega_c \subset \Omega$ 为控制域和 $\Omega_d \subset \Omega$ 为观测域。这里 $(u_d, v_d, w_d) \in L^2(Q_d) \times L^2(Q_d) \times L^2(Q_d)$ 表示期望值, 非负常数 $\beta_u, \beta_v, \beta_w$ 和 N 分别表示期望成本和控制成本。最优控制问题的解集定义如下

$$\mathcal{S}_{ad} = \{s = (u, v, w, f) \in \mathcal{M} : s \text{ 为(1.1)的强解}\}. \quad (76)$$

我们可以看到(4.1)中定义的函数 J , 它描述了 CD4+ T 细胞密度 u 与期望细胞密度 u_d 的偏差, CD8+ T 细胞密度 v 与期望细胞密度 v_d 的偏差, IFN- γ 浓度 w 与期望 IFN- γ 浓度 w_d 的偏差, 加上用 $L^4(\Omega)$ 范数来衡量的控制成本。通过调节外源项 f 使得 CD4+ T、CD8+ T 细胞密度与 IFN- γ 浓度尽可能的接近期望状态, 从而达到治疗斑秃疾病的效果。

4.1. 全局最优解的存在性

我们在这项工作中研究的最优控制问题是, 在受控系统(或状态系统)(2)的条件下, 使目标函数(74)最小化, 即找到一对解 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}) \in \mathcal{S}_{ad}$ 使得

$$J(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}) = \min_{(u, v, w, f) \in \mathcal{S}_{ad}} J(u, v, w, f), \quad (77)$$

成立, 且满足(77)的 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}) \in \mathcal{S}_{ad}$ 被称为(74)的全局最优解。

定理 4.1. 假设 $N > 0$ 或者 $\mathcal{F}$ 在 $L^4(Q)$ 中有界, 则最优控制问题(74)至少存在一个全局最优解 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}) \in \mathcal{S}_{ad}$ 。

证明. 从定理 3.1 我们可以推导出 $\mathcal{S}_{ad} \neq \emptyset$ 。设 $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}} = \{(u_m, v_m, w_m, f_m)\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_{ad}$ 是 J 的一个极小化序列, 也就有 $\lim_{m \rightarrow \infty} J(s_m) = \inf_{s \in \mathcal{S}_{ad}} J(s)$ 。然后根据 $\mathcal{S}_{ad}$ 的定义, 对于每一个 $m \in \mathbb{N}$, s_m 都满足系统(2)

$$\begin{cases} \partial_t u_m = \Delta u_m - \chi_1 \nabla \cdot (u_m \nabla w_m) + w_m - \mu_1 u_m^2, & x \in \Omega, t > 0 \\ \partial_t v_m = \Delta v_m - \chi_2 \nabla \cdot (v_m \nabla w_m) + w_m + r u_m v_m - \mu_2 v_m^2, & x \in \Omega, t > 0 \\ \partial_t w_m = \Delta w_m + u_m + v_m - f_m w_m, & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u_m}{\partial \nu_m} = \frac{\partial v_m}{\partial \nu_m} = \frac{\partial w_m}{\partial \nu_m} = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0 \\ u_m(x, 0) = u_0(x), \quad v_m(x, 0) = v_0(x), \quad w_m(x, 0) = w_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (78)$$

根据 J 的定义和假设性条件 $N > 0$ 或者 $\mathcal{F}$ 在 $L^4(Q_c)$ 中有界, 我们有

$$\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ 在 } L^4(Q_c) \text{ 中有界}, \quad (79)$$

从(11)可知存在 $C > 0$, 与 m 无关, 使得

$$\begin{aligned} & \|(\partial_t w_m, \partial_t u_m, \partial_t v_m)\|_{L^4(Q) \times L^2(Q) \times L^2(Q)} + \|(w_m, u_m, v_m)\|_{C(W_n^{3/2, 4} \times H^1 \times H^1)} \\ & + \|w_m\|_{L^4(W^{2, 4})} + \|u_m\|_{L^2(H^2)} + \|v_m\|_{L^2(H^2)} \leq C, \end{aligned} \quad (80)$$

我们可以推导出, 在 M 中存在 $\tilde{s} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f})$, 这样对于 $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 的某个子序列, 仍然用 $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 表示, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 下面的收敛性成立:

$$\begin{aligned} u_m &\rightarrow \tilde{u} \text{ 弱收敛于 } L^2(0, T; H^2(\Omega)) \text{ 弱*收敛于 } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \\ v_m &\rightarrow \tilde{v} \text{ 弱收敛于 } L^2(0, T; H^2(\Omega)) \text{ 弱*收敛于 } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \\ w_m &\rightarrow \tilde{w} \text{ 弱收敛于 } L^4(0, T; W^{2,4}(\Omega)) \text{ 弱*收敛于 } L^\infty(0, T; W_n^{3/2,4}(\Omega)), \\ \partial_t u_m &\rightarrow \partial_t \tilde{u} \text{ 弱收敛于 } L^2(Q), \\ \partial_t v_m &\rightarrow \partial_t \tilde{v} \text{ 弱收敛于 } L^2(Q), \\ \partial_t w_m &\rightarrow \partial_t \tilde{w} \text{ 弱收敛于 } L^4(Q). \end{aligned} \quad (81)$$

根据(81)和 Aubin-Lions 引理(见[22])再利用[21]推论 4 我们有

$$\begin{aligned} u_m &\rightarrow \tilde{u} \text{ 强收敛于 } C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ v_m &\rightarrow \tilde{v} \text{ 强收敛于 } C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ w_m &\rightarrow \tilde{w} \text{ 强收敛于 } C([0, T]; L^4(\Omega)) \cap L^4(0, T; W_n^{3/2,4}(\Omega)). \end{aligned} \quad (82)$$

由于 $\nabla \cdot (u_m \nabla w_m) = \nabla u_m \cdot \nabla w_m + u_m \Delta w_m$ 和 $\nabla \cdot (v_m \nabla w_m) = \nabla v_m \cdot \nabla w_m + v_m \Delta w_m$ 再 $L^2(Q)$ 中都有界, $f_m w_m$ 在 $L^4(Q_c)$ 中也有界, 那么就有弱收

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (u_m \nabla w_m) &\rightarrow \nabla \cdot (\tilde{u} \nabla \tilde{w}) \text{ 弱收敛于 } L^2(Q), \\ \nabla \cdot (v_m \nabla w_m) &\rightarrow \nabla \cdot (\tilde{v} \nabla \tilde{w}) \text{ 弱收敛于 } L^2(Q), \end{aligned} \quad (83)$$

