

修正比例失效率尺度模型下的随机比较

吕国强

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2025年1月3日; 录用日期: 2025年2月17日; 发布日期: 2025年2月28日

摘要

本文研究由两组 n 维独立且异质的样本产生的二阶次序统计量的失效率序。考虑在多元离群值模型的假设下, 修正的比例失效率尺度参数不同和两组不同样本量的多元离群值下的随机比较。

关键词

次序统计量, 随机比较, 多元离群值模型, 失效率序, 优化序

Stochastic Comparison under a Model of Modified Proportional Failure Rate Scale

Guoqiang Lyu

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jan. 3rd, 2025; accepted: Feb. 17th, 2025; published: Feb. 28th, 2025

Abstract

In this paper, we study the failure order of the second order statistics generated by two groups of n -dimensional independent and heterogeneous samples. Considering the assumption of the multivariate outlier model, the modified proportional failure rate scale parameters and the stochastic comparison of the multiple outliers of two groups with different sample sizes are studied.

Keywords

Order Statistic, Stochastic Comparison, Multivariate Outlier Model, Hazard Rate Order,

文章引用: 吕国强. 修正比例失效率尺度模型下的随机比较[J]. 理论数学, 2025, 15(2): 238-246.

DOI: 10.12677/pm.2025.152064

Majorization

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Open Access

1. 引言

次序统计量作为多元统计分析中重要的概念,在可靠性理论、拍卖理论、保险精算和随机运筹学中获得了广泛应用。作为最重要的次序统计量,二阶次序统计量近年来受到学术界与工业界的普遍关注,已取得了一系列丰硕的研究成果。与此同时,独立随机变量极值次序统计量的研究也取得了重要的进展。近年来随着二阶次序统计量的应用越来越广泛,二阶次序统计量的随机比较已然成为可靠性统计领域中的热点问题,引起了学术界的普遍关注。众所周知,次序统计量与 n 中取 k 系统的寿命一一对应。常用次序统计量 X_{kn} 表示一个 n 中取 $(n-k+1)$ 系统的寿命, X_{1n} 和 X_{nn} 分别表示串联系统和并联系统的寿命已被广泛应用在生存分析。在拍卖理论中,二阶次序统计量 X_{2n} 表示二价反向拍卖中标者的报价。在可靠性方面, X_{2n} 表示故障安全系统的寿命。因此在不同随机序下有关二阶次序统计量的研究是近来可靠性统计领域中的重要问题。

Zhang and Yan (2018) [1]通过比例失效率模型研究了元件和系统两种冗余分配策略。Guo 等(2020) [2]通过相协系统研究了各种随机序,并在相协系统建立了一些老化性质。Zhang 等(2022) [3]通过随机序研究了随机冲击生存概率和组件寿命对故障安全系统可靠性的影响。Yan 和 Niu (2023) [4]研究了由相依或独立异质的修正比例失效率(MPHR)模型产生的二阶统计量的普通随机序、失效率、反失效率,并在 MPHRS 模型下建立多元离群值的随机比较。Shrahili 等(2023) [5]在修正比例失效率(MPHR)模型下,研究了相对失效率序和相对反失效率序的性质。Das 等(2024) [6]通过修正比例失效率尺度(MPHRS)模型产生的极值次序统计量建立了乘积序和倒优序下的普通随机序、失效率序、反失效率序。Guo 等(2024) [7]研究了由两组依赖和异质个体风险模型产生的第二大索赔金额的各种随机序。有关二阶次序统计量的最新研究,有兴趣的读者可以参考 Zhang 等(2024) [8]。

假设 F 是支撑为 R^+ 的基分布函数,且对应的基生存函数为 $\bar{F}$ 。事实上,结合尺度(SC)、比例优势比(PO)和比例失效率(PHR)模型, Das 等(2021) [9]定义了一类新的 Marshall-Oklin 分布,称为修正的比例失效率尺度(MPHRS)模型。具体的生存函数如下:

$$\bar{G}(x; \alpha, \lambda, \mu) = \frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^\lambda}{1 - \bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^\lambda}, \text{ 其中 } x, \alpha, \lambda, \mu > 0, \bar{\alpha} = 1 - \alpha. \quad (1.1)$$

