Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(2), 247-254
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.152065

Fock空间上两个Hankel算子乘积的有界性

赵子仪

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2025年1月16日；录用日期：2025年2月17日；发布日期：2025年2月28日

摘　要

本文给出了Fock空间上两个Hankel算子乘积的有界性的必要条件描述，且结合反例证明此条件是两个Hankel算子乘积的有界性的必要不充分条件。

关键词

Fock空间，Hankel算子，有界性

Boundedness of the Product of Two Hankel Operators on Fock Space

Ziyi Zhao

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jan. 16th, 2025; accepted: Feb. 17th, 2025; published: Feb. 28th, 2025

Abstract

In this paper, we give a description of the necessary condition for boundedness of the product of two Hankel operators on Fock space, and prove that this condition is a necessary and insufficient condition for boundedness of the product of two Hankel operators.

Keywords

Fock Space, Hankel Operators, Boundedness

文章引用: 赵子仪. Fock 空间上两个 Hankel 算子乘积的有界性[J]. 理论数学, 2025, 15(2): 247-254.
DOI: 10.12677/pm.2025.152065

1. 引言

对于任意正参数，考虑复平面上的 Gaussian 测度，其定义为：

$$\mathrm{d}\lambda_\alpha(z)=\frac{\alpha}{\pi}\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}\mathrm{d}A(z),$$

其中 $\mathrm{d}A(z)$ 为面积测度。设 $H(\mathbb{C})$ 表示 $\mathbb{C}$ 上所有整函数的空间。则

$$F_\alpha^2=L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\lambda_\alpha)\cap H(\mathbb{C})$$

称为 Fock 空间。Fock 空间作为 $L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\lambda_\alpha)$ 的闭子空间，内积为：

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{C}}f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(z),$$

众所周知，正交投影 $P:L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\lambda_\alpha)\to F_\alpha^2$ 是一个积分算子，

$$Pf(z)=\langle f,K_z\rangle=\int_{\mathbb{C}}f(w)\mathrm{e}^{\alpha z\overline{w}}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w). \tag{1}$$

其中 $K_z(w)=\mathrm{e}^{\alpha z\overline{w}}$ 是 F_α^2 的再生核。关于 Fock 空间理论的一些相关研究见[1]。

设 D 表示 F_α^2 的线性子空间，包含 F_α^2 中核函数的所有有限线性组合。D 在 F_α^2 稠密。f 满足如下条件：

$$\int_{\mathbb{C}}\left|f(w)K_z(w)\right|\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)<+\infty,\quad z\in\mathbb{C}. \tag{2}$$

由于 $\left|K_z(w)\right|^2=\left|K_{2z}(w)\right|$，条件(2)等价于

$$\int_{\mathbb{C}}\left|f(w)\right|\left|K_z(w)\right|^2\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)<+\infty,\quad z\in\mathbb{C}.$$

通过(1)和 Cauchy-Schwarz 不等式，则

$$T_f(g)=P(fg),\ H_f(g)=(I-P)(fg),\ g\in D,$$

在 D 上稠定义，算子

$$T_f:D\to F_\alpha^2,\ H_f:D\to L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\lambda_\alpha),$$

其中 I 是 $L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\lambda_\alpha)$ 上的恒等算子，分别称为 Toeplitz 算子和 Hankel 算子，符号函数为 f。

Sarason 的 Toeplitz 算子乘积问题的自然伴生问题是 Hankel 算子的类似问题：找到解析函数 f 和 g 上的条件使得 Hankel 算子乘积 $H_{\bar{f}}^*H_{\bar{g}}$ 是有界的。由于 Toeplitz 算子乘积问题对 Hardy 或 Bergman 空间仍然是开放的，因此在 Hardy 或 Bergman 空间中，目前可能没有希望解决上述 Hankel 算子乘积问题。但 Cho-Park-Zhu 对 Fock 空间下 Toeplitz 算子乘积问题的解决方法表明，F_α^2 上对应的 Hankel 算子乘积问题的解可能是可以实现的。本篇论文基于两个 Hankel 算子乘积的有界性的必要条件展开相关探究。有关 Hankel 和 Toeplitz 算子的更多信息和结果，请参阅文献[1]-[4]。