和

$$\begin{aligned} u_m^2 &\rightarrow \tilde{u}^2 \text{ 弱收敛于 } L^2(Q), \\ v_m^2 &\rightarrow \tilde{v}^2 \text{ 弱收敛于 } L^2(Q), \\ u_m v_m &\rightarrow \tilde{u} \tilde{v} \text{ 弱收敛于 } L^2(Q), \end{aligned} \quad (84)$$

最后根据(82)~(84)中的收敛性, 当 m 趋向于 $+\infty$ 时, 我们可以得到(78)中的极限, 并且 $\tilde{s} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ 是系统(2)的解, 也就是说 $\tilde{s} \in \mathcal{S}_{ad}$ 。因此,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} J(s_m) = \inf_{s \in \mathcal{S}_{ad}} J(s) \leq J(\tilde{s}). \quad (85)$$

另一方面, 由于 J 在 $\mathcal{S}_{ad}$ 上是下半连续的, 所以我们有 $J(\tilde{s}) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} J(s_m)$, 这与(85)共同暗示了(77)。

4.2. 与局部最优解有关的最优系统

在本小节中, 我们将以 Zowe [23] 等人给出的关于巴拿赫空间中拉格朗日乘子存在性的一般结果为基础, 不用构造出具体的拉格朗日函数直接推导出问题(74)的局部最优解 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f})$ 的一阶必要最优条件。为了介绍[23]中给出的概念和结果, 我们考虑以下优化问题

$$\min J(\tilde{s}), \quad \tilde{s} \in \mathcal{S} = \{\tilde{s} \in \mathcal{M} : G(\tilde{s}) \in \mathcal{N}\}. \quad (86)$$

其中 $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数, $G: X \rightarrow Y$ 是一个算子, X 和 Y 是巴拿赫空间, $\mathcal{M}$ 是 X 的一个非空闭凸子集, $\mathcal{N}$ 是 Y 中的一个定点位于原点的非空闭凸锥。

定义 4.2. 设 $\tilde{s} \in \mathcal{S}$ 是问题(86)的局部最优解, 设 J 和 G 在 $\tilde{s}$ 处是 Fréchet 可微的, 导数分别为 $J'(\tilde{s})$ 和 $G'(\tilde{s})$, 若对于任意的 $\lambda \in Y'$ 有

$$\begin{cases} \lambda \in \mathcal{N}^+ \\ \langle \lambda, G(s) \rangle_{Y'} = 0 \\ J'(\tilde{s}) - \lambda \circ G'(\tilde{s}) \in \mathcal{C}(\tilde{s})^+ \end{cases}$$

则 λ 被称为问题(86)在 $\tilde{s}$ 处的拉格朗日乘子, 其中 $\mathcal{C}(\tilde{s}) := \{\theta(s - \tilde{s}) : \theta \geq 0, \tilde{s} \in \mathcal{M}\}$ 是 $\tilde{s}$ 在 $\mathcal{M}$ 中的锥形体。

定理 4.3. 设 $\tilde{s} \in \mathcal{S}$ 是问题(74)的局部最优解, 假设 J 是 Fréchet 可微的函数, G 是一个连续的 Fréchet 可微的函数。若 $\tilde{s}$ 是一个正则点, 则在 $\tilde{s}$ 处(74)的拉格朗日乘子集是非空的。

我们考虑如下的巴拿赫空间

$$X := \mathcal{W}_u \times \mathcal{W}_v \times \mathcal{W}_w \times L^4(Q_c), \quad Y := L^2(Q) \times L^2(Q) \times L^4(Q), \quad (87)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_u &:= \left\{ u \in \mathcal{Y}_u : \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ on } (0, T) \times \partial\Omega \right\}, \\ \mathcal{W}_v &:= \left\{ v \in \mathcal{Y}_v : \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ on } (0, T) \times \partial\Omega \right\}, \\ \mathcal{W}_w &:= \left\{ w \in \mathcal{Y}_w : \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ on } (0, T) \times \partial\Omega \right\}, \end{aligned} \quad (88)$$

算子 $G = (G_1, G_2, G_3) : X \rightarrow Y$, 其中

$$G_1 : X \rightarrow L^2(Q), G_2 : X \rightarrow L^2(Q), G_3 : X \rightarrow L^4(Q). \quad (89)$$

在 X 中每一点 $s = (u, v, w, f)$ 定义为

$$\begin{cases} G_1(s) = u_t - \Delta u + \chi_1 \nabla \cdot (u \nabla w) - w + \mu_1 u^2, \\ G_2(s) = v_t - \Delta v + \chi_2 \nabla \cdot (v \nabla w) - w - ruv + \mu_2 v^2, \\ G_3(s) = w_t - \Delta w - u - v + fw, \end{cases} \quad (90)$$

将 $\mathcal{M} := \mathcal{W}_u \times \mathcal{W}_v \times \mathcal{W}_w \times \mathcal{F}$ 作为 X 的闭凸子集并且 $\mathcal{N} = \{0\}$, 最优控制问题(74)可以重述如下

$$\min J(s), s \in \mathcal{S}_{ad} = \{s = (u, v, w, f) \in \mathcal{M} : G(s) = 0\}. \quad (91)$$

注意到约束算子 G 和目标函数 J 的可微性, 那么我们有以下结果。

引理 4.4. 函数 $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Fréchet 可微的, 算子 $G : X \rightarrow Y$ 在 $\tilde{s} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}) \in X$ 的方向 $r = (U, V, W, F) \in X$ 是连续 Fréchet 可微的, 各自的导数为

$$\begin{aligned} J'(\tilde{s})[r] &= \beta_u \int_0^T \int_{\Omega_d} (\tilde{u} - u_d) U dx dt + \beta_v \int_0^T \int_{\Omega_d} (\tilde{v} - v_d) V dx dt \\ &\quad + \beta_w \int_0^T \int_{\Omega_c} (\tilde{w} - w_d) W dx dt + N \int_0^T \int_{\Omega_d} \tilde{f}^3 F dx dt, \end{aligned} \quad (92)$$

和

$$\begin{cases} G'_1(\tilde{s})[r] = \partial_t U - \Delta U + \chi_1 \nabla \cdot (U \nabla \tilde{w}) + \chi_1 \nabla \cdot (\tilde{u} \nabla W) - W + \mu_1 \tilde{u} U, \\ G'_2(\tilde{s})[r] = \partial_t V - \Delta V + \chi_2 \nabla \cdot (V \nabla \tilde{w}) + \chi_2 \nabla \cdot (\tilde{v} \nabla W) - W + \mu_2 \tilde{v} V - r \tilde{u} V - r U \tilde{v}, \\ G'_3(\tilde{s})[r] = \partial_t W - \Delta W - U - V + fW + FW. \end{cases} \quad (93)$$