事实上,修正的比例失效率尺度模型包含了许多常见分布。例如,当 $\mu=1$ 时(1.1)式便退化为修正比例失效率(MPHR)模型,当 $\lambda=1$ 时, (1.1)式等价于尺度失效率(SPHR)模型。当 $\mu=1$ 且 $\alpha=1$ 时, (1.1)式退化为比例失效率(PHR)模型,当 $\lambda=1$ 且 $\alpha=1$ 时, (1.1)式退化为尺度(SC)模型,当 $\lambda=1$ 且 $\mu=1$ 时, (1.1)式退化为比例优势比(SC)模型。因此,修正的比例失效率尺度(MPHRS)模型参数具有更好的灵活性。上述模型具体分布见表 1。

受 Yan 和 Niu (2023) [4], Das 等(2024) [6]工作的启发,我们将研究独立且异质的修正比例失效率尺度(MPHRS)样本所产生的二阶次序统计量的随机比较,进一步将 Yan 和 Niu (2023) [4]中有关独立的 MPHRS 模型的研究推广到 MPHRS 模型情形。

Table 1. Five distributions after MPHRS parameters taking specific values**表 1.** MPHRS 参数取特定值退化后的五种分布

模型	生存函数	参数	范围
SC	$\bar{G}(x) = \bar{F}(\mu x)$	μ : 尺度参数	$\mu > 0$
PHR	$\bar{G}(x) = \bar{F}^\lambda(x)$	λ : 脆弱参数	$\lambda > 0$
SPHR	$\bar{G}(x) = (\bar{F}(x\mu))^\lambda$	μ : 尺度参数 λ : 脆弱参数	$\mu > 0$ $\lambda > 0$
PO	$\bar{G}(x) = \frac{\alpha \bar{F}(x)}{1 - \alpha \bar{F}(x)}$	α : 倾斜参数	$\alpha > 0$
MPHR	$\bar{G}(x) = \frac{\alpha (\bar{F}(x))^\lambda}{1 - \alpha (\bar{F}(x))^\lambda}$	α : 倾斜参数 λ : 比例失效率参数	$\alpha > 0$ $\lambda > 0$

2. 预备知识

在可靠性理论、运筹学、精算学、经济学、金融学等领域，随机序是一个非常有用的工具。首先给出随机序的定义。

定义 1 [10] 设 X 和 Y 是两个连续型随机变量，分别记其分布函数为 F 和 G ，生存函数分别为 $\bar{F} = 1 - F$ 和 $\bar{G} = 1 - G$ ，概率密度函数分别为 f 和 g ，失效率函数分别记为 $h_x = f/\bar{F}$ 和 $h_g = g/\bar{G}$ ，则

- (1) 若对任意的 $t \in R$ ，都有 $\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$ ，则称 X 在普通随机序下小于 Y ，记作 $X \leq_{st} Y$ ；
- (2) 若对任意的 $t \in R$ ，都有 $h_X(t) \geq h_Y(t)$ ，或者等价于对任意 $t \in R$ ， $\bar{F}_Y(t)/\bar{F}_X(t)$ 关于 t 是递增的，则称 X 在失效率序下小于 Y ，记作 $X \leq_{hr} Y$ 。

接下来我们介绍优化序的概念，它是建立统计和概率中各种不等式的基本工具之一。

定义 2 [11] 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 是两个 n 维实值向量，设 $a_{1:n} \leq a_{2:n} \leq \dots \leq a_{n:n}$ 和 $b_{1:n} \leq b_{2:n} \leq \dots \leq b_{n:n}$ 分别表示 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的增排列，

- (1) 若 $\sum_{j=1}^i a_{j:n} \leq \sum_{j=1}^i b_{j:n}, j=1, 2, \dots, n-1$ ，且 $\sum_{j=1}^n a_{j:n} = \sum_{j=1}^n b_{j:n}$ ，则称向量 $\mathbf{a}$ 在优化序下大于 $\mathbf{b}$ ， $\mathbf{a} \succeq_m \mathbf{b}$ ；
- (2) 若 $\sum_{j=1}^i a_{j:n} \leq \sum_{j=1}^i b_{j:n}, i=1, 2, \dots, n$ ，则称向量 $\mathbf{a}$ 在弱超优序下大于 $\mathbf{b}$ ，记作 $\mathbf{a} \succeq_w^w \mathbf{b}$ ；
- (3) 若 $\sum_{j=1}^i a_{j:n} \geq \sum_{j=1}^i b_{j:n}, i=1, 2, \dots, n$ ，则称向量 $\mathbf{a}$ 在弱次优序下大于 $\mathbf{b}$ ，记作 $\mathbf{a} \succeq_w \mathbf{b}$ 。

