Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(2), 255-267
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.152066

Hans汉斯

基于Lyapunov理论的状态依赖延迟脉冲系统输入到状态稳定性研究

秦梦云，张鸿飞，刘　晨

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2025年1月8日；录用日期：2025年2月17日；发布日期：2025年2月28日

摘　要

本文研究了状态依赖延迟(**State-Dependent Delay, SDD**)脉冲系统的输入到状态稳定性(**Input-to-Sate Stability, ISS**)方面的特性，采用Lyapunov-Krasovskii函数与平均脉冲间隔分析，推导出了确保该系统ISS的必要条件。研究表明，稳定的SDD脉冲系统遭受不稳定脉冲扰动的情况下，系统依然能够保持ISS属性。另一方面，基于脉冲控制策略，我们构建了一套基于Lyapunov理论的充分条件，用以评估系统的ISS状态。研究表明，本质不稳定的SDD脉冲系统也可以保持ISS状态，达成预期性能。最终，给出两个数值案例验证理论结果的精确性和实用性。

关键词

输入到状态稳定性，状态依赖时滞，平均脉冲间隔

Input-to-State Stability Study of State-Dependent Delayed Impulse Systems Based on Lyapunov Theory

Mengyun Qin, Hongfei Zhang, Chen Liu

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jan. 8th, 2025; accepted: Feb. 17th, 2025; published: Feb. 28th, 2025

Abstract

In this paper, we examine the properties of state-dependent delay (SDD) impulsive systems in terms of input-to-state stability (ISS), and derive the necessary conditions to ensure ISS for this system,

文章引用：秦梦云，张鸿飞，刘晨．基于 Lyapunov 理论的状态依赖延迟脉冲系统输入到状态稳定性研究[J]．理论数学，2025, 15(2): 255-267. DOI: 10.12677/pm.2025.152066

using the Lyapunov-Krasovskii function with mean impulsive interval analysis. It is demonstrated that the stable SDD impulsive system suffers from unstable impulse interference, the system is still able to maintain the ISS property. Conversely, we have developed a set of sufficient conditions, founded on Lyapunov theory, to evaluate the ISS state of the system based on the impulse control strategy. It has been demonstrated that the intrinsically unstable SDD impulsive system can also maintain the ISS state and attain the anticipated performance. To conclude, we have presented two numerical cases to substantiate the precision and practicality of the theoretical outcomes.

Keywords

Input-to-State Stability, State-Dependent Delays, Average Impulsive Interval

1. 引言

时间延迟系统的稳定性分析在控制理论与应用数学领域内占据着举足轻重的地位，其影响力跨越至众多学科[1]-[5]。传统研究常基于简化的恒定或时变延迟假设[6]，却忽视了延迟与系统状态间可能存在的复杂动态关联[7]。例如，神经网络中执行器开关速度的限制及神经元间信息传输的有限性会导致时间延迟，进而影响系统稳定性，可能诱发不稳定状态、振荡乃至混沌。

随着科技进步，状态依赖延迟(State-Dependent Delay, SDD)脉冲系统在网络通信、神经网络模型、控制系统设计及生态学等领域的重要性日益凸显[8]。SDD 脉冲系统的延迟不仅与时间相关，更紧密依赖于系统当前状态，这极大地增加了系统历史状态预测及稳定性分析的复杂性。在生态学领域[9]，SDD 对于精确建模至关重要，如南极鲸和海豹等物种的成熟期；在控制网络中[10]，SDD 则用于建模控制信号传输频率随系统状态变化的情况，更精确地反映系统动态特性。

SDD 模型已广泛应用于自动控制、工业过程控制、神经网络科学、生物系统建模及网络控制系统等领域[9]-[20]，显著提升了系统稳定性。例如，SDD 模型在电机控制中用于干扰补偿[11]，在火箭飞行器设计中提升控制精度[12]，在潜艇位置控制中优化运动策略[13]，还为传送带等设备提供了精确建模工具[14]。在神经网络中，SDD 方法对于解决非线性问题及神经信号模拟至关重要[18]；在生物学中，SDD 模型准确描绘细胞群体行为，支持生态模型开发[19]；在网络控制中，SDD 模型优化网络性能，特别是在 TCP/RED 拥塞控制中提高网络稳定性和吞吐量[20]。

近期，SDD 系统稳定性研究取得了显著进展[21]-[37]，包括利用预测补偿器分析 SDD 非线性系统[22]，解决鲁棒性问题[23]，从脉冲控制理论发展 SDD 脉冲系统稳定性概念[24]。Li 和 Yang 等学者[29]基于李亚普诺夫理论构建了 SDD 系统指数稳定性准则，Xu 和 Li 等人[30]研究了 SDD 脉冲控制下广义非线性系统的有限时间稳定性，He 和 Li 等学者[31]则专注于 SDD 系统的有限时间稳定性。此外，Cui 和 Li 等人[35]探讨了 SDD 脉冲对延迟非线性系统的影响。然而，关于 SDD 脉冲系统输入到状态稳定性(ISS)的研究仍相对不足。在控制系统中，外部输入和内部状态扰动的鲁棒性是衡量系统性能的关键指标[36]。输入到状态稳定性正是用于描述系统在外部输入和初始状态扰动下，系统状态的有界性和渐近行为的重要概念。ISS 的概念由 Sontag 在 1989 年首次提出[38]，旨在统一研究非线性系统的稳定性、鲁棒性和干扰抑制问题。ISS 不仅适用于常微分方程系统，还广泛应用于时滞系统、切换系统和脉冲系统等。对于时

滞系统，ISS 分析尤为重要，因为它能够提供系统在面对时滞和外部输入时的稳定性保证。这意味着系统的状态不仅依赖于初始状态的衰减，还受到外部输入的直接影响。ISS 提供了一种量化系统对外部干扰和初始条件敏感性的方法，是控制系统设计和分析中的一个重要工具。

基于此，本文探究 SDD 脉冲系统中的 ISS 问题，构建创新理论框架，利用 Lyapunov-Krasovskii 函数与平均脉冲间隔法分析 SDD 脉冲系统的 ISS 特性。研究结果显示，稳定 SDD 脉冲系统对脉冲干扰具有鲁棒性。进一步，基于 Lyapunov 理论，我们提出新方法，确定不稳定的 SDD 脉冲系统在脉冲作用下能够趋于输入到状态稳定的充分条件，拓宽了对 SDD 脉冲系统 ISS 问题的理解。此外，本文还证明，在 SDD 脉冲系统中，不稳定输入状态可通过脉冲控制和外部输入控制实现稳定，为 SDD 脉冲系统设计与优化提供坚实理论基础。具体而言，本文贡献如下：(1) 避免预先设定 SDD 相对于状态的约束条件，放宽 SDD 限制，拓宽应用范围，为后续研究提供新视角；(2) 将现有结论扩展至 SDD 脉冲延迟系统中的 ISS 情景，深化对 SDD 脉冲系统 ISS 问题的理解，为相关领域研究提供新理论支撑和实践指导。综上所述，本文为 SDD 脉冲系统中的 ISS 问题提供新理论框架和分析方法，在多个方面为该领域发展作出重要贡献。

本文的结构大纲如下，第 2 节介绍了本文使用的符号和基本定义。第 3 节介绍了主要结果。它提出了几种确保 SDD 脉冲系统 ISS 型的新标准。第 4 节提供了两个示例来证明所提结果的有效性。最后，第 5 节给出了本研究的结论。

