Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(2), 198-203
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.152060

Hans汉斯

Fock空间上的小Hankel算子

邓　年

重庆师范大学数学科学学院，重庆

收稿日期：2025年1月7日；录用日期：2025年2月16日；发布日期：2025年2月28日

摘　要

本文主要研究了Fock空间 F_α^p 上小Hankel算子 h_φ 的有界性和紧性，得到了 h_φ 在 F_α^p 上有界的充分必要条件是其符号 φ 属于Fock空间 $F_{\frac{\alpha}{2}}^\infty$； h_φ 在 F_α^p 上紧的充分必要条件是 φ 属于 $f_{\frac{\alpha}{2}}^\infty$。

关键词

小Hankel算子，Fock空间，有界性，紧性

Small Hankel Operators on Fock Spaces

Nian Deng

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: Jan. 7th, 2025; accepted: Feb. 16th, 2025; published: Feb. 28th, 2025

Abstract

This paper mainly studies the boundedness and compactness of the small Hankel operator h_φ on Fock space F_α^p. It is found that the necessary and sufficient condition for h_φ being bounded on F_α^p is that its symbol φ belongs to Fock space $F_{\frac{\alpha}{2}}^\infty$; the necessary and sufficient condition for h_φ being compact on F_α^p is that φ belongs to $f_{\frac{\alpha}{2}}^\infty$.

Keywords

Small Hankel Operator, Fock Space, Boundedness, Compactness

文章引用: 邓年. Fock 空间上的小 Hankel 算子[J]. 理论数学, 2025, 15(2): 198-203.
DOI: 10.12677/pm.2025.152060

1. 引言

对任意 $\alpha>0$，设 $\mathrm{d}\lambda_\alpha(z)=\frac{\alpha}{\pi}\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}\mathrm{d}A(z)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的 Gauss 测度，其中 $\mathrm{d}A=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是 $\mathbb{C}$ 上的面积测度。当 $0<p<\infty$ 时，我们用 L_α^p 表示由满足

$$\frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|f(z)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z|^2}{2}}\right|^p\mathrm{d}A(\omega)<+\infty$$

的 Lebesgue 可测函数 f 构成的函数空间。定义 f 的范数为

$$\|f\|_{p,\alpha}=\left[\frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|f(z)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z|^2}{2}}\right|^p\mathrm{d}A(z)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

当 $p=+\infty$ 时，$L_\alpha^\infty=\left\{f\mid f(z)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z|^2}{2}}\in L^\infty(\mathbb{C},\mathrm{d}A)\right\}$。

当 $f\in L_\alpha^\infty$，$\|f\|_{\infty,\alpha}=\operatorname{esssup}\left\{\left|f(z)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z|^2}{2}}\right|;z\in\mathbb{C}\right\}$。

当 $1\le p\le\infty$ 时，$\left(L_\alpha^p,\|\cdot\|_{p,\alpha}\right)$ 是 Banach 空间，详细内容见参考文献[1]。

Fock 空间 F_α^p 是由上述空间 $L_\alpha^p(\mathbb{C},\mathrm{d}A)$ 中的复平面 $\mathbb{C}$ 上全体整函数构成的闭子空间，因此 F_α^p 按照范数 $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ 是 Banach 空间。特别地，F_α^2 是 Hilbert 空间，其内积定义为

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{C}}f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(z),$$

其中 $f,g\in F_\alpha^2$。我们知道 L_α^2 的再生核为 $K_z(\omega)=\mathrm{e}^{\alpha\bar{z}\omega}$，从 L_α^2 到 F_α^2 的正交投影 P 表示为

$$Pf(z)=\langle f,K_z\rangle=\int_{\mathbb{C}}f(\omega)\overline{K_z(\omega)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega),$$

其中 $f\in L_\alpha^2$。如果 $f\in F_\alpha^2$，则 $Pf(z)=f(z)=\langle f,K_z\rangle$。我们称 $k_z(\omega)=\frac{K_z(\omega)}{\sqrt{K_z(z)}}$ 为 F_α^2 的规范再生核，并且 $\|k_z\|_{p,\alpha}=1$，$1\le p\le+\infty$。将投影 P 看作以再生核 $K_z(\omega)$ 为核的积分算子，我们将其推广到 F_α^p 上。定义 $P:L_\alpha^p\to F_\alpha^p$ 上的积分算子

$$Pf(z)=\langle f,K_z\rangle=\int_{\mathbb{C}}f(\omega)\overline{K_z(\omega)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega),$$