众所周知，由优化序可以直接得到弱超优序和弱次优序，反之则不一定成立，即

$$\mathbf{a} \succeq_w^w \mathbf{b} \Leftarrow \mathbf{a} \succeq_m \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \succeq_w \mathbf{b},$$

关于优化序及其应用的更详细讨论，可参阅 Marshall 等(1979) [11]。

下面介绍一些重要引理以帮助建立本文的主要结果。

引理 1 [11] 假设 ϕ 是定义在 D 上连续可微的实值函数。 $\phi_{(k)}(z) = \partial \phi(z) / \partial z_k$ 表示 ϕ 关于第 k 个分量的偏导数，则

- (1) 对于任何 $a, b \in D$ ， $\mathbf{a} \succeq_w^w \mathbf{b}$ ， $\phi(a) \geq (\leq) \phi(b)$ 当且仅当 $0 \geq \phi_{(1)}(z) \geq \phi_{(2)}(z) \geq \dots \geq \phi_{(n)}(z)$ ；
- (2) 对于任何 $a, b \in D$ ， $\mathbf{a} \succeq_w \mathbf{b}$ ， $\phi(a) \geq (\leq) \phi(b)$ 当且仅当 $\phi_{(1)}(z) \geq \phi_{(2)}(z) \geq \dots \geq \phi_{(n)}(z) \geq 0$ 。

3. 主要结果

本节主要研究由两组 n 维独立且异质的样本产生的二阶次序统计量的失效率序。首先考虑了修正比例失效率尺度模型的失效率参数不同时, 多元离群值样本所产生的二阶次序统计量的失效率序。给出了二阶次序统计量的失效率序存在的充分条件。进一步在多元离群值的假设下, 考虑多元离群值的样本量不同, 多元离群值的修正比例失效率尺度样本产生的二阶次序统计量失效率。

在形式上, 对一组随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 若 $X_1, X_2, \dots, X_p$ 同分布 X , 且 $X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n$ 同分布 Y , 其中 $1 \leq p < n$, 则称该模型为多元离群值模型。假设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是服从多元离群值修正比例失效率尺度 (MPHRS) 模型的一组独立随机变量, 则对应的生存函数为:

$$\left(\underbrace{\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}}, \dots, \frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}}}_{p \uparrow}, \underbrace{\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}}, \dots, \frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}}}_{q \uparrow} \right)$$

下面定理 3.1 考虑了修正比例失效率尺度模型的失效率参数不同时, 多元离群值样本所产生的二阶次序统计量的失效率序。

定理 3.1 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量, 多元离群的 MPHRS 模型生存函数为

$$\left(\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}} I_p, \frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}} I_q \right), \quad X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^* \text{ 是另一组 } n \text{ 个相互独立的随机变量, 多元离群的 MPHRS 模型生存函数为 } \left(\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_2}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_2}} I_p, \frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}} I_q \right) \text{ 的 } n \text{ 个相互独立的随机变量, 其中 } p, q \geq 1,$$

$p+q=n$ 。若 $\lambda \geq \lambda_2 \geq \lambda_1$, 则 $X_{2n} \geq_{hr} X_{2n}^*$ 。

证明: X_{2n} 和 X_{2n}^* 的生存函数分别表示为

$$\begin{aligned} \bar{F}_{X_{2n}}(x) &= p \left[\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}} \right]^{p-1} \left[\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}} \right]^q + q \left[\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}} \right]^p \\ &\quad \times \left[\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}} \right]^{q-1} - (n-1) \left[\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}} \right]^p \left[\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}} \right]^q \end{aligned} \quad (3.1)$$

和

$$\begin{aligned} \bar{F}_{X_{2n}^*}(x) &= p \left[\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_2}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_2}} \right]^{p-1} \left[\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}} \right]^q + q \left[\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_2}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_2}} \right]^p \\ &\quad \times \left[\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}} \right]^{q-1} - (n-1) \left[\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_2}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_2}} \right]^p \left[\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda}} \right]^q, \end{aligned}$$