2. 预备知识

设 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}^+$ 分别为非负整数集和正整数集，$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$，$\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$，$\mathbb{R}^n$ 表示具有欧几里得空间范数 $|\bullet|$ 的 n 维欧几里得空间。如果函数 $\alpha(\bullet)$ 的反函数存在，则用 $\alpha^{-1}(\bullet)$ 表示。对于任意实数 a 和 b，满足 $a<b$，则令 $PC([a,b];\mathbb{R}^n)$ 表示从区间 $[a,b]$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的分段连续函数的集合。如果一个函数在开区间 $[a,b)$ 上最多有有限个跳跃不连续点，并且在闭区间 $[a,b)$ 的每一点上都右连续，那么这个函数就属于集合 $PC([a,b];\mathbb{R}^n)$。对于任意常数 $\gamma>0$，定义 $PC_\gamma=PC([\gamma,0];\mathbb{R}^n)$，则对于任意函数 $\xi\in PC_\gamma$，满足 $\|\xi\|_\gamma=\sup_{-\gamma\le s\le 0}|\xi(s)|$。如果函数 $\alpha_1:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 是连续的、严格递增的，且 $\alpha_1(0)=0$，则函数 α_1 属于 K 类函数，进一步，如果 α_1 也是无界的，那么它属于 K_∞ 类函数。如果对于每个固定的 $t\ge 0$，函数 $\alpha_2(\bullet,t)$：$\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 是 K 类函数，并且对于每个固定的 $x\ge 0$，当 $t\to+\infty$ 时，$\alpha_2(x,t)\to 0$，那么 $\alpha_2(x,t)$ 属于 KL 类函数。

本文考虑以下 SDD 脉冲系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f\left(t,x(t),x(t-\tau),\vartheta(t)\right), & \tau=\tau\left(t,x(t)\right),\ t\ne t_k,\\ x(t_k)=g\left(t_k,x(t_k^-),\vartheta(t_k^-)\right), & t=t_k,\\ x(t)=\xi(t), & t\in[t_0-\gamma,t_0],\end{cases}\tag{1}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 是系统的状态变量；$\vartheta(t)\in PC([t_0,+\infty];\mathbb{R}^n)$ 表示外部输入函数，$\xi(t)\in PC_\gamma$ 是初值函数；脉冲时间序列 $\{t_k,k\in\mathbb{N}\}$ 是严格递增的序列，满足 $k\to+\infty$ 时 $t_k\to+\infty$，这意味着脉冲扰动是离散且逐渐发生的，不会在有限时间内累积无限多次扰动。$f:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 和 $g:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续函数，满足局部 Lipschitz 条件。根据泛函分析理论[39]，系统(1)对于 $t\in[t_0-\gamma,t_1)$ 有一个唯一的解 $x(t)=x(t,t_0,x(t_0))$。在 $t=t_1$ 时，系统发生脉冲现象，使得解 $x(t_1^-)=x(t_1^-,t_0,x(t_0))$ 跳到 $x(t_1^-)=g(t_1^-,x(t_1^-))$。对于 $t\in[t_1,t_2)$，将 t_1 时跳跃后的状态 $x(t_1)$ 作为新的初始条件，然后应用局部 Lipschitz 条件保证解的存在性和唯一性，可以证明存在一个唯一的解 $x(t)=x(t,t_1,x(t_1))$。通过重复上述推导过程，我们可以将解扩展到整个时间域上。因此，对于任何 $\xi(t)\in PC_\gamma$，系统(1)有一个唯一的全局解 $x(t)$。此外，假设对任意

的 $t \ge t_0$，有 $f\left(t,0,0,0\right) \equiv 0$ 和 $g\left(t,0,0\right) \equiv 0$，这意味着当系统的所有状态变量都为零时，无论时间如何变化，系统的动态行为都将保持为零状态。因此，系统(1)允许一个平凡解 $x\left(t\right) \equiv 0$。假设方程的解满足右连续性条件 $x\left(t^-\right) = \lim_{s\to t^-} x\left(s\right)$。$\tau:\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ 是系统的 SDD，满足 $\tau \le \gamma$，

$$\tau\left(t,0\right) = 0,\ \left|\tau\left(t,u\right) - \tau\left(t,v\right)\right| \le L\left|u - v\right|, \tag{2}$$

其中 $t \in \mathbb{R}^+$，$u, v \in \mathbb{R}^n$，L 是正常数。γ 是一个先验未知的常数，这种情况下，我们强调常数 γ 的存在，以确保系统(1)的初始条件定义明确。

定义 1 [30]对于局部 Lipschitz 连续函数 $V:\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$，系统(1)的 Dini 右上导数定义为

$$D^+V\left(x\left(t\right)\right) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[V\left(x\left(t+h\right)\right) - V\left(x\left(t\right)\right)\right].$$

定义 2 [40]对于给定的脉冲时间序列 $\left\{t_k, k \in \mathbb{N}\right\}$，如果存在函数 α_1，$\alpha_2 \in K_\infty$ 类函数和 $\beta \in KL$ 类函数，使得对于每个初值函数 $\xi\left(t\right) \in PC_\gamma$ 和输入函数 $\vartheta\left(t\right) \in PC\left(\left[t_0, +\infty\right]; \mathbb{R}^n\right)$，系统(1)的解 $x\left(t, t_0, \xi\right)$ 满足

$$\alpha_1\left(\left|x\left(t,t_0,\xi\right)\right|\right) \le \beta\left(\left\|\xi\right\|_\gamma, t - t_0\right) + \sup_{t_0 \le s \le t} \alpha_2\left(\left|\vartheta\left(s\right)\right|\right),\ \forall t \ge t_0,$$

则系统(1)被称为输入－状态稳定(ISS)。

定义 3 [40]对于给定的脉冲时间序列 $\left\{t_k, k \in \mathbb{N}\right\}$，如果存在函数 α_1，$\alpha_2 \in K_\infty$ 类函数和 $\beta \in KL$ 类函数，使得对于每个初值函数 $\xi\left(t\right) \in PC_\gamma$ 和输入函数 $\vartheta\left(t\right) \in PC\left(\left[t_0, +\infty\right]; \mathbb{R}^n\right)$，系统(1)的解 $x\left(t, t_0, \xi\right)$ 满足

$$\alpha_1\left(\left|x\left(t,t_0,\xi\right)\right|\right) \le \beta\left(\left\|\xi\right\|_\gamma, t - t_0\right) + \int_{t_0}^{t} \alpha_2\left(\left|\vartheta\left(s\right)\right|\right)\mathrm{d}s + \sum_{t_0 \le t_k \le t} \alpha_2\left(\left|\vartheta\left(t_k^-\right)\right|\right),\ \forall t \ge t_0,$$

则系统(1)被称为积分输入－状态稳定(iISS)。

定义 4 [36]对于给定的脉冲时间序列 $\left\{t_k, k \in \mathbb{N}\right\}$，如果存在函数 α_1，$\alpha_2 \in K_\infty$ 类函数和 $\beta \in KL$ 类函数，使得对于每个初值函数 $\xi\left(t\right) \in PC_\gamma$ 和输入函数 $\vartheta\left(t\right) \in PC\left(\left[t_0, +\infty\right]; \mathbb{R}^n\right)$，系统(1)的解 $x\left(t, t_0, \xi\right)$ 满足

$$\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}\alpha_1\left(\left|x\left(t,t_0,\xi\right)\right|\right) \le \beta\left(\left\|\xi\right\|_\gamma, t - t_0\right) + \sup_{t_0 \le s \le t} \mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}\alpha_2\left(\left|\vartheta\left(s\right)\right|\right),\ \forall t \ge t_0,$$

则系统(1)被称为指数输入－状态稳定($\mathrm{e}^{\lambda t}$ -ISS)。

定义 5 [41]对于一个脉冲时间序列 $\left\{t_k, k \in \mathbb{N}\right\}$，$N\left(t,s\right)$ 表示在半开放区间 $\left(s,t\right]$ 中 t_k 的数目，如果

$$\frac{t-s}{T_0} - N_0 \le N\left(s,t\right) \le \frac{t-s}{T_0} + N_0,$$

其中 $N_0 > 0$，$T_0 > 0$，N_0 和 T_0 分别被称为平均脉冲区间和弹性数。

3. 理论结果

本节研究 SDD 脉冲系统(1)的 ISS 特性，通过综合运用 Lyapunov-Krasovskii 泛函理论与平均脉冲间隔方法，建立了具有脉冲干扰的稳定 SDD 脉冲系统的 ISS、iISS 以及 $\mathrm{e}^{\lambda t}$ -ISS 条件。此外，基于 Lyapunov 理论框架，论证了具有稳定脉冲的不稳定 SDD 脉冲系统的 ISS。