我们希望证明拉格朗日乘子的存在性, 如果问题(91)的局部最优解是算子 G 的正则点, 那么拉格朗日乘子的存在性是有保证的。

定义 4.5. 若 $\tilde{s} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}) \in \mathcal{S}_{ad}$ 是一个正则点, 也就是说给定 $(g_u, g_v, g_w) \in Y$, 则存在 $r = (U, V, W, F) \in \mathcal{W}_u \times \mathcal{W}_v \times \mathcal{W}_w \times \mathcal{C}(\tilde{f})$ 使得

$$G'(\tilde{s})[r] = (g_u, g_v, g_w),$$

其中 $\mathcal{C}(\tilde{f}) := \{\theta(f - \tilde{f}) : \theta \geq 0, \tilde{f} \in \mathcal{F}\}$ 是 $\tilde{f}$ 在 $\mathcal{F}$ 中的锥形体。

引理 4.6. 设 $\tilde{s} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}) \in \mathcal{S}_{ad}$, 则 $\tilde{s}$ 是一个正则点。

证明. 设 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}) \in \mathcal{S}_{ad}, (g_u, g_v, g_w) \in Y$, 因为 $0 \in \mathcal{C}(\tilde{f})$, 所以只需要证明 $(U, V, W, F) \in \mathcal{W}_u \times \mathcal{W}_v \times \mathcal{W}_w \times \mathcal{C}(\tilde{f})$ 的存在性就行了, 使得

$$\begin{cases} g_u = \partial_t U - \Delta U + \chi_1 \nabla \cdot (U \nabla \tilde{w}) + \chi_1 \nabla \cdot (\tilde{u} \nabla W) - W + \mu_1 \tilde{u} U, \\ g_v = \partial_t V - \Delta V + \chi_2 \nabla \cdot (V \nabla \tilde{w}) + \chi_2 \nabla \cdot (\tilde{v} \nabla W) - W + \mu_2 \tilde{v} V - r \tilde{u} V - r U \tilde{v}, \\ g_w = \partial_t W - \Delta W - U - V + \tilde{f} W, \end{cases} \quad (94)$$

具有相应的初始条件和边界条件。

利用 Leray-Schauder 不动点定理来验证系统(94)的线性问题的局部存在性并不困难, 其方法类似于定理 3.3 的证明。因此, 我们省略其部分证明过程, 给出其正则性估计。

在(94)₁, (94)₂ 和(94)₃ 的两端分别乘以 U , V , $-\Delta W$, 再积分我们有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|^2 + \|\nabla U\|^2 = \chi_1 (\tilde{u} \nabla W, \nabla U) + \chi_1 (U \nabla \tilde{w}, \nabla U) + (W, U) + \mu_1 (\tilde{u} U, U) + (g_u, U), \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|V\|^2 + \|\nabla V\|^2 &= \chi_2 (\tilde{v} \nabla W, \nabla V) + \chi_2 (V \nabla \tilde{w}, \nabla V) + (W, V) \\ &\quad + \mu_2 (\tilde{v} V, V) + (g_v, V) + r (\tilde{u} V, V) + r (U \tilde{v}, V), \end{aligned} \quad (96)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla W\|^2 + \|\Delta W\|^2 = (U, \Delta W) + (V, \Delta W) - (g_w, \Delta W) - (\tilde{f} W, \Delta W), \quad (97)$$

应用 Holder 不等式和 Young 不等式以及(10), 我们得到

$$\begin{aligned} \chi_1 (\tilde{u} \nabla W, \nabla U) &\leq \|\tilde{u}\|_{L^4} \|\nabla W\|_{L^4} \|\nabla U\| \\ &\leq C_\delta \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\nabla W\| \|\nabla W\|_{H^1} + \delta \|\nabla U\|^2 \\ &\leq \delta (\|\nabla W\|_{H^1}^2 + \|\nabla U\|^2) + C_\delta \|\tilde{u}\|_{L^4}^4 \|\nabla W\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_1 (U \nabla \tilde{w}, \nabla U) &\leq \|U\|_{L^4} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4} \|\nabla U\| \\ &\leq C \|U\|^{1/2} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4} \|U\|_{H^1}^{3/2} \\ &\leq \delta \|U\|_{H^1}^2 + C_\delta \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^4 \|U\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_2 (\tilde{v} \nabla W, \nabla U) &\leq \|\tilde{v}\|_{L^4} \|\nabla W\|_{L^4} \|\nabla U\| \\ &\leq C_\delta \|\tilde{v}\|_{L^4}^2 \|\nabla W\| \|\nabla W\|_{H^1} + \delta \|\nabla U\|^2 \\ &\leq \delta (\|\nabla W\|_{H^1}^2 + \|\nabla U\|^2) + C_\delta \|\tilde{v}\|_{L^4}^4 \|\nabla W\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_2 (V \nabla \tilde{w}, \nabla V) &\leq \|V\|_{L^4} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4} \|\nabla V\| \\ &\leq C \|V\|^{1/2} \|V\|_{H^1}^{1/2} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4} \|\nabla V\| \\ &\leq \delta (\|V\|_{H^1}^2 + \|\nabla V\|^2) + C \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^4 \|V\|^2, \end{aligned}$$

$$(\tilde{f}W, \Delta W) \leq \|\tilde{f}\|_{L^4} \|W\|_{L^4} \|\Delta W\| \leq \delta \|\Delta W\|^2 + C_\delta \|\tilde{f}\|_{L^4}^2 \|W\|_{H^1}^2,$$

$$\mu_1(\tilde{u}U, U) \leq \delta(\|U\|^2 + \|U\|_{H^1}^2) + C_\delta \|U\|^2 \|\tilde{u}\|_{L^4}^2,$$

$$\mu_2(\tilde{v}V, V) \leq \delta(\|V\|^2 + \|V\|_{H^1}^2) + C_\delta \|V\|^2 \|\tilde{v}\|_{L^4}^2,$$

$$r(\tilde{u}V, V) \leq \delta(\|V\|^2 + \|V\|_{H^1}^2) + C_\delta \|V\|^2 \|\tilde{u}\|_{L^4}^2,$$

$$r(U\tilde{v}, V) \leq \delta(\|V\|^2 + \|U\|_{H^1}^2) + C_\delta \|U\|^2 \|\tilde{v}\|_{L^4}^2,$$

