Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(2), 277-286
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.152068

Hans汉斯

循环群群代数的胞腔性

王　斌

广东工业大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2025年1月5日；录用日期：2025年2月17日；发布日期：2025年2月28日

摘　要

文章主要构建了置换群群元素对应的置换矩阵在复数域上全矩阵代数的中心化子代数的胞腔基，从而说明置换群群元素对应的置换矩阵在复数域上全矩阵代数的中心化子代数是胞腔代数。文章的证明根据章节分成三部分内容，第一部分给出了胞腔代数的定义，中心化子代数的定义，以及一些符号的意义。然后第二部分根据循环群在复数域上的群代数和某些置换矩阵的中心化子代数的联系，证明了循环群在复数域上的群代数是胞腔的。文章的第三部分是根据置换群的群元素可以表示成不相交轮换的乘积，通过其置换矩阵的分块乘积，发现该中心化子的结构和循环群在复数域上的基的联系，最后根据循环群在复数域上的胞腔基构造了一般的置换矩阵在复数域上全矩阵代数的中心化子代数的胞腔基。

关键词

矩阵代数，中心化子，胞腔代数，胞腔基，群代数

Cellularity of the Group Algebra of a Cyclic Group

Bin Wang

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: Jan. 5th, 2025; accepted: Feb. 17th, 2025; published: Feb. 28th, 2025

Abstract

The article mainly constructs the cellular basis of the centralizer of the permutation matrix corresponding to the elements of the permutation group in the full matrix algebra over the complex field, thus showing that the centralizer of the permutation matrix corresponding to the elements of the permutation group in the full matrix algebra over the complex field is a cellular algebra. The proof of the article is divided into three parts according to the sections. The first part gives the definition of cellular algebra, the definition of centralizer algebra, and the meaning of some symbols. Then,

文章引用: 王斌. 循环群群代数的胞腔性[J]. 理论数学, 2025, 15(2): 277-286.
DOI: 10.12677/pm.2025.152068

the second part proves that the group algebra of the cyclic group over the complex field is cellular based on the connection between the group algebra of the cyclic group over the complex field and the centralizer algebra of some permutation matrices. The third part of the article discovers the connection between the structure of the centralizer and the basis of the cyclic group over the complex field through the block product of the permutation matrix according to the fact that the group elements of the permutation group can be expressed as the product of disjoint cycles, and then constructs the cellular basis of the centralizer of the general permutation matrix in the full matrix algebra over the complex field based on the cellular basis of the cyclic group over the complex field.

Keywords

Matrix Algebra, Centralizer, Cellular Algebra, Cellular Basis, Group Algebra

1. 引言

Kazhdan 教授和 Lusztig 教授在研究 Hecke 代数[1]的时候，构造了 Kazhdan-Lusztig 多项式和 Kazhdan-Lusztig 基，并且用相交上同调的理论重新阐述该结构[2]。Kazhdan-Lusztig 基在表示论上有良好的性质，在提出 Kazhdan-Lusztig 基的适合，他们提出了 cell 的概念，并且将之对应到了 Hecke 代数的不可约表示，并且提出了很多关于 Hecke 代数的性质的问题。Graham, J. J.和 Lehrer, G. I.受到 Kazhdan-Lusztig 基乘法和 cell 的性质的启发，提出了胞腔代数的定义[3]，并且基于胞腔代数的结构和表示，得到了其不可约表示和块理论的一般描述，为研究代数的分类和结构提供了重要工具。由于胞腔代数以及其定义的胞腔基在表示里面的良好性质，所以很多人就开始对胞腔代数进行了研究，发现很多已有的代数是胞腔的，例如在物理学的量子群有诸多应用的 Temperley-Lieb 代数和研究代数正交群的表示理论的 Brauer 代数[4]，以及常见的矩阵代数，还有某些常见的半群代数[5] [6]等等。