2. 两个 Hankel 算子乘积的有界性

前有其他作者描述了 $H_{\bar{f}}^*H_{\bar{g}}$ 有界性的一个必要条件，见下面定理 1。以下考察其必要条件。

定理 1：设 $f,g\in F_\alpha^2$。如果 $H_{\bar{f}}^*H_{\bar{g}}$ 是有界的，那么存在一个常数 C 使得，

$$\left|\int_{\mathbb{C}}\left[f(z+w)-f(w)\right]\left[\overline{g(z+w)}-\overline{g(w)}\right]\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\right|\le C\mathrm{e}^{\alpha|z|^2},\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

下面为了描述两个 Hankel 算子乘积的有界性引入两个辅助函数 $F_2(z)$，$H_2(z)$

$$F_2(z)=\left|\int_{\mathbb{C}}\left[f(z+w)-f(w)\right]\left[\overline{g(z+w)}-\overline{g(w)}\right]\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\right|,$$

$$H_2(z)=\sup_{z\in\mathbb{C}}\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}F_2(z).$$

定理 2：如果 $H_{\bar{f}}^{*}H_{\bar{g}}$ 是有界算子，那么 $H_2(z)$ 是有界函数。

证明：由定理 1 可知，如果 $H_{\bar{f}}^{*}H_{\bar{g}}$ 有界，那么存在一个常数 C 使得 $\left|\int_{\mathbb{C}}\left[f(z+w)-f(w)\right]\left[\overline{g(z+w)}-\overline{g(w)}\right]\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\right|\le C\mathrm{e}^{\alpha|z|^2}, \forall z\in\mathbb{C}$ 成立。即 $F_2(z)\le C\mathrm{e}^{\alpha|z|^2}$，则 $H_2(z)=\sup_{z\in\mathbb{C}}\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}F_2(z)\le C$，故 $H_2(z)$ 有界。

□

注记：$H_2(z)$ 是有界函数，但 $H_{\bar{f}}^{*}H_{\bar{g}}$ 不一定是有界算子。

定理 3：

(a) 若 $f(z)=g(z)=z^2$ 时，则 $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}^{*}$ 无界，但 $H_2(z)$ 有界。

(b) 若 $f(z)=\mathrm{e}^{az+b}+A,\ g(z)=\mathrm{e}^{az+d}+B(a\ne 0)$ 时，则 $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}^{*}$ 无界，但 $H_2(z)$ 有界。

证明：(a) 若 $f(z)=g(z)=z^2$ 时，由计算可得

$$\begin{aligned}F_2(z)&=\int_{\mathbb{C}}\left|f(z+w)-f(w)\right|\left|\overline{g(z+w)}-\overline{g(w)}\right|\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\&=\int_{\mathbb{C}}\left|(z+w)^2-w^2\right|\left|(z+w)^2-w^2\right|\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\&=\int_{\mathbb{C}}\left|z^2+2zw\right|\left|z^2+2zw\right|\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\&=\int_{\mathbb{C}}\left|z^2+2zw\right|^2\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\&=\left\langle z^2+2zw,z^2+2zw\right\rangle\\&=|z|^4+\frac{4}{\alpha}|z|^2.\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}H_2(z)&=\sup_{z\in\mathbb{C}}\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}\left(|z|^4+\frac{4}{\alpha}|z|^2\right)\\&=\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|z|^4+\frac{4}{\alpha}|z|^2}{\mathrm{e}^{\alpha|z|^2}}\\&=\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|z|^4+\frac{4}{\alpha}|z|^2}{1+\alpha|z|^2+\frac{\alpha^2|z|^4}{2!}+\frac{\alpha^3|z|^6}{3!}+\cdots}\le M.\end{aligned}$$

此时，$H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}^{*}$ 无界(详见参考文献[1])，但 $H_2(z)$ 有界。

(b) 若 $f(z)=\mathrm{e}^{az+b}+A,\ g(z)=\mathrm{e}^{az+d}+B$ 时，首先计算 $F_2(z)$，

由于 $F_2(z)=\left|\int_{\mathbb{C}}\left[f(z+w)-f(w)\right]\left[\overline{g(z+w)}-\overline{g(w)}\right]\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\right|$，那么