利用 Holder 不等式和 Young 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} (U, \Delta W) &\leq \frac{1}{2} \|\Delta W\|^2 + \frac{1}{2} \|U\|^2, \quad (V, \Delta W) \leq \frac{1}{2} \|\Delta W\|^2 + \frac{1}{2} \|U\|^2, \\ (W, U) &\leq \frac{1}{2} \|W\|^2 + \frac{1}{2} \|U\|^2, \quad (W, V) \leq \frac{1}{2} \|W\|^2 + \frac{1}{2} \|V\|^2, \\ (g_u, U) &\leq \frac{1}{2} \|g_u\|^2 + \frac{1}{2} \|U\|^2, \quad (g_v, V) \leq \frac{1}{2} \|g_v\|^2 + \frac{1}{2} \|V\|^2, \quad (g_w, \Delta W) \leq \frac{1}{2} \|\Delta W\|^2 + \frac{1}{2} \|g_w\|^2, \end{aligned}$$

另一方面, 在(94)₃两端同时乘以 W 再积分有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W\|^2 + \|W\|_{H^1}^2 &\leq |(U, W)| + |(V, W)| + |(g_w, W)| + (\tilde{f}W, W) \\ &\leq \delta(\|W\|^2 + \|W\|_{H^1}^2) + C_\delta (\|U\|^2 + \|V\|^2 + \|g_w\|^2 + \|\tilde{f}\|_{L^4}^2 \|W\|^2), \end{aligned} \quad (98)$$

将不等式(95)~(97)相加, 取 δ 足够小, 我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} (\|U\|^2 + \|V\|^2 + \|W\|_{H^1}^2) + C(\|U\|_{H^1}^2 + \|V\|_{H^1}^2 + \|W\|_{H^2}^2) \\ &\leq C(1 + \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^4 + \|\tilde{v}\|_{L^4}^2 + \|\tilde{u}\|_{L^4}^2) \|U\|^2 + C(1 + \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^4 + \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 + \|\tilde{v}\|_{L^4}^2) \|V\|^2 \\ &\quad + C(\|\tilde{u}\|_{L^4}^4 + \|\tilde{v}\|_{L^4}^4 + \|\tilde{f}\|_{L^4}^2) \|W\|_{H^1}^2 + C(\|g_u\|^2 + \|g_v\|^2 + \|g_w\|^2), \end{aligned} \quad (99)$$

根据(99)通过应用 Gronwall 引理我们可以找到一个正常数 C_0 它取决于 $T, \|U_0\|, \|V_0\|$ 和 $\|W_0\|_{H^1}$, 使得

$$\|(U, V, W)\|_{L^x(L^2 \times L^2 \times H^1) \cap L^2(H^1 \times H^1 \times H^2)} \leq C_0. \quad (100)$$

现在, 按照定理 3.3 的证明步骤 3, 我们可以得到 W 在 $\mathcal{Y}_w$ 中是有界的, 因为下面的估计是成立的

$$\|W\|_{L^4(W^{2,4}(\Omega))} + \|\partial_t W\|_{L^4(Q)} + \|W\|_{C(W_n^{3/2,4})} \leq C_1 \left(C_0, \|W_0\|_{W_n^{3/2,4}}, \|g_w\|_{L^4(Q)}, \|\tilde{f}\|_{L^4(Q)} \right). \quad (101)$$

然后, 我们按照引理 3.6 的证明步骤 4 稍作修改, 我们可以得到 $\|(U, V)\|_{L^x(H^1 \times H^1) \cap L^2(H^2 \times H^2)} \leq C$ 和 $\|(\partial_t U, \partial_t V)\|_{L^2(L^2 \times L^2)} \leq C$ 。因此, 我们可以根据 Leray-Schauder 不动点定理推导出(94)的解的存在性。然后, (U, V, W) 的唯一性直接源于 (U, V, W) 的正则性和系统的线性性质。因此, 证明结束。

5. 一阶必要最优条件与拉格朗日乘子的正则性估计

定理 5.1. 设 $\tilde{s} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in \mathcal{S}_{ad}$ 是控制问题的局部最优解, 那么存在拉格朗日乘子 $(p_1, p_2, p_3) \in L^2(Q) \times L^2(Q) \times L^{4/3}(Q)$ 使得所有 $(U, V, W, F) \in \mathcal{W}_u \times \mathcal{W}_v \times \mathcal{W}_w \times C(\tilde{f})$ 有

$$\begin{aligned}
& \beta_u \int_0^T \int_{\Omega_d} (\tilde{u} - u_d) U dxdt + \beta_v \int_0^T \int_{\Omega_d} (\tilde{v} - v_d) V dxdt + \beta_w \int_0^T \int_{\Omega_c} (\tilde{w} - w_d) W dxdt + N \int_0^T \int_{\Omega_d} \tilde{f}^3 F dxdt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t U - \Delta U + \chi_1 \nabla \cdot (U \nabla \tilde{w}) + \chi_1 \nabla \cdot (\tilde{u} \nabla W) - W + \mu_1 \tilde{u} U) p_1 dxdt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - \Delta V + \chi_2 \nabla \cdot (V \nabla \tilde{w}) + \chi_2 \nabla \cdot (\tilde{v} \nabla W) - W + \mu_2 \tilde{v} V - r \tilde{u} V - r U \tilde{v}) p_2 dxdt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t W - \Delta W - U - V + \tilde{f} W + F \tilde{w}) p_3 dxdt \geq 0.
\end{aligned} \tag{102}$$

证明. 根据引理 4.6, $\tilde{s} \in \mathcal{S}_{ad}$ 是一个正则点, 那么根据定义 4.2 和定理 4.3, 存在拉格朗日乘子 $(p_1, p_2, p_3) \in L^2(Q) \times L^2(Q) \times L^{4/3}(Q)$ 使得

$$J'(\tilde{s})[r] - \langle G'_1(\tilde{s})[r], p_1 \rangle - \langle G'_2(\tilde{s})[r], p_2 \rangle - \langle G'_3(\tilde{s})[r], p_3 \rangle \geq 0. \tag{103}$$

$r = (U, V, W, F) \in \mathcal{W}_u \times \mathcal{W}_v \times \mathcal{W}_w \times \mathcal{F}(\tilde{f})$ 。因此, 证明由(92)~(93)得出。