定理 1 假设存在一个局部 Lipschitz 连续函数 $V:\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ 和常数 $0 < \omega_2 < \omega_1$，$\mu > 1$，函数 α_1，$\alpha_2 \in K_\infty$，$0 \le J\left(s\right) \le G$，$\tau = \tau\left(t, x\left(t\right)\right)$，使得以下条件成立

(i) 对任意的 $t \ge t_0 - \gamma$，有 $\alpha_1\left(\left|x\left(t\right)\right|\right) \le V\left(t, x\left(t\right)\right) \le \alpha_2\left(\left|x\left(t\right)\right|\right)$；

(ii) 当 $t \ne t_k$，$k \in \mathbb{N}$ 时，

$$D^+V\left(t, x\left(t\right)\right) \le -\omega_1 V\left(t, x\left(t\right)\right) + \omega_2 V\left(t - \tau, x\left(t - \tau\right)\right) + J\left(\left|\vartheta\left(t\right)\right|\right);$$

(iii) 当 $t=t_k$， $k\in\mathbb{N}$ 时，

$$V\left(t_k,x\left(t_k\right)\right)\le \mu V\left(t_k^-,x\left(t_k^-\right)\right)+J\left(\left|\vartheta\left(t_k^-\right)\right|\right);$$

(iv) $T_0>\dfrac{\ln\mu}{\omega_0}$， $\omega_0\in\left(0,\omega_3\right)$， ω_3 是方程 $x-\omega_1+\omega_2\mathrm{e}^{\rho x}=0$ 的唯一正解，其中

$$\rho=L\alpha_1^{-1}\left(\mu^{N_0}\left(M+G\left(\frac{\mu T_0}{T_0x-\ln\mu}+\frac{\mathrm{e}^{\eta x}}{\mathrm{e}^{\eta x}-\mu^{\eta T_0^{-1}}}\right)\right)\right),\quad M=\alpha_2\left(\|\xi\|_\gamma\right)>0,\quad \eta=\inf\left\{t_k-t_{k-1},k\in\mathbb{N}\right\}>0;$$

则系统(1)在脉冲干扰下是 ISS，iISS， $\mathrm{e}^{\lambda t}$-ISS，其中 $\lambda\in\left(0,\omega_0-\dfrac{\ln\mu}{T_0}\right)$。

证明 构造函数 $\psi(x)=x-\omega_1+\omega_2\mathrm{e}^{\rho x}$，其中 $\rho=L\alpha_1^{-1}\left(\mu^{N_0}\left(M+G\left(\dfrac{\mu T_0}{T_0x-\ln\mu}+\dfrac{\mathrm{e}^{\eta x}}{\mathrm{e}^{\eta x}-\mu^{\eta T_0^{-1}}}\right)\right)\right)$， $x>\dfrac{\ln\mu}{T_0}$。当 $x=0$ 时 $\psi(0)=-\omega_1+\omega_2<0$，当 $x=+\infty$ 时 $\psi(+\infty)=+\infty$，对函数求导可得 $\psi'(x)>0$，则存在一个正常数 ω_3，满足 $\psi(\omega_3)=\omega_3-\omega_1+\omega_2\mathrm{e}^{\rho\omega_3}=0$，进而存在一个正常数 $\omega_0\in(0,\omega_3)$ 使得 $\omega_0-\omega_1+\omega_2\mathrm{e}^{\rho\omega_0}<0$。

考虑辅助函数：

$$W(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\omega_0(t-t_0)}V\left(t,x(t)\right), & t\ge t_0,\\ V\left(t,x(t)\right), & t_0-\gamma\le t\le t_0,\end{cases}$$

$$H_1(t)=\begin{cases}M+\sum_{i=0}^{K-1}\mu^{-i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathrm{e}^{\omega_0(\sigma-t_0)}J\left(\left|\vartheta(\sigma)\right|\right)\mathrm{d}\sigma+\mu^{-K}\int_{t_K}^{t}\mathrm{e}^{\omega_0(\sigma-t_0)}J\left(\left|\vartheta(\sigma)\right|\right)\mathrm{d}\sigma, & t\ge t_0,\\ M, & t_0-\gamma\le t\le t_0,\end{cases}\tag{3}$$

$$H_2(t)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{K}\mu^{K-i}\mathrm{e}^{\omega_0(t_i-t_0)}J\left(\left|\vartheta\left(t_i^-\right)\right|\right), & t\ge t_1,\\ 0, & t_0-\gamma\le t<t_1,\end{cases}$$

其中 $K=N(t,t_0)$， $M=\alpha_2\left(\|\xi\|_\gamma\right)$。

接下来，我们证明以下不等式对于任意 $t>t_0-\gamma$ 均成立，

$$W(t)\le\mu^K H_1(t)+H_2(t).\tag{4}$$

当 $t\in\left[t_0-\gamma,t_0\right]$ 时，(4)式显然成立。接下来，我们证明(4)式对于 $t\in\left(t_0,t_1\right)$ 也成立，即

$$W(t)\le H_1(t)=M+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\omega_0(\sigma-t_0)}J\left(\left|\vartheta(\sigma)\right|\right)\mathrm{d}\sigma.\tag{5}$$

如果(5)式不成立，令 $\bar{t}=\inf\left\{t\in\left(t_0,t_1\right):W(t)>H_1(t)\right\}$，对于足够小的正数 Δt， $t\in\left(\bar{t},\bar{t}+\Delta t\right)\in\left(\bar{t},t_1\right)$ 时， $W(t)>H_1(t)$。根据定义 1 可以推出

$$D^+W(\bar{t})=\limsup_{\Delta t\to0^+}\frac{W(\bar{t}+\Delta t)-W(\bar{t})}{\Delta t}\ge\limsup_{\Delta t\to0^+}\frac{H_1(\bar{t}+\Delta t)-H_1(\bar{t})}{\Delta t}=\mathrm{e}^{\omega_0(\bar{t}-t_0)}J\left(\left|\vartheta(\bar{t})\right|\right).\tag{6}$$

令 $\bar{\tau}=\tau\left(\bar{t},x(\bar{t})\right)$，则有

$$W(\bar{t}-\bar{\tau})\le W(\bar{t}).\tag{7}$$

由条件(iv)知 $\omega_0-\dfrac{\ln\mu}{T_0}>0$，令 $\lambda_0=\omega_0-\dfrac{\ln\mu}{T_0}$。根据条件(i)和(2)式可推出

$$\begin{aligned}\bar{\tau} &\le L\alpha_1^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\omega_0(\bar{t}-t_0)}\left(M+\int_{t_0}^{\bar{t}}\mathrm{e}^{\omega_0(\sigma-t_0)}J\left(\left|\vartheta(\sigma)\right|\right)\mathrm{d}\sigma\right)\right)\\ &\le L\alpha_1^{-1}\left(M+G/\omega_0\right)<\rho,\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $G=\sup\limits_{t_0\le s\le\infty}J\left(\left|\vartheta(s)\right|\right)$。