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{C}}f(z+w)\overline{g(z+w)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\&=\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{a(z+w)+b}\mathrm{e}^{\overline{a(z+w)+d}}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)+A\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{\overline{a(z+w)+d}}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)+\bar{B}\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{a(z+w)+b}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)+A\bar{B}.\end{aligned}$$

计算

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} \mathrm{e}^{az+aw+b}\mathrm{e}^{\overline{az}+\overline{aw}+\overline{d}}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w) &= \mathrm{e}^{az+\overline{az}+b+\overline{d}}\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{aw}\mathrm{e}^{\overline{aw}}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\ &= \mathrm{e}^{az+\overline{az}+b+\overline{d}}\frac{1}{2}\left\langle \mathrm{e}^{aw},\mathrm{e}^{\alpha\frac{\overline{a}}{\alpha}w}\right\rangle\\ &= \mathrm{e}^{az+b+\overline{az}+\overline{d}}\mathrm{e}^{\frac{|a|^2}{\alpha}}.\end{aligned}$$

其次计算

$$\begin{aligned}A\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{\overline{a(z+w)+d}}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w) &= A\mathrm{e}^{\overline{az+d}}\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{\overline{aw}}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\ &= A\mathrm{e}^{\overline{az+d}}\left\langle 1,\mathrm{e}^{aw}\right\rangle\\ &= A\mathrm{e}^{\overline{az+d}}\overline{\left\langle \mathrm{e}^{aw},1\right\rangle}\\ &= A\mathrm{e}^{\overline{az+d}}.\end{aligned}$$

最后计算

$$\begin{aligned}\overline{B}\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{a(z+w)+b}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w) &= \overline{B}\mathrm{e}^{az+b}\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{aw}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\ &= \overline{B}\mathrm{e}^{az+b}\left\langle \mathrm{e}^{aw},1\right\rangle\\ &= \overline{B}\mathrm{e}^{az+b}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{C}}\left[\mathrm{e}^{a(z+w)+b}+A\right]\left[\mathrm{e}^{\overline{a(z+w)+d}}+\overline{B}\right]\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\ &= \mathrm{e}^{az+\overline{az}}\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}+A\mathrm{e}^{\overline{az+d}}+\overline{B}\mathrm{e}^{az+b}+A\overline{B}.\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{C}} f(z+w)\overline{g(w)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\ &= \int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{a(z+w)+b}\mathrm{e}^{\overline{aw}+\overline{d}}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)+A\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{\overline{aw}+\overline{d}}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)+\overline{B}\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{a(z+w)+b}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)+A\overline{B}.\end{aligned}$$

首先计算

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{a(z+w)+b}\mathrm{e}^{\overline{aw}+\overline{d}}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w) &= \mathrm{e}^{az+b+\overline{d}}\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{aw}\mathrm{e}^{\overline{aw}}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\ &= \mathrm{e}^{az+b+\overline{d}}\left\langle \mathrm{e}^{aw},\mathrm{e}^{aw}\right\rangle\\ &= \mathrm{e}^{az}\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}.\end{aligned}$$

其次计算

$$\overline{B}\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{a(z+w)+b}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w) = \overline{B}\mathrm{e}^{az+b}\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{aw}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w) = 1.$$

最后计算

$$A\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{\overline{aw}+\overline{d}}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w) = A\mathrm{e}^{\overline{d}}\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{\overline{aw}}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w) = 1.$$

所以

$$\int_{\mathbb{C}}\left[\mathrm{e}^{a(z+w)+b}+A\right]\left[\mathrm{e}^{\overline{a(z+w)+d}}+\overline{B}\right]\mathrm{d}\lambda_\alpha(w) = \mathrm{e}^{az}\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}+A\mathrm{e}^{\overline{az}}\mathrm{e}^{\overline{d}}+\overline{B}\mathrm{e}^{b}+A\overline{B}.$$