中心化子环在表示论和同调论里面具有重要作用，例如[7]-[12]，本文将聚焦于对称群元素的中心化子环，研究这些中心化子环的结构。

本文的主要贡献有两点：第一点是证明循环群在复数域上的群代数是胞腔的。第二点是通过循环群的胞腔基去找出置换群元素对应的置换矩阵在复数域上的矩阵代数中心化子的胞腔基。证明中找出该胞腔基的办法是很容易用计算机去实现的，与以前的表示证明办法不一样，也就是即使出了一个很复杂的置换，那么我们也能轻易通过计算机来计算出其置换矩阵再复数域上的矩阵代数的中心化子切确的基。

2. 定义

定义 2.1. (胞腔代数定义)假设 R 是一个环，A 是一个 R-代数，δ 是 A 上的一个对合，若 A 关于对合 δ 为胞腔代数，则 A 会有参数集 (I,M,C,δ) 满足以下条件：

(1) I 是一个偏序集，$\lambda\in I$ 对应一个集合 $M(\lambda)$。代数 A 有一组 R-基 $C_{s,t}^{\lambda}$，其中 $\lambda\in I$，$(s,t)\in M(\lambda)\times M(\lambda)$。

(2) δ 是 A 上的一个对合，满足 $\delta\left(C_{s,t}^{\lambda}\right)=C_{t,s}^{\lambda}$。

(3) 对于 $\forall a\in A$，$aC_{s,t}^{\lambda}=\sum_{u\in M(\lambda)}r_a(u,s)C_{u,t}^{\lambda}+r'$，其中 $r_a(u,s)\in R$，与参数 t 无关，$r'\in A$，是由 $\left\{C_{s,t}^{\mu}\mid\mu<\lambda\right\}$ 的元素所生成。

这组 R-基 $\left\{C_{s,t}^{\lambda}, \lambda \in I, (s,t) \in M(\lambda) \times M(\lambda)\right\}$ 被称为代数 A 的胞腔基。

将偏序集 I 任意的补充称为全序 $\hat{I}$，称由 $\left\{C_{s,t}^{\rho} \mid \rho \le \lambda \in \hat{I}, (s,t) \in M(\rho) \times M(\rho)\right\}$ 生成的理想 D^{λ} 组成的理想链称为胞腔理想链。

定义 2.2. 令 R 是一个环，C 是 R 的一个子集，C 在 R 的中心化子环被定义为

$$S(C,R) = \{r \in R \mid rc = cr, \forall c \in C\}\text{。}$$

假设 $C = \{c\}$，则记 $S(c,R) = S(C,R)$，称其为单因子中心化子环。

由于 $S(C,R) = \bigcap_{c \in C} S(c,R)$，所以研究单元素的中心化子环对于研究一般集合上的中心化子环极具意义的。

记 $M_n(R)$ 为 R 上的全矩阵代数，C 是 $M_n(R)$ 的非空子集，那么 $S_n(C,R) := S(C, M_n(R))$ 称为 R 上度为 n 的中心化子矩阵环，$S_n(c,R) := S(c, M_n(R))$ 称为 R 上度为 n 的单因子中心化子矩阵环，也称为 R 上度为 n 全矩阵代数的中心化子代数。

定义 2.3. 假设 G 是一个 n 阶置换群，z 是 G 里面的一个阶为 k 的元素，显然 z 可表示成一个轮换的形式，设

$$z = (z_1 z_2 \cdots z_k), \quad z_i \in ó^{+}, \quad i \in \{1, \cdots, k\}, \quad k < n+1,$$