推论 5.2. 设 $\tilde{s} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ 是最优控制问题(91)的局部最优解。那么, 定理 5.1 中的拉格朗日乘子 $(p_1, p_2, p_3) \in L^2(Q) \times L^2(Q) \times L^{4/3}(Q)$ 满足系统

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t U - \Delta U + \chi_1 \nabla \cdot (U \nabla \tilde{w}) + \mu_1 \tilde{u} U) p_1 dxdt - \int_0^T \int_{\Omega} r U \tilde{v} p_2 dxdt - \int_0^T \int_{\Omega} U p_3 dxdt \\
& = \beta_u \int_0^T \int_{\Omega_d} (\tilde{u} - u_d) U dxdt,
\end{aligned} \tag{104}$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - \Delta V + \chi_2 \nabla \cdot (V \nabla \tilde{w}) + \mu_2 \tilde{v} V - r \tilde{u} V) p_2 dxdt - \int_0^T \int_{\Omega} V p_3 dxdt = \beta_v \int_0^T \int_{\Omega_d} (\tilde{v} - v_d) V dxdt, \tag{105}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t W - \Delta W + \tilde{f} W) p_3 dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} (\chi_1 \nabla \cdot (\tilde{u} \nabla W) - W) p_1 dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} (\chi_2 \nabla \cdot (\tilde{v} \nabla W) - W) p_2 dxdt \\
& = \beta_w \int_0^T \int_{\Omega_d} (\tilde{w} - w_d) W dxdt.
\end{aligned} \tag{106}$$

与线性系统的极弱解概念相对应

$$\begin{cases} \partial_t p_1 + \Delta p_1 + \chi_1 \nabla p_1 \nabla \tilde{w} - \mu_1 \tilde{u} p_1 + r \tilde{v} p_2 + p_3 = -\beta_u (\tilde{u} - u_d) \chi_{\Omega_d}, \\ \partial_t p_2 + \Delta p_2 + \chi_2 \nabla p_2 \nabla \tilde{w} - \mu_2 \tilde{v} p_2 + r \tilde{u} p_2 + p_3 = -\beta_v (\tilde{v} - v_d) \chi_{\Omega_d}, \\ \partial_t p_3 + \Delta p_3 - \tilde{f} p_3 + p_1 + p_2 - \chi_1 \nabla (\tilde{u} \nabla p_1) - \chi_2 \nabla (\tilde{v} \nabla p_2) = -\beta_w (\tilde{w} - w_d) \chi_{\Omega_d}, \end{cases} \tag{107}$$

和最优条件

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left(N(\tilde{f})^3 - \tilde{w} p_3 \right) (f - \tilde{f}) dxdt \geq 0. \tag{108}$$

证明. 根据(102), 令 $(V, W, F) = (0, 0, 0)$, 则有(104)。类似地, 令 $(U, W, F) = (0, 0, 0)$, 则得到(105), 令 $(U, V, F) = (0, 0, 0)$ 则有(106), 令 $(U, V, W) = (0, 0, 0)$ 则有(108)。

定理 5.3. 在定理 5.1 的条件下, 系统(107)存在唯一的强解 (p_1, p_2, p_3) , 使得

$$p_1 \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)), \partial_t p_1 \in L^2(Q), \tag{109}$$

$$p_2 \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)), \partial_t p_2 \in L^2(Q), \tag{110}$$

$$p_3 \in L^\infty(0, T; W^{2-2/p, p}(\Omega)) \cap L^p(0, T; W^{2, p}(\Omega)), \partial_t p_3 \in L^p(Q), \forall p < 2, \tag{111}$$

证明. 设 $s = T - t$, $t \in (0, T)$ 和 $\tilde{p}_1(s) = p_1(t)$, $\tilde{p}_2(s) = p_2(t)$, $\tilde{p}_3(s) = p_3(t)$, 那么系统(107)等价于

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{p}_1 - \Delta \tilde{p}_1 - \chi_1 \nabla \tilde{p}_1 \nabla \tilde{w} + \mu_1 \tilde{u} \tilde{p}_1 - r \tilde{v} \tilde{p}_2 - \tilde{p}_3 = \beta_u (\tilde{u} - u_d) \chi_{\Omega_d}, \\ \partial_t \tilde{p}_2 - \Delta \tilde{p}_2 - \chi_2 \nabla \tilde{p}_2 \nabla \tilde{w} + \mu_2 \tilde{v} \tilde{p}_2 - r \tilde{u} \tilde{p}_2 - \tilde{p}_3 = \beta_v (\tilde{v} - v_d) \chi_{\Omega_d}, \\ \partial_t \tilde{p}_3 - \Delta \tilde{p}_3 + \tilde{f} \tilde{p}_3 - \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 + \chi_1 \nabla (\tilde{u} \nabla \tilde{p}_1) + \chi_2 \nabla (\tilde{v} \nabla \tilde{p}_2) = \beta_w (\tilde{w} - w_d) \chi_{\Omega_d}, \end{cases} \quad (112)$$

具有相应的初始条件和边界条件, 根据与证明定理 4.6 相似的推理, 我们可以得到它的正则性估计。
将两端同时乘以 $\tilde{p}_1$, 并对 Ω 进行积分, 得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{p}_1\|^2 + \|\nabla \tilde{p}_1\|^2 = \chi_1 (\nabla \tilde{p}_1 \nabla \tilde{w}, \tilde{p}_1) + r (\tilde{v} \tilde{p}_2, \tilde{p}_1) + (\tilde{p}_1, \tilde{p}_3) - \mu_1 (\tilde{u} \tilde{p}_1, \tilde{p}_1) + \beta_u (\tilde{u} - u_d, \tilde{p}_1), \quad (113)$$

利用 Young 不等式, 我们有

$$\chi_1 (\nabla \tilde{p}_1 \nabla \tilde{w}, \tilde{p}_1) \leq C \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4} \|\tilde{p}_1\|_{L^4} \|\nabla \tilde{p}_1\| \leq C \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4} \|\tilde{p}_1\|_{L^4}^{\frac{1}{2}} \|\tilde{p}_1\|_{H^1}^{\frac{3}{2}} \leq \delta \|\tilde{p}_1\|_{H^1}^2 + C_\delta \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^4 \|\tilde{p}_1\|^2, \quad (114)$$