进而

$$\int_{\mathbb{C}} f(w)\overline{g(w)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)=\int_{\mathbb{C}}\left[\mathrm{e}^{aw+b}+A\right]\left[\mathrm{e}^{\overline{aw+d}}+\overline{B}\right]\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)$$
$$=\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{aw+b}\mathrm{e}^{\overline{aw+d}}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)+A\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{\overline{aw+d}}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)+\overline{B}\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{aw+b}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)+A\overline{B}.$$

主要计算

$$\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{aw+b}\mathrm{e}^{\overline{aw+d}}\lambda_\alpha(w)=\mathrm{e}^{b+\overline{d}}\left\langle \mathrm{e}^{aw},\mathrm{e}^{aw}\right\rangle=\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}.$$

所以

$$\int_{\mathbb{C}} f(w)\overline{g(w)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)=\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}+A\mathrm{e}^{\overline{d}}+\overline{B}\mathrm{e}^{b}+A\overline{B}.$$

综上所述，我们有

$$\int_{\mathbb{C}} f(z+w)\overline{g(z+w)}-f(z+w)\overline{g(w)}-f(w)\overline{g(z+w)}+f(w)\overline{g(w)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)$$
$$=\mathrm{e}^{az+\overline{az}}\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}+A\mathrm{e}^{\overline{az+d}}+\overline{B}\mathrm{e}^{az+b}+A\overline{B}-\mathrm{e}^{az}\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}-\overline{B}\mathrm{e}^{az+b}-A\mathrm{e}^{\overline{d}}-A\overline{B}$$
$$-\mathrm{e}^{\overline{az}}\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}-A\mathrm{e}^{\overline{az+d}}-\overline{B}\mathrm{e}^{b}-A\overline{B}+\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}+A\mathrm{e}^{\overline{d}}+\overline{B}\mathrm{e}^{b}+A\overline{B}$$
$$=\mathrm{e}^{az+\overline{az}}\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}-\mathrm{e}^{az}\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}-\mathrm{e}^{\overline{az}}\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}+\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}$$
$$=\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}\left[\mathrm{e}^{az+\overline{az}}-\mathrm{e}^{az}-\mathrm{e}^{\overline{az}}+1\right]$$
$$=\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}\left[\left(\mathrm{e}^{az}-1\right)\left(\mathrm{e}^{\overline{az}}-1\right)\right].$$

所以

$$F_2(z)=\left|\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}\right|\left|\left(\mathrm{e}^{az}-1\right)\left(\mathrm{e}^{\overline{az}}-1\right)\right|.$$

则

$$H_2(z)=\sup_{z\in\mathbb{C}}\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}F_2(z)=\sup_{z\in\mathbb{C}}\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}\left|\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}\right|\left|\left(\mathrm{e}^{az}-1\right)\left(\mathrm{e}^{\overline{az}}-1\right)\right|.$$

记 $C_1=\left|\mathrm{e}^{b+\overline{d}+\frac{|a|^2}{\alpha}}\right|$，则上式等于

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}C_1\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}\left(\mathrm{e}^{az+\overline{az}}-\mathrm{e}^{az}-\mathrm{e}^{\overline{az}}+1\right)$$
$$\le\sup_{z\in\mathbb{C}}C_1\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}\left(\mathrm{e}^{2\operatorname{Re}(az)}+1\right)$$
$$\le\sup_{z\in\mathbb{C}}C_1\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2+2\operatorname{Re}(az)}+\sup_{z\in\mathbb{C}}C_1\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}$$
$$\le\sup_{z\in\mathbb{C}}C_1\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2+2|a|\cos\theta|z|}+C_1.$$

不妨取定 θ，使得 $\operatorname{Re}(az)=|az|\cos\theta$，则对于函数

$$q(|z|)=-\alpha|z|^2+2|a|\cos\theta|z|,$$

当 $|z| = -\frac{b}{2a} = -\frac{2|a|\cos\theta}{2(-\alpha)} = \frac{|a|}{\alpha}\cos\theta$ 时，

$$q(|z|)_{\max} = -\frac{|a|^2}{\alpha}\cos^2\theta + \frac{2|a|^2}{\alpha}\cos^2\theta = \frac{|a|^2}{\alpha}\cos^2\theta .$$