其中 $f\in L_\alpha^p$。如果 $f\in F_\alpha^p$，则 $Pf=f$。

设 $\overline{F_\alpha^p}=\left\{f\mid\bar{f}\in F_\alpha^p\right\}$。定义算子 $\bar{P}:L_\alpha^p\to\overline{F_\alpha^p}$，

$$\bar{P}f(z)=\left\langle f,\overline{K_z}\right\rangle=\int_{\mathbb{C}}f(\omega)K_z(\omega)\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega).$$

设 $K=\left\{\sum_{k=0}^{n}C_kK_{a_k}(z)\mid C_k,a_k\in\mathbb{C}\right\}$，则 $\bar{K}=F_\alpha^p$。我们称 φ 满足条件(I_1)，如果

$$\int_{\mathbb{C}}|\varphi(\omega)||K_z(\omega)|^2\,\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)<+\infty.$$

我们在 K 上定义的小 Hankel 算子 $h_\varphi:F_\alpha^p\to\overline{F_\alpha^p}$ 为

$$h_\varphi(f)(z)=\bar{P}(\varphi f)(z)=\langle\varphi f,\overline{K_z}\rangle=\int_{\mathbb{C}}\varphi(\omega)f(\omega)K_z(\omega)\,\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega),$$

于是 h_φ 稠定义于 F_α^p，因此可将其推广到 F_α^p 上。另外，我们还需要一个重要的 Fock 空间 f_α^∞，由复平面上满足

$$\lim_{z\to\infty}f(z)\mathrm{e}^{-\alpha\frac{|z|^2}{2}}=0$$

的整函数构成的函数空间。f_α^∞ 是 F_α^∞ 的闭子空间。

Fock 空间的概念最早由 Fock V. A.提出，它由复平面 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数构成，并在各个领域发挥着重要作用。比如，在量子场论中，Fock 空间用于描述不同粒子数的态，通过引入产生和湮灭算子来处理粒子的创建和消灭过程。在统计力学中，则用于研究多粒子系统的统计性质，通过 Fock 空间来描述系统中粒子的分布和相互作用。在数学物理中，主要用于物理系统的稳定性和性能方面的研究。随着对 Fock 空间的不断研究，Fock 空间上的算子理论得到了快速发展。Hankel 算子作为全纯函数空间上一类重要的线性算子模型，在过去几十年中受到了诸多学者的关注，并取得了丰富的研究成果[1]-[12]。小 Hankel 算子是 Hankel 算子的一个特例，其具有的性质对于 Hankel 算子不一定成立，所以讨论小 Hankel 算子的一些基本性质是很有必要的。

在 1987 年，Janson 在[1]中首次研究了 Fock 空间上的小 Hankel 算子，并且讨论了当 $1\le p<\infty$ 时，小 Hankel 算子的有界性，紧性以及属于 Schatten 类 S_p 的充分必要条件。1989 年，Wallsten 在[2]中进一步研究了当 $0<p<1$ 时的情形。目前，有关 Fock 空间上 Hankel 算子的研究成果越来越丰富。2016 年，胡璋剑等人[4]刻画了当 $1\le p<\infty$ 时，Hankel 算子在加权 Fock 空间上的有界性和紧性。2018 年，王尔敏[5]以 Fock 空间为研究对象，得到了该类函数空间上 Hankel 算子、小 Hankel 算子的有界性、紧性的刻画以及 Hankel 算子的 Schatten 类的刻画等。2019 年，王晓峰等人[6]则利用有界(消失)平均振荡函数的性质，刻画了一类广义 Fock 空间上的 Hankel 算子的有界性(紧性)。同年，Wang Ermin 等人[7]在给定 Fock 空间上也对小 Hankel 算子 $h_{\bar{f}}:F_\alpha^p\to\overline{F_\alpha^q}$ 的有界性(和紧性)进行了研究，并且得到了作用在 $F_\alpha^p\times F_\alpha^q\ (1<p,q<\infty)$ 上的 Hankel 形式 $T_b^\alpha(\cdot,\cdot)$ 的范数估计。2023 年，刘桂军等人[8]利用 IDA 空间得到了从 doubling Fock 空间 F_ϕ^p 到双 Lebesgue 空间 L_ϕ^p 的 Hankel 算子 H_g 的有界性和紧性的等价刻画。同年，Zhangjian, H.等人[9]则通过利用一个新的局部可积函数空间 IDA，刻画了加权 Fock 空间上 Hankel 算子的有界性和紧性。2024 年，Xiaofen 等人[10]证明了从对偶 Fock 空间 F_ϕ^p 到加权测度空间 L_φ^q 的 Hankel 算子 H_f 和 $H_{\bar{f}}$ 的有界(紧)性。2025 年，Agbor 等人[11]通过外推法刻画了 Hankel 算子在变指数 Fock 空间和变指数 Lebesgue 空间之间的有界性和紧性。最近，Zhicheng 等人[12]给出了具有局部可积符号的 Hankel 算子在给定 Fock 空间上有界性的充分必要条件，此外还刻画了 Hankel 算子的紧性和 Schatten 类。