考虑到(10), 可以得出

$$-\mu_1 (\tilde{u} \tilde{p}_1, \tilde{p}_1) \leq \mu_1 \|\tilde{u}\|_{L^4} \|\tilde{p}_1\|_{L^4} \|\tilde{p}_1\| \leq C \|\tilde{u}\|_{L^4} \|\tilde{p}_1\|_{H^1} \|\tilde{p}_1\| \leq C \|\tilde{p}_1\|^2 \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 + C \|\tilde{p}_1\|_{H^1}^2, \quad (115)$$

$$r (\tilde{v} \tilde{p}_2, \tilde{p}_1) \leq r \|\tilde{v}\|_{L^4} \|\tilde{p}_1\|_{L^4} \|\tilde{p}_2\| \leq C (\|\tilde{p}_1\|_{H^1}^2 + \|\tilde{p}_2\|^2 \|\tilde{v}\|_{L^4}^2), \quad (116)$$

对于剩余项我们有

$$(\tilde{p}_1, \tilde{p}_3) + \beta_u (\tilde{u} - u_d, \tilde{p}_1) \leq C (\|\tilde{p}_1\|^2 + \|\tilde{p}_3\|^2 + \|\tilde{u} - u_d\|^2), \quad (117)$$

结合(113)~(117)可以得出结论

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{p}_1\|^2 + C \|\tilde{p}_1\|_{H^1}^2 \leq C (\|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^4 + \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 + 1) \|\tilde{p}_1\|^2 + C (\|\tilde{v}\|_{L^4}^2 \|\tilde{p}_2\|^2 + \|\tilde{p}_3\|^2 + \|\tilde{u} - u_d\|^2), \quad (118)$$

(118)将(112)_i 两端同时乘以 $-\Delta \tilde{p}_1$ 并对 Ω 进行积分, 我们可以得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \tilde{p}_1\|^2 + \|\Delta \tilde{p}_1\|^2 = -\chi_1 (\nabla \tilde{p}_1 \nabla \tilde{w}, \Delta \tilde{p}_1) - r (\tilde{v} \tilde{p}_2, \Delta \tilde{p}_1) - (\Delta \tilde{p}_1, \tilde{p}_3) + \mu_1 (\tilde{u} \tilde{p}_1, \Delta \tilde{p}_1) - \beta_u (\tilde{u} - u_d, \Delta \tilde{p}_1),$$

考虑到(10), 再利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式我们有

$$\begin{aligned} -\chi_1 (\nabla \tilde{p}_1 \nabla \tilde{w}, \Delta \tilde{p}_1) &\leq C \|\nabla \tilde{p}_1\|_{L^4} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4} \|\Delta \tilde{p}_1\| \\ &\leq C \|\Delta \tilde{p}_1\|^2 + C \left(\|\Delta \tilde{p}_1\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \tilde{p}_1\|^{\frac{1}{2}} + \|\Delta \tilde{p}_1\| \right) \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^2 \\ &\leq C \|\Delta \tilde{p}_1\|^2 + C \|\nabla \tilde{p}_1\|^2 (\|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^2 + \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^4), \end{aligned} \quad (119)$$

利用 Young 不等式和 Sobolev 嵌入定理我们有

$$\mu_1 (\tilde{u} \tilde{p}_1, \Delta \tilde{p}_1) \leq C \|\tilde{u}\|_{L^4} \|\tilde{p}_1\|_{L^4} \|\Delta \tilde{p}_1\| \leq \|\tilde{u}\|_{L^4} \|\tilde{p}_1\|_{H^1} \|\Delta \tilde{p}_1\| \leq \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\tilde{p}_1\|_{H^1}^2 + \delta \|\Delta \tilde{p}_1\|^2, \quad (120)$$

$$-r (\tilde{v} \tilde{p}_2, \Delta \tilde{p}_1) \leq C \|\tilde{v}\|_{L^4} \|\tilde{p}_2\|_{L^4} \|\Delta \tilde{p}_1\| \leq \delta \|\Delta \tilde{p}_1\|^2 + C \|\tilde{v}\|_{L^4}^2 \|\tilde{p}_2\|_{H^1}^2, \quad (121)$$

对于剩余项利用 Young 不等式我们有

$$-(\Delta \tilde{p}_1, \tilde{p}_3) - \beta_u (\tilde{u} - u_d, \Delta \tilde{p}_1) \leq C (\|\tilde{p}_3\|^2 + \|\Delta \tilde{p}_1\|^2 + \|\tilde{u} - u_d\|^2), \quad (122)$$

结合(119)~(122)并将 δ 取得足够小, 可以得到以下结果

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{p}_1\|_{H^1}^2 + C \|\tilde{p}_1\|_{H^1}^2 \leq C (\|\tilde{u}\|_{L^4}^2 + \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^2 + \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^4) \|\tilde{p}_1\|_{H^1}^2 + C (\|\tilde{p}_2\|^2 \|\tilde{v}\|_{L^4}^2 + \|\tilde{p}_3\|^2 + \|\tilde{u} - u_d\|_{H^1}^2), \quad (123)$$

对于 $\tilde{p}_1$ 的正则性, 我们可以使用与 $\tilde{p}_2$ 类似的估计值, 我们发现

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{p}_2\|^2 + C \|\tilde{p}_2\|_{H^1}^2 \leq C \left(\|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^4 + \|\tilde{v}\|_{L^4}^4 + 1 \right) \|\tilde{p}_2\|^2 + C \left(\|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\tilde{p}_1\|^2 + \|\tilde{p}_3\|^2 + \|\tilde{v} - v_d\|^2 \right), \quad (124)$$

和

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{p}_2\|_{H^1}^2 + C \|\tilde{p}_2\|_{H^2}^2 \leq C \left(\|\tilde{v}\|_{L^4}^2 + \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^2 + \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^4 \right) \|\tilde{p}_2\|_{H^1}^2 + C \left(\|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\tilde{p}_1\|^2 + \|\tilde{p}_3\|^2 + \|\tilde{v} - v_d\|^2 \right), \quad (125)$$

将(112)₃ 两端同时乘以 $\tilde{p}_3$, 并对 Ω 进行积分, 得出

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{p}_3\|^2 + \|\nabla \tilde{p}_3\|^2 = (\tilde{f}\tilde{p}_3, \tilde{p}_3) - (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) + \chi_1 (\nabla(\tilde{u}\nabla\tilde{p}_1), \tilde{p}_3) + \chi_2 (\nabla(\tilde{v}\nabla\tilde{p}_2), \tilde{p}_3) - \beta_w (\tilde{w} - w_d, \tilde{p}_3).$$