根据条件(ii)，(iv)，(7)式和(8)式，可以推导出

$$\begin{aligned}D^+W(\bar{t}) &\le \omega_0\mathrm{e}^{\omega_0(\bar{t}-t_0)}V(\bar{t},x(\bar{t}))+\mathrm{e}^{\omega_0(\bar{t}-t_0)}\left(-\omega_1V(\bar{t},x(\bar{t}))+\omega_2V(\bar{t}-\bar{\tau},x(\bar{t}-\bar{\tau}))+J\left(\left|\vartheta(\bar{t})\right|\right)\right)\\ &<\left(\omega_0-\omega_1+\omega_2\mathrm{e}^{\omega_0\rho}\right)W(\bar{t})+\mathrm{e}^{\omega_0(\bar{t}-t_0)}J\left(\left|\vartheta(\bar{t})\right|\right)\\ &<\mathrm{e}^{\omega_0(\bar{t}-t_0)}J\left(\left|\vartheta(\bar{t})\right|\right),\end{aligned}\tag{9}$$

(9)式和(6)式矛盾，因此(5)式成立。

假设对于 $m=0,1,\cdots,k-1$，其中 $k\in\mathbb{N}$，以下不等式均成立：

$$W(t)\le\mu^mH_1(t)+H_2(t),\ t\in[t_m,t_{m+1}),\tag{10}$$

我们现在来证明不等式在 $m=k$ 时也成立，即

$$W(t)\le\mu^kH_1(t)+H_2(t),\ t\in[t_k,t_{k+1}).\tag{11}$$

根据条件(iii)和(10)式，可推导出(11)式在 $t=t_k$ 时成立。假设(11)式在 $t\in(t_k,t_{k+1})$ 时不成立，取 $\tilde{t}=\inf\left\{t\in(t_k,t_{k+1}):W(t)>\mu^kH_1(t)+H_2(t)\right\}$。采用与(6)式相似的方法，我们可以推导出

$$D^+W(\tilde{t})\ge\mathrm{e}^{\omega_0(\tilde{t}-t_0)}J\left(\left|\vartheta(\tilde{t})\right|\right).\tag{12}$$

令 $\tilde{\tau}=\tau(\tilde{t},x(\tilde{t}))$，存在 $0\le r\le k$， $r\in\mathbb{N}$，使得 $\tilde{t}-\tilde{\tau}\in[t_r,t_{r+1})$，则

$$\begin{aligned}W(\tilde{t}-\tilde{\tau}) &\le \mu^rH_1(\tilde{t}-\tilde{\tau})+H_2(\tilde{t}-\tilde{\tau})\\ &\le\mu^kH_1(\tilde{t})+H_2(\tilde{t})\\ &=W(\tilde{t}).\end{aligned}\tag{13}$$

根据条件(i)，(2)式和定义 4 可推出

$$\begin{aligned}\tilde{\tau} &\le L\alpha_1^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\omega_0(\tilde{t}-t_0)}\left(\mu^kH_1(t_k)+H_2(t_k)\right)\right)\\ &\le L\alpha_1^{-1}\left(\mu^k\mathrm{e}^{-\omega_0(\tilde{t}-t_0)}M+\mu^k\mathrm{e}^{-\omega_0(\tilde{t}-t_0)}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\mu^{-i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathrm{e}^{\omega_0(\sigma-t_0)}J\left(\left|\vartheta(\sigma)\right|\right)\mathrm{d}\sigma+\mu^{-k}\int_{t_k}^{\tilde{t}}\mathrm{e}^{\omega_0(\sigma-t_0)}J\left(\left|\vartheta(\sigma)\right|\right)\mathrm{d}\sigma\right)\right.\\ &\quad\left.+\sum_{i=1}^{k}\mu^{k-i}\mathrm{e}^{-\omega_0(\tilde{t}-t_i)}J\left(\left|\vartheta(t_i^-)\right|\right)\right)\\ &\le L\alpha_1^{-1}\left(\mu^{N_0}\mathrm{e}^{-\lambda_0(\tilde{t}-t_0)}M+\mu^{1+N_0}\sup_{t_0\le s\le\infty}J\left(\left|\vartheta(s)\right|\right)\int_{t_0}^{\tilde{t}}\mathrm{e}^{\lambda_0(\sigma-\tilde{t})}\mathrm{d}\sigma+\mu^{N_0}\sup_{t_0\le s\le\infty}J\left(\left|\vartheta(s)\right|\right)\sum_{i=1}^{k}\mathrm{e}^{-\lambda_0(\tilde{t}-t_i)}\right)\\ &\le L\alpha_1^{-1}\left(\mu^{N_0}M+\mu^{N_0}G\left(\frac{\mu T_0}{T_0\lambda_0-\ln\mu}+\frac{\mathrm{e}^{\eta\lambda_0}}{\mathrm{e}^{\eta\lambda_0}-\mu^{\eta T_0^{-1}}}\right)\right)=\rho.\end{aligned}\tag{14}$$

其中 $\tilde{t}\in(t_k,t_{k+1})$， $\eta=\inf\left\{t_k-t_{k-1},k\in\mathbb{N}\right\}>0$， $G=\sup\limits_{t_0\le s\le\infty}J\left(\left|\vartheta(s)\right|\right)$。结合条件(ii)，(iv)，(13)式，(14)式，可推导出

$$D^+W(\tilde{t})<\mathrm{e}^{\omega_0(\tilde{t}-t_0)}J\left(\left|\vartheta(\tilde{t})\right|\right),\ \tilde{t}\in(t_k,t_{k+1}),\tag{15}$$

与(12)式矛盾，则(11)式成立。

通过数学归纳法，我们得出结论：存在 $k\in\mathbb{N}$，对任意 $t\in\left[t_k,t_{k+1}\right)$，$W\left(t\right)\le\mu^k H_1\left(t\right)+H_2\left(t\right)$。即(4)式成立。

由(3)式和(4)式可知，

$$V\left(t,x\left(t\right)\right)\le\mu^K \mathrm{e}^{-\omega_0\left(t-t_0\right)}M+\Xi_1+\Xi_2, \tag{16}$$

其中：

$$\Xi_1=\mu^K \mathrm{e}^{-\omega_0\left(t-t_0\right)}\left(\sum_{i=0}^{K-1}\mu^{-i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathrm{e}^{\omega_0\left(\sigma-t_0\right)}J\left(\left|\vartheta\left(\sigma\right)\right|\right)\mathrm{d}\sigma+\mu^{-K}\int_{t_K}^{t}\mathrm{e}^{\omega_0\left(\sigma-t_0\right)}J\left(\left|\vartheta\left(\sigma\right)\right|\right)\mathrm{d}\sigma\right),$$

$$\Xi_2=\sum_{i=1}^{K}\mu^{K-i}\mathrm{e}^{-\omega_0\left(\tilde{t}-t_i\right)}J\left(\left|\vartheta\left(t_i^-\right)\right|\right).$$

化简 Ξ_1 和 Ξ_2 的表达式可得

$$\Xi_1\le\mu^{1+N_0}\mathrm{e}^{-\lambda_0\left(t-t_0\right)}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\lambda_0\left(\sigma-t_0\right)}J\left(\left|\vartheta\left(\sigma\right)\right|\right)\mathrm{d}\sigma,$$

$$\Xi_2\le\mu^{N_0}\sum_{i=1}^{K}\mathrm{e}^{-\lambda_0\left(t-t_i\right)}J\left(\left|\vartheta\left(t_i^-\right)\right|\right),$$

则(16)式可化简为

$$V\left(t,x\left(t\right)\right)\le M_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\left(t-t_0\right)}+\mu^{1+N_0}\mathrm{e}^{-\lambda_0\left(t-t_0\right)}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\lambda_0\left(\sigma-t_0\right)}J\left(\left|\vartheta\left(\sigma\right)\right|\right)\mathrm{d}\sigma+\mu^{N_0}\sum_{i=1}^{N\left(t,t_0\right)}\mathrm{e}^{-\lambda_0\left(t-t_i\right)}J\left(\left|\vartheta\left(t_i^-\right)\right|\right), \tag{17}$$