其中 $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$, $p+q=n$ 。令 $(\bar{F}(x\mu))^{\lambda} = e^{-\lambda(-\ln \bar{F}(x\mu))}$, $t = -\ln \bar{F}(x\mu)$ 。则(3.1)可写为

$$\begin{aligned} \bar{F}_{X_{2n}}(t) &= p \left[\frac{\alpha}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} \right]^{p-1} \left[\frac{\alpha}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right]^q + q \left[\frac{\alpha}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} \right]^p \left[\frac{\alpha}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right]^{q-1} \\ &\quad - (n-1) \left[\frac{\alpha}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} \right]^p \left[\frac{\alpha}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right]^q, t \geq 0. \end{aligned}$$

为了方便, 简记为

$$\begin{aligned} A_i &= (p-1) \frac{\lambda_i e^{\lambda_i t}}{e^{\lambda_i t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}, \\ B_i &= p \frac{\lambda_i e^{\lambda_i t}}{e^{\lambda_i t} - \bar{\alpha}} + (q-1) \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}, \\ C_i &= p \frac{\lambda_i e^{\lambda_i t}}{e^{\lambda_i t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}, \text{ 其中 } i=1, 2. \end{aligned}$$

因此, $X_{2:n}$ 的失效率函数可表示为

$$h_{X_{2:n}}(t) = \frac{d \ln F_{X_{n-1:n}}(t)}{dt} = \frac{pA_1 \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + qB_1 \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)C_1}{p \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + q \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)}.$$

为了证明想要的结果, 需证 $h_{X_{2:n}}(t) \leq h_{X_{2:n}}^*(t)$, 即对任意 $\lambda \geq \lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$,

$$\frac{pA_1 \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + qB_1 \left(\frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)C_1}{p \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + q \left(\frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)} \leq \frac{pA_2 \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + qB_2 \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)C_2}{p \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + q \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)}. \quad (3.2)$$

事实上, (3.2)式等价于

$$\begin{aligned} & \left\{ p \left[(p-1) \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} + q \left[p \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + (q-1) \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right\} \\ & - (n-1) \left[p \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \times \frac{1}{p \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + q \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)} \\ & \leq \left\{ p \left[(p-1) \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} + q \left[p \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}} + (q-1) \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right\} \\ & - (n-1) \left[p \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \times \frac{1}{p \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + q \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)}. \end{aligned}$$

为了表示方便, 我们分别记

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{p \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + q \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)} \times \left\{ p \left[(p-1) \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right. \\ & \left. + q \left[p \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + (q-1) \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} - (n-1) \left[p \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \right\}, \\ M_2 &= \frac{1}{p \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + q \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)} \times \left\{ p \left[(p-1) \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right. \\ & \left. + q \left[p \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + (q-1) \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} - (n-1) \left[p \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$M_3 = \frac{1}{p\left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha}\right) + q\left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha}\right) - (n-1)} \times \left\{ p \left[(p-1) \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right. \\ \left. + q \left[p \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + (q-1) \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} - (n-1) \left[p \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \right\}.$$

根据假设 $\lambda \geq \lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$ 和 $\frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}$ 关于 λ 的递增性, 可得

$$\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}} \geq \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}.$$

于是有

$$M_3 - M_2 = p(p-1) \left(\frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{a} \right) \left[\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}} - \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] + pq \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) \\ \times \left[\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}} - \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} \right] - p(n-1) \left[\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}} - \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} \right] \\ = p \left[\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}} - \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} \right] \left[(p-1) \left(\frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + q \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1) \right] \\ \geq p \left[\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}} - \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} \right] [p + q - 1 - (n-1)] = 0.$$

令

$$P = q \left[p \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + (q-1) \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right] \frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} - (n-1) \left[p \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right], \\ Q = p \left[(p-1) \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} \right], \\ U = q \left(\frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1), \\ V = p.$$

于是

$$QU - PV = pq \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) \left[\frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}} - \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} \right] + p(n-1) \left(\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} \right) \geq 0.$$

因此

$$M_2 - M_1 = \frac{Q \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + P}{V \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + U} - \frac{Q \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} \right) + P}{V \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + U} \\ = \frac{\left[Q \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + P \right] \left[V \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + U \right] - \left[Q \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + P \right] \left[V \left(\frac{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + U \right]}{\left[V \left(\frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + U \right] \left[V \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + U \right]} \\ \stackrel{\text{sgn}}{=} (QU - PV) \left(\frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) \geq 0.$$