记 n 维列向量 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 为 $\left\{(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, \cdots, (0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\right\}$，即分别为 x_i 对应下标的第 i 个位置为 1 的列向量，设 K_z 是一个 n 阶矩阵，且

$$K_z x_{z_i} = K_z x_{z_{i+1}}, \quad i \in \{1, \cdots, k\},$$

若

$$t \notin \{z_i \mid i \in \{1, \cdots, k\}\},$$

则有

$$K_z x_t = x_t\text{。}$$

则称 K_z 为置换(轮换)元素 z 所对应的置换矩阵。

3. 主要定理

定理 3.1. 假设 $c \in G_n$ 是一个无重复元素的轮换，即 $c = (a_1 a_2 \cdots a_n), a_i \ne a_j$，其中 $i \ne j$，$i, j \in \{1, \cdots, n\}$，记 $\mathbb{C}$ 为复数域，$M_{\mathbb{C}}$ 是复数域上的矩阵代数。那么 $S_n(c, \mathbb{C})$ 就是 n 阶循环群的在复数域上的群代数。

证明：不妨设循环群生成元的置换矩阵如下

$$K_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n*n},$$

记

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

是置换文字 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所对应的向量，A_c 对向量的左乘即等价于循环群对相应文字的作用。

假设中心化子的矩阵基为

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}_{n*n}。$$

由于 $K_cB=BK_c$，可以得到

$$b_{k,1}=\cdots=b_{n,n-k}=b_{1,n-(k-1)}=\cdots=b_{k-1,n},k=\{1,\cdots,n\},$$

不妨设 $b_{k,1}=c_k$，则有

$$B=\begin{bmatrix} c_1 & c_n & \cdots & c_3 & c_2 \\ c_2 & c_1 & \cdots & c_4 & c_3 \\ c_3 & c_2 & \cdots & c_5 & c_4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_2 & c_1 \end{bmatrix}_{n*n},$$

即

$$B=c_1K_c^0+c_2K_c^1+\cdots+c_nK_c^{n-1},$$

对应着循环群的 n 个置换矩阵在复数域上张成的空间，所以在同构意义下有 $S_n(c,\mathbb{C})=\mathbb{C}[G_n]$。

定理 3.2. 假设 c 是循环群 G_n 的 n 阶元，n 阶循环群在复数域上的群代数 $\mathbb{C}[G_n]$ 是胞腔代数。

证明：循环群可以写成置换矩阵的形式，其生成元 $c=(123\cdots n)$ 的置换矩阵如下

$$K_c=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n*n},$$

记

$$x_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,x_n=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

是循环群的置换矩阵对应的向量。由 K_c 的特征多项式为 $|\lambda I-K_c|=\lambda^n-1=0$，可得到 n 个不同的特征值 $x=\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}},k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$。所以存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}K_cP=\Lambda$，其中 Λ 是一个以 K_c 所有特征值为对角线上元素的对角矩阵。

假设矩阵集合 $T=\{M\in M_{\mathbb{C}}\mid MK_c=K_cM\}$，根据定理 3.1.和 $S_n(c,\mathbb{C})$ 的定义有 $T=S_n(c,\mathbb{C})=\mathbb{C}[G_n]$。

令 $M\in T$ 且 $N=P^{-1}MP$，由于 $P^{-1}K_cP=\Lambda$，则有

$$N\Lambda=P^{-1}MPP^{-1}K_cP=P^{-1}K_cMP=P^{-1}K_cPP^{-1}MP=\Lambda N。$$

记 $K=\{N\mid N\Lambda=\Lambda N\}$，那么我们可以来证明集合 K 的元素的结构，对于 $N\in K$，我们假设

$$N=\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix},$$

因为 $N\Lambda=\Lambda N$，所以

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{0\pi}{n}}d_{11} & \cdots & \mathrm{e}^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{i\frac{0\pi}{n}}d_{n1} & \cdots & \mathrm{e}^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}d_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{0\pi}{n}}d_{11} & \cdots & \mathrm{e}^{i\frac{0\pi}{n}}d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}d_{n1} & \cdots & \mathrm{e}^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}d_{nn} \end{bmatrix},$$

对于 d_{fg} 元素，需要满足

$$\mathrm{e}^{i\frac{2(g-1)\pi}{n}}d_{fg}=\mathrm{e}^{i\frac{2(f-1)\pi}{n}}d_{fg}，\quad f,g\in\{1,\cdots,n\}。$$