其中：$M_0=\mu^{N_0}\alpha_2\left(\left\|\xi\right\|_\gamma\right)$。由条件(i)和(17)式可推出

$$\alpha_1\left(\left|x\left(t\right)\right|\right)\le M_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\left(t-t_0\right)}+\mu^{1+N_0}\mathrm{e}^{-\lambda_0\left(t-t_0\right)}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\lambda_0\left(\sigma-t_0\right)}J\left(\left|\vartheta\left(\sigma\right)\right|\right)\mathrm{d}\sigma+\mu^{N_0}\sum_{i=1}^{N\left(t,t_0\right)}\mathrm{e}^{-\lambda_0\left(t-t_i\right)}J\left(\left|\vartheta\left(t_i^-\right)\right|\right),$$

因此，根据定义 3，系统(1)是 iISS 的。进一步地，由(17)式可以推导出

$$V\left(t,x\left(t\right)\right)\le M_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\left(t-t_0\right)}+\left(\frac{\mu^{1+N_0}}{\lambda_0}+\frac{\mu^{N_0}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda_0\eta}}\right)\sup_{t_0\le s\le\infty}J\left(\left|\vartheta\left(s\right)\right|\right),$$

根据定义 3，系统(1)是 ISS 的。令 $\lambda_0=\lambda_1+\lambda$，$\lambda_1$ 和 λ 为正常数。由(17)式可推出

$$\mathrm{e}^{\lambda\left(t-t_0\right)}V\left(t,x\left(t\right)\right)\le M_0\mathrm{e}^{-\lambda_1\left(t-t_0\right)}+\left(\frac{\mu^{1+N_0}}{\lambda_1}+\frac{\mu^{N_0}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda_1\eta}}\right)\sup_{t_0\le s\le\infty}J\left(\left|\vartheta\left(s\right)\right|\right),$$

则根据定义 4，系统(1)是 $\mathrm{e}^{\lambda t}$-ISS 的。证明结束。

注 1：定理 1 中选择 Lyapunov-Krasovskii 函数的原因如下：(1) 捕捉时滞效应：该函数能够有效地考虑系统状态的过去值对当前状态的影响，这对于分析具有状态依赖延迟的系统至关重要。(2) 处理脉冲扰动：通过结合平均脉冲间隔分析，Lyapunov-Krasovskii 函数可以评估脉冲扰动对系统稳定性的影响，从而提供一个全面的稳定性分析框架。(3) 确保 ISS 性质：该函数的设计使得能够推导出确保系统输入到状态稳定性的条件，这对于理解和控制复杂动态系统的行为具有重要意义。

上述定理证明了，在遭遇不稳定脉冲扰动时，稳定的 SDD 脉冲系统依然能够保持 ISS 动态性的充分条件。下面的定理则基于 Lyapunov 稳定性理论，构建了一套充分条件体系，旨在确保不稳定的 SDD 脉冲系统在受到稳定脉冲控制时能够实现 ISS。

定理 2 假设存在一个局部 Lipschitz 连续函数 $V:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$，函数 α_1，$\alpha_2\in K$，$0\le J\left(s\right)\le G$，常

数 $\omega_1>0$，$\omega_2>0$，$0<\mu<\dfrac{1}{\rho}<1$，$\lambda>1$，$\zeta>0$，$T>0$，$M>0$，$\tau=\tau(t,x(t))$，使得以下条件成立

(i) 对任意的 $t\ge t_0-\gamma$，有 $\alpha_1(|x(t)|)\le V(t,x(t))\le\alpha_2(|x(t)|)$；

(ii) 当 $t\ne t_k$，$k\in\mathbb{N}$ 时，

$$D^{+}V(t,x(t))\le\omega_1V(t,x(t))+\omega_2V(t-\tau,x(t-\tau))+J(|\vartheta(t)|)；$$

(iii) 当 $t=t_k$，$k\in\mathbb{N}$ 时，

$$V(t_k,x(t_k))\le\mu V(t_k^-,x(t_k^-))+(1-\mu)\int_{t_0}^{t_k^-}\mathrm{e}^{\zeta(t_k^--s)}J(|\vartheta(s)|)\mathrm{d}s；$$

(iv) $\omega_1+\omega_2\mathrm{e}^{-\zeta\tau}\le\zeta$；

(v) $\dfrac{\ln\rho}{T}>\omega_1+\omega_2\mathrm{e}^{\lambda\tau^*}+\lambda$，$T=\sup\{t_k-t_{k-1},k\in\mathbb{N}\}$，$\tau^*=L\alpha_1^{-1}(\rho M+G\mathrm{e}^{\zeta T}/\zeta)$；

则系统(1)在脉冲控制下是 ISS。

证明 构造辅助函数：

$$W(t)=\begin{cases}V(t,x(t))-\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\zeta(t-s)}J(|\vartheta(s)|)\mathrm{d}s, & t\ge t_0,\\ V(t,x(t)), & t\in[t_0-\gamma,t_0),\end{cases}\tag{18}$$

由条件(ii)和(iv)可知，对于任意 $t>t_0$

$$\begin{aligned}D^{+}W(t)&\le\omega_1V(t,x(t))+\omega_2V(t-\tau,x(t-\tau))-\zeta\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\zeta(t-s)}J(|\vartheta(s)|)\mathrm{d}s\\&\le\omega_1W(t)+\omega_2W(t-\tau)+(\omega_1+\omega_2\mathrm{e}^{-\zeta\tau}-\zeta)\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\zeta(t-s)}J(|\vartheta(s)|)\mathrm{d}s\\&<\omega_1W(t)+\omega_2W(t-\tau),\end{aligned}\tag{19}$$

由条件(iii)和(18)式可知

$$\begin{aligned}W(t_k)&=V(t_k,x(t_k))-\int_{t_0}^{t_k}\mathrm{e}^{\zeta(t-s)}J(|\vartheta(s)|)\mathrm{d}s\\&\le\mu V(t_k^-,x(t_k^-))-\mu\int_{t_0}^{t_k^-}\mathrm{e}^{\zeta(t_k^--s)}J(|\vartheta(s)|)\mathrm{d}s\\&=\mu W(t_k^-).\end{aligned}\tag{20}$$

考虑辅助函数：

$$U(t)=\begin{cases}W(t)\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}, & t\ge t_0,\\ W(t), & t\in[t_0-\gamma,t_0).\end{cases}\tag{21}$$

接下来，我们证明下述不等式成立：

$$U(t)=\rho W_0,\ \forall t\ge t_0-\gamma,\tag{22}$$

其中 $W_0=\bar{V}(t,x(t_0))=\sup\{V(s,x(s)),s\in[t_0-\gamma,t_0]\}$。

当 $t\in[t_0-\gamma,t_0)$ 时，(22)式显然成立。接下来证明(22)式在 $t\in(t_0,t_1)$ 时成立。$t=t_0$ 时，$U(t_0)=W_0$，(22)式在 $t=t_0$ 时成立。假设(22)式在 $t\in(t_0,t_1)$ 时不成立，则令 $\hat{t}=\inf\{t\in(t_0,t_1):U(t)>\rho W_0\}$。由于 $W(t)$ 在 $t\in[t_0,\hat{t})$ 是连续的，则存在 $\breve{t}=\sup\{t\in(t_0,\hat{t}):U(t)<W_0\}$，因此

$$U(t-\tau)\le\rho W_0\le\rho U(t),\ t\in[\breve{t},\hat{t}].\tag{23}$$

进一步，对于 $t\in\left[\breve{t},\hat{t}\right]$，根据条件(i)，(18)，(21)可推出 $\left|x(t)\right|=\alpha_1^{-1}\left(\rho\alpha_2\left(\left\|\xi(t)\right\|_\gamma\right)+\dfrac{e^{\zeta T}}{\zeta}\sup\limits_{t_0\le s\le\infty}J\left(\left|\vartheta(s)\right|\right)\right)$，结合(2)式可得

$$\tau\le L\alpha_1^{-1}\left(\rho M+\frac{e^{\zeta T}\cdot G}{\zeta}\right)\triangleq\tau^*, \tag{24}$$