根据 Gagliardo-Nirenberg 不等式我们可以得到

$$(\tilde{f}\tilde{p}_3, \tilde{p}_3) \leq \|\tilde{f}\|_{L^4} \|\tilde{p}_3\|_{L^4} \|\tilde{p}_3\| \leq C \|\tilde{f}\|_{L^4} \left(\|\tilde{p}_3\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \tilde{p}_3\|^{\frac{1}{2}} + \|\tilde{p}_3\| \right) \|\tilde{p}_3\| \leq C \|\tilde{p}_3\|^2 \left(\|\tilde{f}\|_{L^4}^4 + 1 \right) + C \|\nabla \tilde{p}_3\|^2, \quad (126)$$

再次利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Sobolev 嵌入定理, 我们发现

$$\begin{aligned} \chi_1 (\nabla(\tilde{u}\nabla\tilde{p}_1), \tilde{p}_3) &= \chi_1 (\nabla\tilde{u}\nabla\tilde{p}_1 + \tilde{u}\Delta\tilde{p}_1, \tilde{p}_3) \leq \|\tilde{p}_3\| \|\nabla\tilde{u}\|_{L^4} \|\nabla\tilde{p}_1\|_{L^4} + \|\tilde{u}\|_{L^4} \|\Delta\tilde{p}_1\| \|\tilde{p}_3\|_{L^4} \\ &\leq \|\tilde{p}_3\| \|\nabla\tilde{u}\|_{L^4} \left(\|\nabla\tilde{p}_1\|^{\frac{1}{2}} \|\Delta\tilde{p}_1\|^{\frac{1}{2}} + \|\nabla\tilde{p}_1\| \right) + C \|\tilde{p}_3\|_{H^1}^2 \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 + \delta \|\Delta\tilde{p}_1\|^2 \\ &\leq C \|\tilde{p}_3\|^2 \|\nabla\tilde{u}\|_{H^1}^2 + \delta \|\nabla\tilde{p}_1\|^2 + \delta \|\Delta\tilde{p}_1\|^2 + C \|\tilde{p}_3\|_{H^1}^2 \|\tilde{u}\|_{L^4}^2, \end{aligned} \quad (127)$$

和

$$\chi_2 (\nabla(\tilde{v}\nabla\tilde{p}_2), \tilde{p}_3) \leq C \|\tilde{p}_3\|^2 \|\nabla\tilde{v}\|_{H^1}^2 + \delta \|\nabla\tilde{p}_2\|^2 + \delta \|\Delta\tilde{p}_2\|^2 + C \|\tilde{p}_3\|_{H^1}^2 \|\tilde{v}\|_{L^4}^2, \quad (128)$$

对于剩余项

$$-(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) - \beta_w (\tilde{w} - w_d, \tilde{p}_3) \leq C \left(\|\tilde{p}_1\|^2 + \|\tilde{p}_2\|^2 + \|\tilde{p}_3\|^2 + \|\tilde{w} - w_d\|^2 \right), \quad (129)$$

根据(126)~(129), 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\tilde{p}_3\|^2 + C \|\tilde{p}_3\|_{H^1}^2 &\leq C \|\tilde{p}_3\|^2 \left(\|\tilde{f}\|_{L^4}^4 + \|\nabla\tilde{u}\|_{H^1}^2 + \|\nabla\tilde{v}\|_{H^1}^2 + 1 \right) + \delta \|\nabla\tilde{p}_1\|^2 + \delta \|\nabla\tilde{p}_2\|^2 + \delta \|\Delta\tilde{p}_1\|^2 \\ &\quad + \delta \|\Delta\tilde{p}_2\|^2 + C \left(\|\tilde{p}_1\|^2 + \|\tilde{p}_2\|^2 + \|\tilde{p}_3\|^2 + \|\tilde{w} - w_d\|^2 \right) + \|\tilde{p}_3\|_{H^1}^2 \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 + \|\tilde{p}_3\|_{H^1}^2 \|\tilde{v}\|_{L^4}^2, \end{aligned} \quad (130)$$

因此结合(118), (123)~(125), (130)并取 δ 足够小, 即可计算得出

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\|\tilde{p}_3\|^2 + \|\tilde{p}_1\|_{H^1}^2 + \|\tilde{p}_2\|_{H^1}^2 \right) + C \left(\|\tilde{p}_3\|_{H^1}^2 + \|\tilde{p}_1\|_{H^2}^2 + \|\tilde{p}_2\|_{H^2}^2 \right) \\ &\leq C \left(\|\nabla\tilde{f}\|_{L^4}^4 + \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 + \|\tilde{v}\|_{L^4}^2 + 1 \right) \|\tilde{p}_3\|^2 + C \left(\|\tilde{u}\|_{L^4}^2 + \|\nabla\tilde{w}\|_{L^4}^2 + \|\nabla\tilde{w}\|_{L^4}^4 \right) \|\tilde{p}_1\|_{H^1}^2 \\ &\quad + C \left(\|\tilde{v}\|_{L^4}^2 + \|\nabla\tilde{w}\|_{L^4}^2 + \|\nabla\tilde{w}\|_{L^4}^4 \right) \|\tilde{p}_2\|_{H^1}^2 + C \left(\|\tilde{u} - u_d\|^2 + \|\tilde{v} - v_d\|^2 + \|\tilde{w} - w_d\|^2 \right), \end{aligned} \quad (131)$$

通过应用 Gronwall 不等式, 我们可以推导出

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &\in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)), \\ \tilde{p}_2 &\in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)), \\ \tilde{p}_3 &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (132)$$

又因为 $\tilde{f} \in L^4(Q)$, $\tilde{p}_3 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^4(Q)$ 我们有

$$\tilde{f}\tilde{p}_3 \in L^2(Q), \quad (133)$$

同样的, $\tilde{u} \in \mathcal{W}_u, \tilde{v} \in \mathcal{W}_v, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$. 我们可以得到

$$\chi_1 \nabla(\tilde{u} \nabla \tilde{p}_1) - \chi_2 \nabla(\tilde{v} \nabla \tilde{p}_2) \in L^p(Q), \forall p < 2. \quad (134)$$