当 $f\neq g$ 时，有 $d_{fg}=0$，可以得到集合 K 的元素 N 是对角矩阵。对于任意的 $\alpha,\beta\in T,k\in\mathbb{C}$，有

$$P^{-1}(\alpha+\beta)P=P^{-1}\alpha P+P^{-1}\beta P，$$

$$P^{-1}k\alpha P=kP^{-1}\alpha P。$$

因此 K 与 T 是同构的，有 $P^{-1}TP=K$。

由于 T 是循环群的群代数，可知 T 是 n 维的，而矩阵代数 $K=\{N\mid N\Lambda=\Lambda N\}$ 基的数量也为 n。记 N_i 为对角线第 i 个位置不为 0，其余位置取 0 的矩阵，N_i 如下

$$N_i=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & n_{ii} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n*n}，\quad n_{ii}\neq 0，\quad i\in\{1,\cdots,n\}。$$

因为 $N_i\Lambda=\Lambda N_i$，K 是 n 维代数，$\{N_i,i\in\{1,\cdots,n\}\}$ 是线性无关的，所以 N_i 构成 K 的一组基，易证这组基关于恒等变换 $\delta(N_i)=N_i$ 是胞腔的，即令 $\{C_{1,1}^i=n_{ii}\mid i\in\{1,\cdots,n\}\}$，我们有

$$C_{1,1}^iC_{1,1}^j=0，\quad i\neq j。$$

记 $M_i=PN_iP^{-1}$，$i\in\{1,\cdots,n\}$，那么 M_i 也构成 T 的一组基。由于 $\delta(N_i)=N_i$，则 $\delta(M_i)=M_i$，记 $D_i'\simeq\mathbb{C}[N_i]$，$i\in\{1,\cdots,n\}$，$D_0'=0$，显然 K 可作分解

$$K\simeq D_1'\oplus\cdots\oplus D_n'，$$

其中 $\delta(D_i')=D_i'$。记

$$D_i=\mathbb{C}[N_1]\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}[N_i]\simeq D_1'\oplus\cdots\oplus D_i'，\quad i\in\{1,\cdots,n\}，\quad D_0=0，$$

这样就可以得到 K 的一条理想链

$$D_0=0\subseteq D_1\subseteq D_2\subseteq\cdots\subseteq D_n=K。$$

因为 $N_iN_j=0,i\neq j$，所以 $\{N_i\mid i\in\{1,\cdots,n\}\}$ 是 K 的一组胞腔基，这样我们就得到了 K 关于恒等映射是胞腔代数。

由 T 和 K 是同构的，$T=PKP^{-1}$，定义 B_i' 和 B_i，如下

$$B_0'=0，\quad B_i'\simeq P\mathbb{C}[N_i]P^{-1}，\quad i\in\{1,\cdots,n\}，$$

以及 $B_0=0$，且对 $i\in\{1,\cdots,n\}$，

$$B_i = P\mathbb{C}\left[N_1\right]P^{-1} \oplus \cdots \oplus P\mathbb{C}\left[N_i\right]P^{-1} \simeq B_1' \oplus \cdots \oplus B_i'\text{。}$$

于是，B_i 是 T 的一条理想链，$0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n$，而且 $\delta\left(B_i'\right) = B_i'$，所以 T 关于恒等映射 δ 是胞腔代数，$\left\{M_i \mid i \in \{1,\cdots,n\}\right\}$ 是 T 的一组胞腔基。

命题 3.3. 上述方式构建的胞腔代数，对应第一层的 M_1 可以为全一矩阵。

证明：由于 1 是 K_c 的一个特征值，对应特征向量为 $a_1 = (1 \quad \cdots \quad 1)^{\mathrm{T}}$，不妨设 Λ 的第一个元素 1，假设