其中 $G=\sup\limits_{t_0\le s\le\infty}J\left(\left|\vartheta(s)\right|\right)$，$T=\sup\left\{t_k-t_{k-1},k\in\mathbb{N}\right\}$，$M=\alpha_2\left(\left\|\xi(t)\right\|_\gamma\right)$。由(19)，(21)，(23)，(24)式可推导出，

$$D^+U(t)\le\left(\omega_1+\omega_2e^{\lambda\tau^*}+\lambda\right)U(t),\ t\in\left[\breve{t},\hat{t}\right]. \tag{25}$$

对(25)式积分可得，

$$\ln\rho\le\left(\omega_1+\omega_2e^{\lambda\tau^*}+\lambda\right)T, \tag{26}$$

与条件(v)矛盾，因此(22)式在 $t\in\left(t_0,t_1\right)$ 时成立。

假设对于 $m=0,1,\cdots,k-1$，其中 $k\in\mathbb{N}$，下述不等式成立：

$$U(t)\le\rho W_0,\ \forall t\in\left[t_m,t_{m+1}\right). \tag{27}$$

接下来，证明(27)式在 $t\in\left[t_k,t_{k+1}\right)$ 时也成立。由(20)式和(21)式可知 $t=t_k$ 时 $U\left(t_k\right)\le W_0$，则(27)式在 $t=t_k$ 时成立。假设(27)式在 $t\in\left(t_k,t_{k+1}\right)$ 时不成立，则令 $\hat{s}=\inf\left\{t\in\left(t_k,t_{k+1}\right):U(t)>\rho W_0\right\}$。由于 $W(t)$ 在 $t\in\left[t_k,\hat{s}\right)$ 是连续的，则存在 $\breve{s}=\sup\left\{t\in\left(t_k,\hat{s}\right):U(t)<W_0\right\}$，使得 $U(t-\tau)\le\rho W_0\le\rho U(t)$，$t\in\left[\breve{s},\hat{s}\right]$。通过与上述证明相似的论证，得出矛盾。因此(27)式在 $t\in\left[t_k,t_{k+1}\right)$ 时成立，即(22)式成立。由(18)，(21)，(22)式可推导出

$$V\left(t,x(t)\right)\le\rho W_0e^{-\lambda\left(t-t_0\right)}+\int_{t_0}^{t}e^{\zeta(t-\sigma)}J\left(\left|\vartheta(\sigma)\right|\right)d\sigma,\ t\ge t_0+\gamma, \tag{28}$$

结合条件(i)，可得

$$\alpha_1\left(\left|x(t)\right|\right)\le M_1e^{-\lambda\left(t-t_0\right)}+\frac{G\cdot e^{\zeta\left(t-t_0\right)}}{\zeta}\sup_{t_0\le s\le t}J\left(\left|\vartheta(s)\right|\right),\ t\ge t_0+\gamma, \tag{29}$$

其中 $M_1=\rho W_0$。因此，由定义 2 可知系统(1)是 ISS 的。证明结束。

4. 实例分析

本节介绍两个数值示例，以说明本文所提结果的有效性。

例 4.1 反应器作为化工生产流程中的核心组件，其温度控制机制对于确保产品质量、提升生产效率及保障生产安全具有举足轻重的地位。鉴于化学动力学过程的高度复杂性，温度的变化不仅受到即时加热与冷却条件的直接影响，还呈现出显著的时间滞后效应。此外，反应器的定期维护保养工作亦会不可避免地引入脉冲式的温度扰动。尽管如此，通过合理的外部干预与调控，操作人员依然能够实现精确的温度控制。在此，我们引入变量 $x(t)$ 来表征在时间 t 时刻的温度偏差，而 $\tau=\tau\left(t,x(t)\right)$ 则代表系统对温度变化响应的延迟时间。基于上述考虑，我们考虑以下系统模型：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=-ax(t)-bx\left(t-\tau\left(t,x(t)\right)\right)+u(t)+\vartheta(t), & t\ne t_k,\\ x\left(t_k\right)=(1-\delta)x\left(t_k^-\right)+\delta\vartheta\left(t_k^-\right), & t=t_k,\\ x(t)=\xi(t), & t\in\left[t_0-\gamma,t_0\right],\end{cases} \tag{30}$$

其中 $a>0$，$b>0$ 分别表示系统的冷却速率和延迟加热效应的强度。令系统 SDD 为 $\tau\left(t,x(t)\right)=\alpha\left|x(t)\right|$，外部扰动为 $\vartheta(t)=\sin\left(\pi t/5\right)$。参数 $\delta\in(0,1)$ 表示脉冲干扰导致的比例温度下降，模拟维护操作对温度的影

响。PID 控制器根据温度偏差计算出控制输入 $u(t)$，其计算公式为：$u(t)=K_p\left(r-x(t)\right)+K_d\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r-x(t)\right)$，$K_p$ 和 K_d 分别为 PID 控制器的比例增益和导数增益，用于调节控制器的响应速度和稳定性。其中初始温度偏差 $x_0=2$，$a=2$，$b=1$，$r=0$，$K_p=1.0275$，$K_d=0.1$，$\alpha=0.1$，$\delta=0.2$。选择 Lyapunov 函数 $V=\frac{1}{2}x(t)^2$，$\alpha_1=\frac{1}{4}x(t)^2$，$J\left(\left|\vartheta(t)\right|\right)=10\tanh\left(\left|\vartheta(t)\right|\right)$，$\omega_1=1.5$，$\omega_2=0.2$，$\mu=1.01$。选 $\eta=1.2$，计算出 $T_0=2.06$，$\rho=3.055$，$\omega_3=0.52016$。取 $\omega_0=0.3$。可证明系统(30)满足定理 1 的所有条件，即系统(30)是 ISS 的，系统通过初值的轨迹如图 1 所示。

从系统响应图 1 可见，系统自初始状态 $x_0=2$ 起响应，初期受 PID 控制器作用，输出迅速降至设定值 $r=0$。随后，系统响应因外部扰动 $\vartheta(t)=\sin\left(\pi t/5\right)$ 呈现周期性波动，且能抵抗脉冲干扰，迅速恢复并继续跟踪扰动变化，展现出良好的稳定性和鲁棒性。数值实验证实，PID 控制策略有效控制化工反应器温度，即使面临外部扰动和脉冲干扰。系统响应图验证了其动态行为稳定性。未来工作可优化 PID 参数或探索自适应、模糊控制等策略，以提升系统性能。

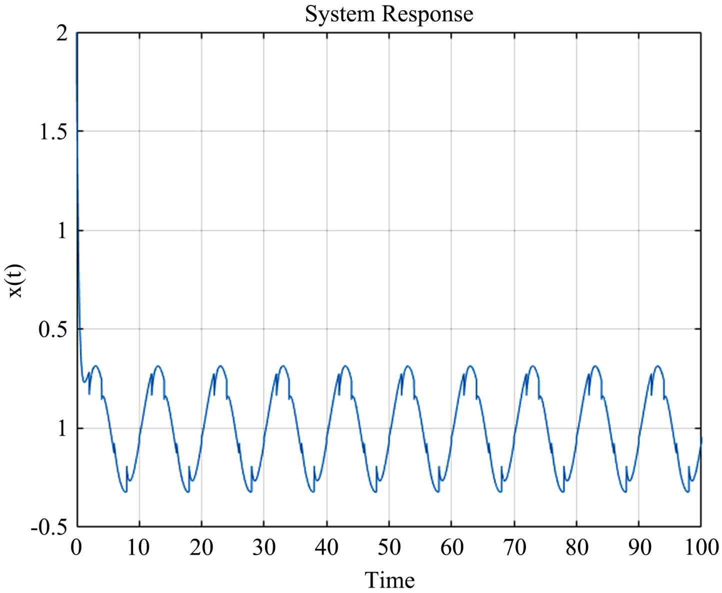

Figure 1. Trajectory of system (30)
图 1. 系统(30)的运动轨迹

例 4.2 令 $x(t)$ 表示数据包传输速率，它受信号延迟 $\tau=\tau\left(t,x(t)\right)$ 的影响。这些延迟是由数据传输过程中的网络拥塞、设备负载、处理速度和其他变量等因素引发的。为了应对这些挑战，我们提出了一个动态反馈控制模型。该模型可有效检测网络环境的变化，并动态调整数据包传输速率。具体来说，$x(t)$ 示数据包在 t 时刻的发送速率，$\tau=\tau\left(t,x(t)\right)$ 表示与状态相关的动态延迟，$\vartheta(t)$ 表示外部输入。考虑下述动态反馈控制模型：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\alpha\left(1-x(t)/K\right)x(t)+\beta x\left(t-\tau\left(t,x(t)\right)\right)+\sigma\vartheta(t), & t\neq t_k,\\ x(t_k)=x(t_k^-)+\delta\left(C-x(t_k^-)\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\beta\vartheta(t_k^-)}\right), & t=t_k,\\ x(t)=\xi(t), & t\in\left[t_0-\gamma,t_0\right],\end{cases}\tag{31}$$