因此根据引理 2.3 我们可以得到(111)。

推论 5.4. (最优系统) 设 $\tilde{s} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}) \in \mathcal{S}_{ad}$ 是控制问题(91)的局部最优解。那么, 拉格朗日乘子 (p_1, p_2, p_3) 满足正则性(109)~(111), 并满足下面的最优性系统

$$\begin{cases} \partial_t p_1 + \Delta p_1 + \chi_1 \nabla p_1 \nabla \tilde{w} - \mu_1 \tilde{u} p_1 + r \tilde{v} p_2 + p_3 = -\beta_u (\tilde{u} - u_d) \chi_{\Omega_d}, \\ \partial_t p_2 + \Delta p_2 + \chi_2 \nabla p_2 \nabla \tilde{w} - \mu_2 \tilde{v} p_2 + r \tilde{u} p_1 + p_3 = -\beta_v (\tilde{v} - v_d) \chi_{\Omega_d}, \\ \partial_t p_3 + \Delta p_3 - \tilde{f} p_3 + p_1 + p_2 - \chi_1 \nabla(\tilde{u} \nabla p_1) - \chi_2 \nabla(\tilde{v} \nabla p_2) = -\beta_w (\tilde{w} - w_d) \chi_{\Omega_d}, \\ \int_0^T \int_\Omega \left(N(\tilde{f})^3 - \tilde{w} p_3 \right) (f - \tilde{f}) dx dt \geq 0, \forall f \in \mathcal{F}, \end{cases} \quad (135)$$

具有相应的初始条件和边界条件。

参考文献

- [1] Dobrev, A., Paus, R. and Cogan, N.G. (2020) Toward Predicting the Spatio-Temporal Dynamics of Alopecia Areata Lesions Using Partial Differential Equation Analysis. *Bulletin of Mathematical Biology*, **82**, Article No. 34. <https://doi.org/10.1007/s11538-020-00707-0>
- [2] Ito, T., Hashizume, H., Shimauchi, T., Funakoshi, A., Ito, N., Fukamizu, H., et al. (2013) CXCL10 Produced from Hair Follicles Induces Th1 and Tc1 Cell Infiltration in the Acute Phase of Alopecia Areata Followed by Sustained Tc1 Accumulation in the Chronic Phase. *Journal of Dermatological Science*, **69**, 140-147. <https://doi.org/10.1016/j.jdermsci.2012.12.003>
- [3] Luster, A.D. and Ravetch, J.V. (1987) Biochemical Characterization of a Gamma Interferon-Inducible Cytokine (ip-10). *The Journal of Experimental Medicine*, **166**, 1084-1097. <https://doi.org/10.1084/jem.166.4.1084>
- [4] Keller, E.F. and Segel, L.A. (1970) Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability. *Journal of Theoretical Biology*, **26**, 399-415. [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(70\)90092-5](https://doi.org/10.1016/0022-5193(70)90092-5)
- [5] Bellomo, N., Painter, K.J., Tao, Y. and Winkler, M. (2019) Occurrence vs. Absence of Taxis-Driven Instabilities in a May-Nowak Model for Virus Infection. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **79**, 1990-2010. <https://doi.org/10.1137/19m1250261>
- [6] Alekseev, G.V. (2016) Mixed Boundary Value Problems for Steady-State Magnetohydrodynamic Equations of Viscous Incompressible Fluid. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56**, 1426-1439. <https://doi.org/10.1134/s0965542516080029>
- [7] Casas, E. and Kunisch, K. (2017) Stabilization by Sparse Controls for a Class of Semilinear Parabolic Equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **55**, 512-532. <https://doi.org/10.1137/16m1084298>
- [8] Karl, V. and Wachsmuth, D. (2017) An Augmented Lagrange Method for Elliptic State Constrained Optimal Control Problems. *Computational Optimization and Applications*, **69**, 857-880. <https://doi.org/10.1007/s10589-017-9965-y>
- [9] Kien, B.T., Rösch, A. and Wachsmuth, D. (2017) Pontryagin's Principle for Optimal Control Problem Governed by 3D Navier-Stokes Equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **173**, 30-55. <https://doi.org/10.1007/s10957-017-1081-8>
- [10] Kunisch, K., Trautmann, P. and Vexler, B. (2016) Optimal Control of the Undamped Linear Wave Equation with Measure Valued Controls. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **54**, 1212-1244. <https://doi.org/10.1137/141001366>
- [11] Mallea-Zepeda, E., Ortega-Torres, E. and Villamizar-Roa, É.J. (2016) A Boundary Control Problem for Micropolar Fluids. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **169**, 349-369. <https://doi.org/10.1007/s10957-016-0925-y>
- [12] Rueda-Gómez, D.A. and Villamizar-Roa, E.J. (2017) On the Rayleigh-Bénard-Marangoni System and a Related Optimal Control Problem. *Computers & Mathematics with Applications*, **74**, 2969-2991. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.07.038>
- [13] de Araujo, A.L.A. and de Magalhães, P.M.D. (2015) Existence of Solutions and Optimal Control for a Model of Tissue

-
- Invasion by Solid Tumours. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **421**, 842-877. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.07.038>
- [14] Ryu, S. (2008) Boundary Control of Chemotaxis Reaction Diffusion System. *Honam Mathematical Journal*, **30**, 469-478. <https://doi.org/10.5831/hmj.2008.30.3.469>
 - [15] Ángeles Rodríguez-Bellido, M., Rueda-Gómez, D.A. and Villamizar-Roa, É.J. (2018) On a Distributed Control Problem for a Coupled Chemotaxis-Fluid Model. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—B*, **23**, 557-571. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017208>
 - [16] Ryu, S. and Yagi, A. (2001) Optimal Control of Keller-Segel Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **256**, 45-66. <https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7254>
 - [17] Chaves-Silva, F.W. and Guerrero, S. (2015) A Uniform Controllability Result for the Keller-Segel System. *Asymptotic Analysis*, **92**, 313-338. <https://doi.org/10.3233/asy-141282>
 - [18] Chaves-Silva, F.W. and Guerrero, S. (2017) A Controllability Result for a Chemotaxis-Fluid Model. *Journal of Differential Equations*, **262**, 4863-4905. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.01.004>
 - [19] Feireisl, E. and Novotný, A. (2009) Singular Limits in Thermodynamics of Viscous Fluids. Springer.
 - [20] Guillén-González, F. (2020) Optimal Bilinear Control Problem Related to a Chemo-Repulsion System in 2D Domains. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **26**, Article No. 29.
 - [21] Simon, J. (1986) Compact Sets in the Space $P(O, T; B)$. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **146**, 65-96. <https://doi.org/10.1007/bf01762360>
 - [22] Lions, J.L. (1969) Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod.
 - [23] Zowe, J. and Kurcyusz, S. (1979) Regularity and Stability for the Mathematical Programming Problem in Banach Spaces. *Applied Mathematics & Optimization*, **5**, 49-62. <https://doi.org/10.1007/bf01442543>