则有 $H_2(z) \le C_1 \mathrm{e}^{\frac{|a|^2}{\alpha}\cos^2\theta} + C$。此时，$f(z) = \mathrm{e}^{az+b} + A$，$g(z) = \mathrm{e}^{az+d} + B$，$H_{\bar{f}} H_{\bar{g}}^*$ 无界，但是 $H_2(z)$ 有界。

由此可得，如果 $H_{\bar{f}} H_{\bar{g}}^*$ 是有界算子，那么 $H_2(z)$ 是有界函数。而 $H_2(z)$ 是有界函数时，根据参考文献[1]可知 $H_{\bar{f}} H_{\bar{g}}^*$ 不一定是有界算子。

□

3. 两个反例

下面给出两个反例证明定理 1 只能是 $H_{\bar{f}} H_{\bar{g}}^*$ 有界的必要条件而非充分条件。

例 1：若 $f(z) = z^n$，$g(z) = z^n \ (n > 1)$ 时，则

$$F_2(z) \le C\mathrm{e}^{\alpha|z|^2}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

证明：

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}} \left[(z+w)^n - w^n\right]\left[\overline{(z+w)^n} - \overline{w^n}\right] \mathrm{d}\lambda_\alpha(w) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \left[|z+w|^{2n} - (z+w)^n \overline{w^n} - w^n \overline{(z+w)^n} + |w|^{2n}\right] \mathrm{d}\lambda_\alpha(w).
\end{aligned}$$

易知，当且仅当 $k = l$ 时，$\langle w^k, w^l \rangle \ne 0$，当 $k \ne l$ 时，$\langle w^k, w^l \rangle = 0$。

首先计算

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} |z+w|^{2n} \mathrm{d}\lambda_\alpha(w) &= \left\langle (z+w)^n, (z+w)^n \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k} w^k, \sum_{l=0}^{\infty} C_n^l z^{n-l} w^l \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 \left|z^{n-k}\right|^2 \left\langle w^k, w^k \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 \left|z^{n-k}\right|^2 \frac{k!}{\alpha^k}.
\end{aligned}$$

其次计算

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} (z+w)^n \overline{w^n} \mathrm{d}\lambda_\alpha(w) &= \left\langle (z+w)^n, w^n \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k} w^k, w^n \right\rangle \\
&= C_n^n z^{n-n} \frac{n!}{\alpha^n} = \frac{n!}{\alpha^n}.
\end{aligned}$$

再次计算

$$\int_{\mathbb{C}} w^n \overline{(z+w)^n} \mathrm{d}\lambda_\alpha(w) = \left\langle w^n, (z+w)^n \right\rangle = \frac{n!}{\alpha^n}.$$

最后计算

$$\int_{\mathbb{C}}|w|^{2n}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)=\langle w^n,w^n\rangle=\frac{n!}{\alpha^n}.$$

综上，整理上式，我们得到

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2\left|z^{n-k}\right|^2\frac{k!}{\alpha^k}-\frac{n!}{\alpha^n}\right|\le C\mathrm{e}^{\alpha|z|^2}. \tag{3}$$

由 $\mathrm{e}^{\alpha|z|^2}=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{a^t}{t!}\left(|z|^2\right)^t=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{a^t}{t!}|z|^{2t}$ 所以对于(3)，左侧是关于 $|z|$ 有限次求和，而右侧是关于 $|z|$ 无限次求和，所以一定存在足够大的常数 C，使得不等式成立。而且此时 $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}^*$ 是无界算子。

因为 $H_{\bar{z}^2}H_{\bar{z}^2}^*$ 也是无界的，所以只需考虑 $n=2$ 情况。

不等式(3)左侧等于

$$\left|\sum_{k=0}^{2}\left(C_n^k\right)^2\left|z^{n-k}\right|^2\frac{k!}{\alpha^k}-\frac{2!}{\alpha^2}\right|=\left||z|^4+4|z|^2\frac{1}{\alpha}+\frac{2!}{\alpha^2}-\frac{2!}{\alpha^2}\right|=|z|^4+\frac{4}{\alpha}|z|^2,$$

不等式(3)右侧等于

$$C\sum_{t=0}^{\infty}\frac{a^t}{t!}|z|^{2t}=1+\alpha|z|^2+\frac{\alpha^2|z|^4}{2!}+\frac{\alpha^3|z|^6}{3!}+\cdots.$$