其中α是系统增长因子，K是最大系统容量，β是调整因子，$\tau=\dfrac{c_1}{1+c_2x(t)}$，$\vartheta(t)=4+\sin(t)$，$\sigma$是外部输入加权系数，$\delta$是脉冲调整系数，$C$是目标发送率。模型参数为$\alpha=0.5$，$\beta=0.6$，$K=100$，$\sigma=0.1$，$c_1=4$，$c_2=0.05$，$\delta=1$，$C=1$。我们选择 Lyapunov 函数$V=x(t)^2$，初值函数$x_0=4$，$J(|\vartheta(t)|)=\mathrm{e}^{|\vartheta(t)|}+2$，$\omega_1=1.1$，$\omega_2=0.05$，$\mu=0.65$，$\zeta=1.2$。计算可得$\tau^*=2.1514$，$G=150.3945$，$T=0.14$，则系统(31)满足定理 2 的所有条件，因此系统(31)是 ISS 的，如图 2 所示。

通过数值模拟，我们观察到系统从初始发送速率$x_0=4$开始，在无脉冲控制情况下，依据逻辑斯蒂增长项与延迟反馈机制项调整状态。当施加脉冲控制时，系统按预设时间间隔调整至期望发送速率 C，实现对环境变化的快速响应。在脉冲控制下，系统维持稳定发送速率，适应网络环境变化，并能抵御由外部输入函数$\vartheta(t)=4+\sin(t)$引起的周期性波动。数值实验验证了动态反馈控制模型的有效性，脉冲控制机制尤为关键。未来可优化模型参数，或引入自适应、模糊控制等策略，提升系统性能、适应性和鲁棒性。

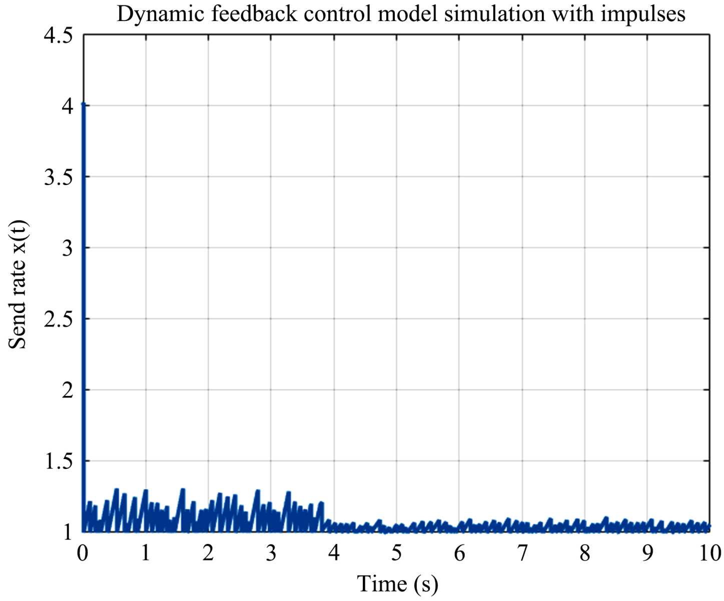

Figure 2. Trajectory of system (31)
图 2. 系统(31)的运动轨迹

5. 结论

本文通过整合 Lyapunov-Krasovskii 函数和平均脉冲间隔法，研究了 SDD 脉冲系统的 ISS 特性。研究表明，混合动力 SDD 脉冲系统能在外部输入调制和脉冲间隔约束下保持 ISS。利用 Lyapunov 理论，我们得出了评估这些系统 ISS 特性的条件。模拟证实了脉冲和外部输入在稳定 SDD 脉冲系统方面的有效性。此外，案例研究证实了我们方法的理论准确性和实际适用性。未来的工作重点是将现有模型进一步拓展，以涵盖更复杂的 SDD 脉冲系统以及多脉冲条件的场景，以及探索稳定性分析技术如何更有效地应用于解析 SDD 脉冲系统的 ISS 问题。

参考文献

[1] Richard, J. (2003) Time-Delay Systems: An Overview of Some Recent Advances and Open Problems. *Automatica*, **39**, 1667-1694. https://doi.org/10.1016/s0005-1098(03)00167-5

[2] Gao, H., Chen, T. and Lam, J. (2008) A New Delay System Approach to Network-Based Control. *Automatica*, **44**, 39-52. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2007.04.020

[3] Zhou, B. and Egorov, A.V. (2016) Time-Varying Razumikhin and Krasovskii Stability Theorems for Time-Varying Delay Systems. 2016 *Chinese Control and Decision Conference* (*CCDC*), Yinchuan, 28-30 May 2016, 1041-1046. https://doi.org/10.1109/ccdc.2016.7531137

[4] Li, H., Zhao, N. and Zhang, X. (2018) Necessary Exponential Stability Conditions for Linear Discrete Time-Delay Systems. 2018 *Chinese Control and Decision Conference* (*CCDC*), Shenyang, 9-11 June 2018, 90-95. https://doi.org/10.1109/ccdc.2018.8407111

[5] Liu, X. and Zhang, K. (2020) Input-to-State Stability of Time-Delay Systems with Delay-Dependent Impulses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **65**, 1676-1682. https://doi.org/10.1109/tac.2019.2930239

[6] Debeljkovic, D.L., Dimitrijevic, N.J., Stojanovic, S.B. and Popov, D. (2012) The Stability of Linear Discrete Time Delay Systems over a Finite Time Interval: New Results. *Proceedings of the* 10*th World Congress on Intelligent Control and Automation*, Beijing, 6-8 July 2012, 1459-1464. https://doi.org/10.1109/wcica.2012.6358109

[7] Cao, J., Stamov, G., Stamova, I. and Simeonov, S. (2021) Almost Periodicity in Impulsive Fractional-Order Reaction-Diffusion Neural Networks with Time-Varying Delays. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **51**, 151-161. https://doi.org/10.1109/tcyb.2020.2967625

[8] Hespanha, J.P., Naghshtabrizi, P. and Xu, Y. (2007) A Survey of Recent Results in Networked Control Systems. *Proceedings of the IEEE*, **95**, 138-162. https://doi.org/10.1109/jproc.2006.887288

[9] Gambell, R. (1985) Birds and Mammals—Antarctic Whales. In: *Antarctica*, Elsevier, 223-241. https://doi.org/10.1016/b978-0-08-028881-9.50022-4

[10] Chen, Y. and Zhu S. (2021) Stability Analysis of Memristor Neural Networks with State-Dependent Delay. 2021 *International Conference on Neuromorphic Computing* (*ICNC*), Wuhan, 15-17 October 2021, 221-225. https://doi.org/10.1109/ICNC52316.2021.9608243