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix},\quad P^{-1} = \begin{bmatrix} p_{11}' & \cdots & p_{1n}' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}' & \cdots & p_{nn}' \end{bmatrix}$$

由于 $K_c P = P\Lambda$，$K_c P$ 为矩阵 P 所有行往下移一行，即

$$\begin{bmatrix} p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \\ p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{(n-1)1} & p_{(n-1)2} & \cdots & p_{(n-1)n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{0\pi}{n}} p_{11} & \mathrm{e}^{i\frac{2(2-1)\pi}{n}} p_{12} & \cdots & \mathrm{e}^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} p_{1n} \\ \mathrm{e}^{i\frac{0\pi}{n}} p_{21} & \mathrm{e}^{i\frac{2(2-1)\pi}{n}} p_{22} & \cdots & \mathrm{e}^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{i\frac{0\pi}{n}} p_{n1} & \mathrm{e}^{i\frac{2(2-1)\pi}{n}} p_{n2} & \cdots & \mathrm{e}^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} p_{nn} \end{bmatrix}$$

得到 P 的第一列为

$$p_{11}(1 \quad \cdots \quad 1)^{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

同理由 $P^{-1}A_n = \Lambda P^{-1}$，得到 P^{-1} 的第一行为

$$p_{11}'(1 \quad \cdots \quad 1)\text{。} \tag{2}$$

可以得到 T 胞腔基 M_1 的矩阵

$$M_1 = PN_1P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\text{。}$$

得到循环群在复数域上的胞腔基之后，就可以通过该胞腔基去构建复数域中对称群 Σ_n 元素 c 在矩阵代数 $M_{\mathbb{C}}$ 的中心化子矩阵代数 $S_n(c,\mathbb{C})$ 的胞腔基。

定理 3.4. $\forall x \in \Sigma_n$，$\mathbb{C}$ 是复数域，$M_{\mathbb{C}}$ 是复数域上的矩阵代数。那么 $S_n(x,\mathbb{C})$ 存在胞腔基。

证明：由对称群的性质可知，对称群的元素能够变换成不相交轮换的乘积，假设置换群的元素为

$$x = \left(f_{1,1} f_{1,2} \cdots f_{1,k_1}\right)\left(f_{2,1} f_{2,2} \cdots f_{2,k_2}\right)\cdots\left(f_{t,1} f_{t,2} \cdots f_{t,k_t}\right)\text{，其中 } k_t, t \in \mathbb{Z}\text{。}$$

不妨把文字 x 记为

$$x = (12\cdots k_1)\left((k_1+1)(k_1+2)\cdots(k_1+k_2)\right)\cdots\left(\left(\sum_{i=1}^{t-1} k_i + 1\right)\left(\sum_{i=1}^{t-1} k_i + 2\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{t} k_i\right)\right),$$

记 K_i 是 $\left(f_{i,1} f_{i,2} \cdots f_{i,k_i}\right)$ 的置换矩阵，那么 x 的置换矩阵 K_x 就为分块矩阵，主对角线上块的阶数依次为 $k_1, k_2, \cdots, k_t$，非对角线上的块为零矩阵，即

$$K_x = \begin{bmatrix} K_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K_t \end{bmatrix},$$

其中 K_i 是 k_i 阶循环群的生成元对应的置换矩阵，阶数为 k_i， $i\in\{1,\cdots,t\}$ 。

假设 $T=\{A\,|\,AK_x=K_xA\}$，记 $\mathbb{C}[T]$ 是其 $\mathbb{C}$ -线性生成的代数，下面我们探究满足条件 $AK_x=K_xA$ 的矩阵 A 的结构。对于 $\forall A\in T$，用和 K_x 相同的分块方式，将 A 的分块矩阵记为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{t1} & \cdots & a_{tt} \end{bmatrix},$$

其中

$$a_{ij}=\begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1k_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k_i1} & \cdots & v_{k_ik_j} \end{bmatrix}_{k_i*k_j} \in M_{k_i*k_j}(\mathbb{C}),\quad i,j\in\{1,\cdots,t\}。$$