Zhu 在[1]中讨论了 Fock 空间 F_α^2 到 $\overline{F_\alpha^2}$ 上小 Hankel 算子的有界性、紧性，以及 Schatten-类，本文则在此基础上讨论当 $1\le p<\infty,\ p\ne2$ 时，小 Hankel 算子 $h_\varphi:F_\alpha^p\to\overline{F_\alpha^p}$ 的性质。

2. 主要结论与证明

引理 1 设 φ 满足条件(I_1)，$\varphi\in L_\alpha^p$，$P(\overline{\varphi})\in F_\alpha^p$，则 $h_\varphi=h_{\overline{P(\overline{\varphi})}}$。

证明 设 $f\in F_\alpha^p$，通过直接计算

$$h_{\overline{P(\overline{\varphi})}}f(z)=\left\langle\overline{P(\overline{\varphi})}f,\overline{K_z}\right\rangle=\langle fK_z,P(\overline{\varphi})\rangle=\langle P(fK_z),\overline{\varphi}\rangle=\langle fK_z,\overline{\varphi}\rangle=\langle\varphi f,\overline{K_z}\rangle=h_\varphi,$$

所以由 $\varphi\in L_\alpha^p$ 可得 $\varphi'=P(\overline{\varphi})\in F_\alpha^p$，从而 $h_\varphi=h_{\varphi'}$，故 $h_\varphi=h_{\overline{P(\overline{\varphi})}}$。

注 由上述引理，当我们讨论 h_φ 的性质，只需讨论当 $\overline{\varphi}\in F_\alpha^p$ 时，$h_{\overline{\varphi}}$ 的性质即可。

引理 2 设 $1<p,q<+\infty$，$\left(\overline{F_\alpha^p}\right)^*=\overline{F_\alpha^q}$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

证明 因为 $\left(F_\alpha^p\right)^*=F_\alpha^q$ （$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$），所以当 $f\in F_\alpha^p$，$g\in F_\alpha^q$ 时，

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{f},\overline{g}\right\rangle &=\int_{\mathbb{C}}\overline{f(\omega)}g(\omega)\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)\\&=\overline{\int_{\mathbb{C}}f(\omega)\overline{g(\omega)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)}=\overline{\left\langle f,g\right\rangle},\end{aligned}$$

于是 $\left|\left\langle \overline{f},\overline{g}\right\rangle\right|=\left|\left\langle f,g\right\rangle\right|\le\|f\|_p\|g\|_q=\left\|\overline{f}\right\|_p\|\overline{g}\|_q$，
故 $\left(\overline{F_\alpha^p}\right)^*=\overline{F_\alpha^q}$。

定理 3 设 $\varphi\in F_\alpha^p$。$h_{\overline{\varphi}}$ 在 F_α^p 上有界的充分必要条件是 $\varphi\in F_{\frac{\alpha}{2}}^\infty$。

证明 我们首先证明定理的必要性。设 $h_{\overline{\varphi}}$ 在 F_α^p 上有界，则当 $f\in F_\alpha^p$，$g\in F_\alpha^q$ 时，

$$\left|\left\langle h_{\overline{\varphi}}f,\overline{g}\right\rangle\right|\le\left\|h_{\overline{\varphi}}\right\|\|f\|_p\|g\|_q.$$