[11] Park, J., Jung, D., Kwon, W., Han, S. and Won, S. (2015) State Dependent Disturbance Compensation Method for Motor Control System with Unknown Input Time Delay. 2015 15*th International Conference on Control*, *Automation and Systems* (*ICCAS*), Busan, 13-16 October 2015, 1474-1479. https://doi.org/10.1109/iccas.2015.7364585

[12] Ahmed, A. and Verriest, E.I. (2013) Estimator Design for a Subsonic Rocket Car (Soft Landing) Based on State-Dependent Delay Measurement. 52*nd IEEE Conference on Decision and Control*, Firenze, 10-13 December 2013, 5698-5703. https://doi.org/10.1109/cdc.2013.6760787

[13] Geranmehr, B. and Nekoo, S.R. (2015) Nonlinear Suboptimal Control of Fully Coupled Non-Affine Six-DOF Autonomous Underwater Vehicle Using the State-Dependent Riccati Equation. *Ocean Engineering*, **96**, 248-257. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2014.12.032

[14] Marin, C., Popescu, D., Petre, E. and Selisteanu, D. (2016) Mathematical Modelling of Systems with State Dependent Delays. Applications for Conveyer Belt Plants. 2016 17*th International Carpathian Control Conference* (*ICCC*), High Tatras, 29 May-1 June 2016, 479-484. https://doi.org/10.1109/carpathiancc.2016.7501145

[15] Kim, P., Bae, S. and Seok, J. (2012) Bifurcation Analysis on a Turning System with Large and State-Dependent Time Delay. *Journal of Sound and Vibration*, **331**, 5562-5580. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.07.028

[16] Al-Omari, J.F.M. (2015) The Effect of State Dependent Delay and Harvesting on a Stage-Structured Predator-Prey Model. *Applied Mathematics and Computation*, **271**, 142-153. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.08.119

[17] Magpantay, F.M.G. and Kosovalić, N. (2015) An Age-Structured Population Model with State-Dependent Delay: Dynamics. *IFAC-Papers Online*, **48**, 99-104. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.09.360

[18] Patkar, A., Meng, Q., Wang, H. and Youcef Toumi, K. (2023) Time Delay Based Neural Network Control for Systems with State-Dependent Nonlinearity. 2023 *American Control Conference* (*ACC*), San Diego, 31 May-2 June 2023, 246-251. https://doi.org/10.23919/acc55779.2023.10156225

[19] Getto, P. and Waurick, M. (2016) A Differential Equation with State-Dependent Delay from Cell Population Biology. *Journal of Differential Equations*, **260**, 6176-6200. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.12.038

[20] Zhang, S., Xu, J. and Chung, K. (2015) On the Stability and Multi-Stability of a TCP/RED Congestion Control Model with State-Dependent Delay and Discontinuous Marking Function. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **22**, 269-284. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.09.020

[21] Hartung, F., Krisztin, T., Walther, H. and Wu, J. (2006) Functional Differential Equations with State-Dependent Delays: Theory and Applications. In: *Handbook of Differential Equations*: *Ordinary Differential Equations*, Elsevier, 435-545. https://doi.org/10.1016/s1874-5725(06)80009-x

[22] Bekiaris-Liberis, N., Jankovic, M. and Krstic, M. (2012) Compensation of State-Dependent State Delay for Nonlinear Systems. *Systems & Control Letters*, **61**, 849-856. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2012.05.002

[23] Bekiaris-Liberis, N. and Krstic, M. (2013) Robustness of Nonlinear Predictor Feedback Laws to Time- and State-Dependent Delay Perturbations. *Automatica*, **49**, 1576-1590. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.02.050

[24] Li, X. and Wu, J. (2016) Stability of Nonlinear Differential Systems with State-Dependent Delayed Impulses. *Automatica*, **64**, 63-69. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.10.002

[25] Şaylı, M. and Yılmaz, E. (2016) State-Dependent Impulsive Cohen-Grossberg Neural Networks with Time-Varying Delays. *Neurocomputing*, **171**, 1375-1386. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2015.07.095

[26] Feingesicht, M., Raibaudo, C., Polyakov, A., Kerherve, F. and Richard, J. (2016) A Bilinear Input-Output Model with State-Dependent Delay for Separated Flow Control. 2016 *European Control Conference* (*ECC*), Aalborg, 29 June-1 July 2016, 1679-1684. https://doi.org/10.1109/ecc.2016.7810532

[27] Meng, W.U. and Shengxi, L. (2017) Optimal Fuzzy Control of SIR Epidemic with State Dependent Cost Function. 2017 *International Conference on Fuzzy Theory and Its Applications* (*iFUZZY*), Pingtung, 12-15 November 2017, 1-6. https://doi.org/10.1109/ifuzzy.2017.8311791

[28] Kalamian, N., Khaloozadeh, H. and Ayati, M. (2019) Design of Adaptive State-Dependent Impulsive Observer for Nonlinear Time-Delay Systems. 2019 27*th Iranian Conference on Electrical Engineering* (*ICEE*), Yazd, 30 April-2 May 2019, 885-890. https://doi.org/10.1109/iraniancee.2019.8786631

[29] Li, X. and Yang, X. (2020) Lyapunov Stability Analysis for Nonlinear Systems with State-Dependent State Delay. *Automatica*, **112**, Article 108674. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108674

[30] Xu, Z., Li, X. and Stojanovic, V. (2021) Exponential Stability of Nonlinear State-Dependent Delayed Impulsive Systems with Applications. *Nonlinear Analysis*: *Hybrid Systems*, **42**, Article 101088. https://doi.org/10.1016/j.nahs.2021.101088

[31] He, X., Li, X. and Song, S. (2022) Finite-Time Stability of State-Dependent Delayed Systems and Application to Coupled Neural Networks. *Neural Networks*, **154**, 303-309. https://doi.org/10.1016/j.neunet.2022.07.009

[32] Pei, L. and Wu, F. (2021) Periodic Solutions, Chaos and Bi-Stability in the State-Dependent Delayed Homogeneous Additive Increase and Multiplicative Decrease/Random Early Detection Congestion Control Systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, **182**, 871-887. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2020.06.001

[33] Humphries, A.R. and Magpantay, F.M.G. (2021) Lyapunov-Razumikhin Techniques for State-Dependent Delay Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, **304**, 287-325. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.09.020

[34] Zhang, X., Li, C. and Li, H. (2022) Finite-Time Stabilization of Nonlinear Systems via Impulsive Control with State-Dependent Delay. *Journal of the Franklin Institute*, **359**, 1196-1214. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2021.11.013

[35] Cui, Q., Li, L. and Wang, L. (2023) Exponential Stability of Delayed Nonlinear Systems with State-Dependent Delayed Impulses and Its Application in Delayed Neural Networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **125**, Article 107375. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107375

[36] Wu, X., Tang, Y. and Zhang, W. (2016) Input-to-State Stability of Impulsive Stochastic Delayed Systems under Linear Assumptions. *Automatica*, **66**, 195-204. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.01.002

[37] Zhang, N., Jiang, S. and Li, W. (2023) Stability of Stochastic State-Dependent Delayed Complex Networks under Stochastic Hybrid Impulsive Control. *Systems & Control Letters*, **174**, Article 105494. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2023.105494

[38] Sontag, E.D. (1989) Smooth Stabilization Implies Coprime Factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**, 435-443. https://doi.org/10.1109/9.28018

[39] Yosida, K. (2012) Functional Analysis. Springer Science & Business Media.

[40] Chen, W. and Zheng, W.X. (2009) Input-to-State Stability and Integral Input-to-State Stability of Nonlinear Impulsive Systems with Delays. *Automatica*, **45**, 1481-1488. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.02.005

[41] Hespanha, J.P., Liberzon, D. and Teel, A.R. (2008) Lyapunov Conditions for Input-to-State Stability of Impulsive Systems. *Automatica*, **44**, 2735-2744. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.03.021