由于 $AK_x=K_xA$， $a_{jj}K_j=K_ja_{jj}$，其中 $j=\{1,\cdots,k\}$。记 k_j 阶循环群 G_{k_j} 的生成元为 c_{k_j}，显然 a_{jj} 满足 $S_{k_j}\left(c_{k_j},\mathbb{C}\right)$ 的定义，则 $a_{jj}\in S_{k_j}\left(c_{k_j},\mathbb{C}\right)$，即 $a_{jj}\in\mathbb{C}\left[G_{k_j}\right]$。当 $m\neq n$ 时，有 $K_ma_{mn}=a_{mn}K_n$，分别对应行的上移和列的左移如下：

$$\begin{bmatrix} v_{21} & \cdots & v_{2k_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{11} & \cdots & v_{1k_n} \end{bmatrix}_{k_m*k_n}=\begin{bmatrix} v_{12} & \cdots & v_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k_m2} & \cdots & v_{k_m1} \end{bmatrix}_{k_m*k_n},$$

所以

$$a_{mn}=v_{11}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{k_m*k_n},$$

令

$$z=v_{11},\quad b_{mn}=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{k_m*k_n},$$

则

$$a_{mn}=zb_{mn}。$$

记矩阵 $\Lambda_{m,j}$ 为

$$\Lambda_{m,j}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \mathrm{e}^{i\frac{2j\pi}{k_m}} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{k_m,k_m},\quad j=\{0,\cdots,k_m-1\},$$

假设 Λ_m 是第 m 个置换矩阵的特征值矩阵， $P_mK_mP_m^{-1}=\Lambda_m$， P_m 是 K_m 到 Λ_m 的相似变换矩阵。

记 A_{mn} 第 m 行 n 列的块为 b_{mn}，其他位置的块为零矩阵如下

$$A_{mn}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & b_{mn} & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{t*t},\quad m\neq n,\quad m,n\in\{1,\cdots,t\}。$$

根据定理 3.2，可以得到 k_m 阶循环群的群代数胞腔基为 $\left\{M_{m,i} = P_m \Lambda_{m,i} P_m^{-1} \mid i = 1,\cdots,k_m\right\}$。记

$$b_{mm}^i = M_{m,i},\quad i \in \left\{1,\cdots,k_m\right\}。$$

由命题 3.3 的结论，可以设 b_{mm}^1 为 k_m 阶全 1 矩阵。

定义 A_{mm} 是对角线上第 m 块为全一矩阵 b_{mm}^1 的分块矩阵，其余分块位置为 0 的矩阵，即

$$A_{mm} = A_{mm}^1 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & b_{mm}^1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{t*t},\quad m \in \left\{1,\cdots,t\right\},$$

为了方便，记 $A_{mm} = A_{mm}^1$。令 A_{mm}^i 是对角线上第 m 块为矩阵 b_{mm}^i 的分块矩阵，即

$$A_{mm}^i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & b_{mm}^i & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{t*t},\quad i \in \left\{2,\cdots,k_m\right\},\quad m \in \left\{1,\cdots,t\right\}。$$

取 $A = \left(a_{jj}\right)_{t*t}$ 是 T 中的任意元素，分块如上述所取，则有

$$AA_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1m}b_{mn} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{mm}b_{mn} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{tm}b_{mn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & z_{1m}k_m b_{mn} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{mm}b_{mn} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z_{tm}k_m b_{mn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}。$$

定义 L 是对角线上第 m 块为矩阵 $a_{mm}b_{mn}$ 的分块矩阵，即

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{mm}b_{mn} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{t*t},$$

则

$$AA_{mn} = z_{1m}k_m A_{1n} + \cdots + z_{(m-1)m}k_m A_{1n} + z_{(m+1)m}k_m A_{(m+1)n} + \cdots + z_{tm}k_m A_{tn} + L,\quad k_m \in \mathbb{C}。$$