所以一定存在一个常数 C 使得不等式成立，因此定理 1 只是必要条件，并非充分条件。

□

例 2：若 $f(z)=\mathrm{e}^{az+b}+A$， $g(z)=\mathrm{e}^{cz+d}+B$ 时，则

$$F_2(z)\le C\mathrm{e}^{\alpha|z|^2},\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

证明：根据定理 3 中(b)的计算过程，得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}}\left[f(z+w)-f(w)\right]\left[\overline{g(z+w)}-\overline{g(w)}\right]\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\
&=\int_{\mathbb{C}}f(z+w)\overline{g(z+w)}-f(z+w)\overline{g(w)}-f(w)\overline{g(z+w)}+f(w)\overline{g(w)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\
&=\mathrm{e}^{az+\overline{cz}}\mathrm{e}^{b+\bar{d}+\frac{a\bar{c}}{\alpha}}+A\mathrm{e}^{\overline{cz+d}}+\bar{B}\mathrm{e}^{az+b}+A\bar{B}-\mathrm{e}^{az}\mathrm{e}^{b+\bar{d}+\frac{a\bar{c}}{\alpha}}-\bar{B}\mathrm{e}^{az+b}-A\mathrm{e}^{\bar{d}}-A\bar{B}\\
&\quad-\mathrm{e}^{\overline{cz}}\mathrm{e}^{b+\bar{d}+\frac{a\bar{c}}{\alpha}}-A\mathrm{e}^{\overline{cz+d}}-\bar{B}\mathrm{e}^{b}-A\bar{B}+\mathrm{e}^{b+\bar{d}+\frac{a\bar{c}}{\alpha}}+A\mathrm{e}^{\bar{d}}+\bar{B}\mathrm{e}^{b}+A\bar{B}\\
&=\mathrm{e}^{az+\overline{cz}}\mathrm{e}^{b+\bar{d}+\frac{a\bar{c}}{\alpha}}-\mathrm{e}^{az}\mathrm{e}^{b+\bar{d}+\frac{a\bar{c}}{\alpha}}-\mathrm{e}^{\overline{cz}}\mathrm{e}^{b+\bar{d}+\frac{a\bar{c}}{\alpha}}+\mathrm{e}^{b+\bar{d}+\frac{a\bar{c}}{\alpha}}\\
&=\mathrm{e}^{b+\bar{d}+\frac{a\bar{c}}{\alpha}}\left[\mathrm{e}^{az+\overline{cz}}-\mathrm{e}^{az}-\mathrm{e}^{\overline{cz}}+1\right]\\
&=\mathrm{e}^{b+\bar{d}+\frac{a\bar{c}}{\alpha}}\left[\left(\mathrm{e}^{az}-1\right)\left(\mathrm{e}^{\overline{cz}}-1\right)\right].
\end{aligned}$$

所以我们得到

$$\left|\mathrm{e}^{b+\bar{d}+\frac{a\bar{c}}{\alpha}}\right|\left|\left(\mathrm{e}^{az}-1\right)\left(\mathrm{e}^{\overline{cz}}-1\right)\right|\le C\mathrm{e}^{\alpha|z|^2}.$$

由于 $z\in\mathbb{C}$，可知 $F_2(z)\le C\mathrm{e}^{\alpha|z|^2}$ 成立。但此时 $H_{\bar{f}}H_{\bar{g}}^*$ 是无界算子。

□

参考文献

[1] Zhu, K. (2012) Analysis on Fock Spaces. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8801-0

[2] Cho, H.R., Park, J.-D. and Zhu, K. (2014) Products of Toeplitz Operators on the Fock Space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **142**, 2483-2489. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2014-12110-1

[3] Stroethoff, K. and Zheng, D. (1999) Products of Hankel and Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Journal of Functional Analysis*, **169**, 289-313. https://doi.org/10.1006/jfan.1999.3489

[4] Zheng, D. (1996) The Distribution Function Inequality and Products of Toeplitz Operators and Hankel Operators. *Journal of Functional Analysis*, **138**, 477-501. https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0073