取 $f=g=k_z$，则 $\|f\|_{p,\alpha}=\|g\|_{q,\alpha}=1$。于是当 $z\in\mathbb{C}$ 时

$$\begin{aligned}\left|\left\langle h_{\overline{\varphi}}k_z,\overline{k_z}\right\rangle\right|&=\int_{\mathbb{C}}\left(h_{\overline{\varphi}}k_z\right)(\omega)k_z(\omega)\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)\\&=\left|\int_{\mathbb{C}}\left(\int_{\mathbb{C}}\overline{\varphi}(u)k_z(u)k_\omega(u)\mathrm{d}\lambda_\alpha(u)\right)k_z(\omega)\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)\right|\\&=\left|\int_{\mathbb{C}}\overline{\varphi}(u)k_z(u)\left(\int_{\mathbb{C}}k_\omega(u)k_z(\omega)\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)\right)\mathrm{d}\lambda_\alpha(u)\right|\\&=\left|\int_{\mathbb{C}}\overline{\varphi}(u)k_z^2(u)\mathrm{d}\lambda_\alpha(u)\right|\\&=\left|\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}\left(\int_{\mathbb{C}}K_{2z}(u)\overline{\varphi}(u)\mathrm{d}\lambda_\alpha(u)\right)\right|\\&=\left|\int_{\mathbb{C}}\left(\int_{\mathbb{C}}\overline{\varphi}(u)k_z(u)k_\omega(u)\mathrm{d}\lambda_\alpha(u)\right)k_z(\omega)\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)\right|\\&=\left|\int_{\mathbb{C}}\overline{\varphi}(u)k_z(u)\left(\int_{\mathbb{C}}k_\omega(u)k_z(\omega)\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)\right)\mathrm{d}\lambda_\alpha(u)\right|\\&=\left|\int_{\mathbb{C}}\overline{\varphi}(u)k_z^2(u)\mathrm{d}\lambda_\alpha(u)\right|\\&=\left|\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}\left(\int_{\mathbb{C}}K_{2z}(u)\overline{\varphi}(u)\mathrm{d}\lambda_\alpha(u)\right)\right|\\&=\left|\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}\overline{\varphi}(2z)\right|\\&\le\left\|h_{\overline{\varphi}}k_z\right\|_{p,\alpha}\|k_z\|_{q,\alpha}\\&\le\left\|h_{\overline{\varphi}}\right\|.\end{aligned}$$

令 $z'=2z$，则

$$\left|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z|^2}{4}}\varphi(z)\right|\le\left\|h_{\overline{\varphi}}\right\|,$$

从而 $\varphi\in F_{\frac{\alpha}{2}}^\infty$。

反之，设 $\varphi\in F^{\infty}_{\frac{\alpha}{2}}$。令 $\psi(\omega)=2\varphi(2\omega)e^{-\alpha|\omega|^2}$，则 $\psi\in L^{\infty}(\mathbb{C},\mathrm{d}A)$ 且 $\|\psi\|_{\infty}=\|\varphi\|_{\infty,\frac{\alpha}{2}}$。此时

$$
\begin{aligned}
P\psi(z)&=\int_{\mathbb{C}}\psi(\omega)\overline{k_z(\omega)}\mathrm{d}\lambda_{\alpha}(\omega)\\
&=\frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}}2\varphi(2\omega)e^{-\alpha|\omega|^2}e^{\alpha z\bar{\omega}}e^{-\alpha|\omega|^2}\mathrm{d}A(\omega)\\
&=\int_{\mathbb{C}}\varphi(2\omega)e^{2\alpha\left(\frac{z}{2}\right)\bar{\omega}}\mathrm{d}\lambda_{2\alpha}(\omega)\\
&=\frac{1}{2}\varphi(z).
\end{aligned}
$$

设 f,g 都是多项式，则 $f\in F^p_{\alpha},g\in F^q_{\alpha}$。因为

$$\left\langle h_{\bar{\varphi}}f,\bar{g}\right\rangle=\int_{\mathbb{C}}fg\bar{\varphi}\mathrm{d}\lambda_{\alpha}=\left\langle fg,P(\psi)\right\rangle=\left\langle Pfg,\psi\right\rangle=\left\langle fg,\psi\right\rangle=\int_{\mathbb{C}}fg\bar{\psi}\mathrm{d}\lambda_{\alpha},$$

所以

$$\left|\left\langle h_{\bar{\varphi}}f,g\right\rangle\right|\le\|\psi\|_{\infty}\|f\|_p\|g\|_q=2\|\varphi\|_{\infty,\frac{\alpha}{2}}\|f\|_{p,\alpha}\|g\|_{q,\alpha},$$

可知 $\|h_{\bar{\varphi}}\|\le 2\|\varphi\|_{\infty,\frac{\alpha}{2}}$，

故 $h_{\bar{\varphi}}$ 在 F^p_{α} 上是有界的。

定理 4 设 $\varphi\in F^p_{\alpha}$。$h_{\bar{\varphi}}$ 是 F^p_{α} 上的紧算子的充分必要条件是 $\varphi\in f^{\infty}_{\frac{\alpha}{2}}$。

证明 设 P 是由复平面上解析多项式构成的函数空间。因为 $\bar{P}\overset{\frac{\alpha}{2}}{=}f^{\infty}_{\frac{\alpha}{2}}$，所以 $\varphi\in f^{\infty}_{\frac{\alpha}{2}}$，则存在 $p_n\in P$，使得

$$\|p_n-\varphi\|_{\infty,\frac{\alpha}{2}}\xrightarrow{n\to+\infty}0.$$

由定理 3 可得

$$\left\|h_{\bar{\varphi}}-h_{\overline{p_n}}\right\|\le 2\|p_n-\varphi\|_{\infty,\frac{\alpha}{2}}\to 0.$$