因为 $a_{mm} \in \mathbb{C}\left[G_{k_m}\right]$，

$$a_{mm} = \sum t_i b_{mm}^i,\quad t_i \in \mathbb{C},\quad i \in \left\{1,\cdots,k_m\right\},$$

为了方便记 $A_{mm} = A_{mm}^1$，因为 b_{mn} 的列向量为置换矩阵 K_m 对应特征值 1 的特征向量，所以

$$K_m b_{mn} = P_m \Lambda_m P_m^{-1} b_{mn} = b_{mn},$$

由 2.3 的证明中的公式(1) (2)又存在 $f \in \mathbb{C}$，满足

$$P_m \Lambda_{m,1} P_m^{-1} b_{mn} = f b_{mn}, \tag{3}$$

$f = k_m p_{11}^m p_{11}^{m'}$，其中 p_{11}^m 和 $p_{11}^{m'}$ 分别为 P_m 的第一列元素和 P_m^{-1} 的第一行元素的公因子。所以有

$$b_{mm}^i b_{mn} = P_m \Lambda_{m,i} P_m^{-1} b_{mn} = P_m \Lambda_{m,i} \Lambda_{m,1} P_m^{-1} b_{mn},$$

注意到当 $i \neq 1$ 时，$\Lambda_{m,i}\Lambda_{m,1} = 0$，所以

$$b_{mm}^i b_{mn} = \begin{cases} f b_{mn}, i = 1, \exists t \in \mathbb{C} \\ 0, i \neq 1 \end{cases}, i \in \left\{1,\cdots,k_m\right\},$$

于是有

$$a_{mm}b_{mn}=t_1 fb_{mn}\text{。} \tag{4}$$

所以我们可以得到

$$AA_{mn}=z_{1m}k_mA_{1n}+\cdots+z_{(m-1)m}k_mA_{(m-1)n}+t_1 fA_{mn}+z_{(m+1)m}k_mA_{(m+1)n}+\cdots+z_{tm}k_mA_{tn}\text{。}$$

定义 $m_h\in\{1,\cdots,t\}$ 使得 m_h 满足

$$\sum_{i=1}^{m_h-1}k_i\le h\le\sum_{i=1}^{m_h}k_i\text{。}$$

然后就可以开始构造胞腔基，记

$$k_0=0,$$

$$C_{i,j}^1=A_{ij},\quad i,j\in\{1,\cdots,t\},$$

$$C_{i,i}^h=A_{m_hm_h}^{h-\sum_{j=0}^{m_h-1}k_j+1},\quad i\in\{1\}, \tag{5}$$

其中 $m_h\in\{1,\cdots,t\}$， $h\in\left\{2,\cdots,\sum_{i=1}^t k_i\right\}$。

定义

$$C^1=\left\{C_{i,j}^1\mid i,j\in\{1,\cdots,t\}\right\},$$

以及任意的 $\lambda\in\left\{2,\cdots,\sum_{i=1}^t k_i\right\}$，令

$$C^\lambda=\left\{C_{1,1}^\lambda\right\}\text{。}$$

令 $\delta\left(C_{i,j}^\lambda\right)=C_{j,i}^\lambda$，下面来定义胞腔理想链，首先，假设 $D_0=0$，且任意的 $\lambda\in\left\{1,\cdots,\left(\sum_{i=1}^t k_i\right)\right\}$，定义

$$D_\lambda=\mathbb{C}\left[C^\lambda\right]\text{。}$$

我们来验证相关的事实。

由 AA_{mn} 的乘积，我们注意到，对于 $\forall g,h,m,n\in\{1,\cdots,t\}$， $i\in\left\{1,\cdots,k_g\right\}$， $j\in\left\{1,\cdots,k_h\right\}$， $\exists c_g,c_h\in\mathbb{C}$，