结合 $M_1 \leq M_2$ 和 $M_2 \leq M_3$, 有 $M_1 \leq M_3$ 。证毕。

定理 3.1 表明多元离群值模型下, 如果修正比例失效率尺度模型中的比例失效率参数越大, 则对应的修正比例失效率尺度样本所产生的二阶次序统计量在失效率序的意义下越小。

下面定理 3.2 考虑了多元离群值的样本量不同, 多元离群值的修正比例失效率尺度样本产生的二阶次序统计量失效率。

定理 3.2 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量, 其多元离群的修正比例失效率生存函数为 $\left(\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}} I_p, \frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_2}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_2}} I_q \right)$, $p, q \geq 1$, $p+q=n$ 。 $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ 是另一组 n 个相互独立的随机

变量, 多元离群的 MPHRS 模型生存函数为 $\left(\frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_2}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_2}} I_{p^*}, \frac{\alpha(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}}{1-\bar{\alpha}(\bar{F}(x\mu))^{\lambda_1}} I_{q^*} \right)$, 其中 $p^*, q^* \geq 1$, $p^*+q^*=n^*$ 。若 $p^* \leq p \leq q \leq q^*$ 且 $\lambda_2 \geq \lambda_1$, 则

$$(p^*, q^*) \succeq_w (p, q) \Rightarrow X_{2n} \geq_{hr} X_{2n}^*.$$

证明: 根据定理 3.1 的证明, X_{2n} 的失效率函数可以表示为

$$h_{X_{2n}}(t) = \frac{pT_1 \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + qT_2 \left(\frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)T}{p \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + q \left(\frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)},$$

这里 $T_1 = (p-1) \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}$, $T_2 = p \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + (q-1) \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}$ 和 $T = p \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}$ 。

为了证明想要的结果, 需证 $h_{X_{2n}}(t) \leq h_{X_{2n}^*}(t)$, 即证对任意 $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$,

$$\frac{pT_1 \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + qT_2 \left(\frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)T}{p \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + q \left(\frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)} \leq \frac{p^*T_1^* \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + q^*T_2^* \left(\frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n^*-1)T^*}{p^* \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + q^* \left(\frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n^*-1)},$$

其中 $T_1^* = (p^*-1) \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q^* \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}$, $T_2^* = (p^*-1) \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q^* \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}$, $T^* = p^* \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}} + q^* \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}$ 。

令 $a_i = \frac{\lambda_i e^{\lambda_i t}}{e^{\lambda_i t} - \bar{\alpha}}$, $b_i = \frac{e^{\lambda_i t} - \bar{\alpha}}{\alpha}$, $c_{ij} = a_i b_j$, $i, j = 1, 2$ 。记

$$\begin{aligned} \phi(p, q) &= \frac{pT_1 \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + qT_2 \left(\frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)T}{p \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) + q \left(\frac{e^{\lambda_2 t} - \bar{\alpha}}{\alpha} \right) - (n-1)} \\ &= \frac{p(p-1)c_{11} + pqc_{21} + pqc_{12} + q(q-1)c_{22} - (n-1)(pa_1 + qa_2)}{pb_1 + qb_2 - (n-1)}. \end{aligned}$$

接下来我们只需证明在条件 $p^* \leq p \leq q \leq q^*$ 和 $(p, q) \leq_w (p^*, q^*)$ 下, $\phi(p, q) \leq \phi(p^*, q^*)$ 成立即可。

对 $\phi(p, q)$ 关于 p 求偏导可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi(p, q)}{\partial p} &= \left[(2p-1)c_{11} + q(c_{21} + c_{12}) - (n-1)a_1 - pa_1 - qa_2 \right] [pb_1 + qb_2 - (n-1)] \\ &\quad - [p(p-1)c_{11} + pqc_{21} + pqc_{12} + q(q-1)c_{22} - (n-1)(pa_1 + qa_2)] (b_1 - 1) \\ &= a_1 [pb_1 + qb_2 - (n-1)] [(p-1)b_1 + qb_2 - (n-1)] + (pc_{11} + qc_{22})(b_1 - 1) \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

类似地, 对 $\phi(p, q)$ 关于 q 求偏导可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q} &= a_2 [pb_1 + qb_2 - (n-1)] [pb_1 + (q-1)b_2 - (n-1)] + (pc_{11} + qc_{22})(b_2 - 1) \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