因为 $h_{\overline{p_k}}$ 是有界秩算子，从而是 F^p_{α} 上的紧算子，因此可得 $h_{\bar{\varphi}}$ 是 F^p_{α} 上的紧算子。

反之，设 $h_{\bar{\varphi}}$ 是 F^p_{α} 上的紧算子，则 $\left\|h_{\bar{\varphi}}k_z\right\|_{p,\alpha}\xrightarrow{z\to\infty}0$，所以由定理 3 可得 $e^{-\alpha|z|^2}|\varphi(2z)|\le\left\|h_{\bar{\varphi}}k_z\right\|_{p,\alpha}\to 0$，故 $\varphi\in f^{\infty}_{\frac{\alpha}{2}}$。

例 令 $\varphi(z)=\overline{z^n}$，考查 $h_{\bar{\varphi}}$ 在 F^p_{α} 上的有界性(或紧性)。

根据定理 3 (定理 4)，只需考查 $\varphi\in F^{\infty}_{\frac{\alpha}{2}}$ (或 $\varphi\in f^{\infty}_{\frac{\alpha}{2}}$)。由于

$$\|\varphi\|_{\infty,\frac{\alpha}{2}}=\sup_{z\in\mathbb{C}}\left|\overline{z^n}e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\right|=\sup_{z\in\mathbb{C}}|z^n|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\xrightarrow{z\to\infty}0,$$

所以 $\varphi\in F^{\infty}_{\frac{\alpha}{2}}$，于是 $h_{\bar{\varphi}}$ 在 F^p_{α} 上是有界的。同理易得 $h_{\bar{\varphi}}$ 在 F^p_{α} 上也是紧的。

3. 总结

本文主要研究了 Fock 空间 $F^p_{\alpha}\ (1\le p<\infty,\ p\ne 2)$ 上小 Hankel 算子的有界性和紧性，并分别得到了关于有界性和紧性的一个充分必要条件。这些结论对于进一步分析、深入理解 Fock 空间上小 Hankel 算子

的性质具有显著帮助，但当 $p=\infty$ 时，小 Hankel 算子是否还具有这些性质则需要进一步研究。

参考文献

[1] Zhu, K. (2012) Analysis on Fock Spaces, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 263. Springer.

[2] Janson, S., Peetre, J. and Rochberg, R. (1987) Hankel Forms and the Fock Space. *Revista Matemática Iberoamericana*, **3**, 61-138. https://doi.org/10.4171/rmi/46

[3] Wallstén, R. (1989) The S^p-Criterion for Hankel Forms on the Fock Space, 0 < p < 1. *Mathematica Scandinavica*, **64**, 123-132. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-12251

[4] 胡璋剑, 吕小芬. 加权 Fock 空间上的 Hankel 算子[J]. 中国科学: 数学, 2016, 46(2): 141-156.

[5] 王尔敏. 全纯 Fock 空间上的几类算子[D]: [博士学位论文]. 苏州: 苏州大学, 2018.

[6] 王晓峰, 夏锦, 陈建军. 广义 Fock 空间上的 Hankel 算子[J]. 数学学报(中文版), 2019, 62(4): 561-572.

[7] Wang, E. and Hu, Z. (2018) Small Hankel Operators between Fock Spaces. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **64**, 409-419. https://doi.org/10.1080/17476933.2018.1441832

[8] 刘桂军, 王晓峰, 陈建军. IDA 与 Doubling Fock 空间上 Hankel 算子[J]. 数学学报(中文版), 2023, 66(5): 1003-1018.

[9] Hu, Z. and Virtanen, J.A. (2023) IDA and Hankel Operators on Fock Spaces. *Analysis & PDE*, **16**, 2041-2077. https://doi.org/10.2140/apde.2023.16.2041

[10] Lv, X. and Wang, E. (2024) Hankel Operators on Doubling Fock Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **531**, Article 127780. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127780

[11] Agbor, D.A. and Forwa, K.N. (2025) A_p Weights and an Application to Hankel Operators on Fock Spaces with Variable Exponents on $\mathbb{C}^n$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **543**, Article 128899. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128899

[12] Zeng, Z., Hu, Z. and Wang, X. (2024) Bounded, Compact and Schatten Class Hankel Operators on Fock-Type Spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, **378**, 805-849. https://doi.org/10.1090/tran/9290