$$A_{gg}^iA_{mn}=c_gA_{mn},$$

再利用(3)和(4)，可以得到

$$A_{mn}A_{hh}^j=c_hA_{mn},$$

并且当 $i\ne j$ 或 $g\ne h$ 时，

$$A_{gg}^iA_{hh}^j=0\text{。}$$

再利用(4)，得到

$$C_{1,1}^{i+1+\sum_{j=0}^{g-1}k_j}C_{m,n}^1=c_gC_{m,n}^1,$$

$$C_{m,n}^1C_{1,1}^{i+1+\sum_{j=0}^{g-1}k_j}=c_hC_{m,n}^1\quad\left(<i+1+\sum_{j=0}^{g-1}k_j\right),$$

且当 $i\ne j$ 或 $g\ne h$ 时，

$$C_{1,1}^{i+g-1+\sum_{j=0}^{g-1}k_j}C_{1,1}^{i+h-1+\sum_{j=0}^{h-1}k_j}=0\text{。}$$

所以这组基满足胞腔运算法则， $D_0\subset D_1\subset\cdots\subset D_{\sum_{i=1}^t k_i}$ 构成一条胞腔理想链。

综上， $S_n(c,\mathbb{C})$ 关于上述对合是胞腔的。

另外，取 $S_n(c,\mathbb{C})$ 的元素 $c=(123)\in S_3$，那么 $S_n(c,\mathbb{C})$ 就是循环群的群代数 $S_n(c,\mathbb{C})=\mathbb{C}[G_3]$，由于三阶循环群群代数在实数域上不是胞腔代数，所以 $S_n(c,\mathbb{C})$ 在复数域上是胞腔代数，但是在实数域上不是胞腔代数。

参考文献

[1] Kazhdan, D. and Lusztig, G. (1979) Representations of Coxeter Groups and Hecke Algebras. *Inventiones Mathematicae*, **53**, 165-184. https://doi.org/10.1007/bf01390031

[2] Kazhdan, D. and Lusztig, G. (1981) Schubert varieties and Poincaré duality. *Astérisque*, **101-102**, 207-224.

[3] Graham, J.J. and Lehrer, G.I. (1996) Cellular algebras. *Inventiones Mathematicae*, **123**, 1-34. https://doi.org/10.1007/bf01232365

[4] Wilcox, S. (2007) Cellularity of Diagram Algebras as Twisted Semigroup Algebras. *Journal of Algebra*, **309**, 10-31. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.10.016

[5] East, J. (2006) Cellular Algebras and Inverse Semigroups. *Journal of Algebra*, **296**, 505-519. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.04.027

[6] Guo, X. and Xi, C. (2009) Cellularity of Twisted Semigroup Algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **213**, 71-86. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2008.05.004

[7] Xi, C. and Zhang, J. (2021) Structure of Centralizer Matrix Algebras. *Linear Algebra and Its Applications*, **622**, 215-249. https://doi.org/10.1016/j.laa.2021.03.034

[8] Weaver, J.R. (1985) Centrosymmetric (Cross-Symmetric) Matrices, Their Basic Properties, Eigenvalues, and Eigenvectors. *The American Mathematical Monthly*, **92**, 711-717. https://doi.org/10.1080/00029890.1985.11971719

[9] Weyl, H. (1939) The Classical Groups. Their Invariants and Representations. Princeton University Press.

[10] Xi, C. (2019) Frobenius Bimodules and Flat-Dominant Dimensions. *Science China Mathematics*, **64**, 33-44. https://doi.org/10.1007/s11425-018-9519-2

[11] Xi, C. and Xiang, D. (2003) Cellular Algebras and Cartan Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **365**, 369-388. https://doi.org/10.1016/s0024-3795(02)00411-1

[12] Xi, C. and Yin, S. (2020) Cellularity of Centrosymmetric Matrix Algebras and Frobenius Extensions. *Linear Algebra and Its Applications*, **590**, 317-329. https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.01.002