根据定理 3.1 的证明过程, $\frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - \bar{\alpha}}$ 关于 λ 的递增性, 有 $a_2 \geq a_1 \geq 0$ 和 $b_2 \geq b_1 \geq 1$ 。

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi(p, q)}{\partial p} - \frac{\partial \phi(p, q)}{\partial q} &= [pc_{21} + (q-1)c_{22} - (p-1)c_{11} - qc_{12} - (n-1)(a_2 - a_1)] \\ &\quad \times [pb_1 + qb_2 - (n-1)] + (pc_{11} + qc_{22})(b_2 - b_1) \\ &\geq [pc_{21} + (q-1)c_{22} - (p-1)c_{11} - qc_{12} - (n-1)(a_2 - a_1)] \\ &\quad \times [pb_1 + qb_2 - (n-1)] + (pb_1 + qb_2)(a_1 b_2 - a_1 b_1) \\ &= [pc_{21} + (q-1)c_{22} - pc_{11} - (q-1)c_{12} - (n-1)(a_2 - a_1)] \\ &\quad \times [pb_1 + qb_2 - (n-1)] + (n-1)(c_{12} - c_{11}).\end{aligned}$$

根据引理 1, 有 $\phi(p, q) \leq \phi(p^*, q^*)$ 。证毕。

定理 3.2 表明在两组多元离群值模型样本量不同下, 如果修正比例失效率尺度模型中的样本量在弱次优序下异质性越大, 则对应的修正比例失效率尺度样本所产生的二阶次序统计量在失效率序的意义下越小。

基金项目

本文受到国家自然科学基金项目: 不完全数据下相依竞争失效单调关联系统可靠性的统计推断(No. 12361060)的支持。

参考文献

- [1] Zhang, J. and Yan, R. (2018) Stochastic Comparison at Component Level and System Level Series System with Two Proportional Hazards Rate Components. *Journal of Quantitative Economics Quant*, **35**, 91-95.
- [2] Guo, Z., Zhang, J. and Yan, R. (2020) The Residual Lifetime of Surviving Components of Coherent System under Periodical Inspections. *Mathematics*, **8**, Article 2181. <https://doi.org/10.3390/math8122181>
- [3] Zhang, J., Yan, R. and Zhang, Y. (2022) Reliability Analysis of Fail-Safe Systems with Heterogeneous and Dependent Components Subject to Random Shocks. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, **237**, 1073-1087. <https://doi.org/10.1177/1748006x221122033>
- [4] Yan, R. and Niu, J. (2023) Stochastic Comparisons of Second-Order Statistics from Dependent and Heterogenous Modified Proportional Hazard Rate Observations. *Statistics*, **57**, 328-353. <https://doi.org/10.1080/02331888.2023.2177999>
- [5] Shrahili, M., Kayid, M. and Mesfioui, M. (2023) Relative Orderings of Modified Proportional Hazard Rate and Modified Proportional Reversed Hazard Rate Models. *Mathematics*, **11**, Article 4652. <https://doi.org/10.3390/math11224652>
- [6] Das, S., Kayal, S. and Torrado, N. (2022) Ordering Results between Extreme Order Statistics in Models with Dependence

Defined by Archimedean [Survival] Copulas. *Ricerche di Matematica*, **73**, 1997-2033.

<https://doi.org/10.1007/s11587-022-00715-3>

- [7] Guo, M., Zhang, J. and Yan, R. (2024) Stochastic Comparisons of Second Largest Order Statistics with Dependent Heterogeneous Random Variables. *Communications in Statistics—Theory and Methods*.
<https://doi.org/10.1080/03610926.2024.2392858>
- [8] Zhang, J., Guo, Z., Niu, J. and Yan, R. (2024) Increasing Convex Order of Capital Allocation with Dependent Assets under Threshold Model. *Statistical Theory and Related Fields*, **8**, 124-135.
<https://doi.org/10.1080/24754269.2023.2301630>
- [9] Das, S. and Kayal, S. (2019) Some Ordering Results for the Marshall and Olkin's Family of Distributions. *Communications in Mathematics and Statistics*, **9**, 153-179. <https://doi.org/10.1007/s40304-019-00191-6>
- [10] Shaked, M. and George Shanthikumar, J. (2007) Stochastic Orders. Springer.
- [11] Marshall, A.W., Olkin, I. and Arnold, B.C. (1979) Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. Springer.