Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(2), 39-48
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.152044

基于改进比例反失效率模型有限混合总体的随机性质

郭丽娜

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年12月29日；录用日期：2025年2月8日；发布日期：2025年2月20日

摘 要

在大数据时代，总体往往呈现出显著的异质性特点。本文借助混合模型来刻画了多个同质个体构成总体的异质性。我们基于改进比例反失效率模型的参数来体现种群中的信息，探讨了改进比例反失效率模型构成有限混合模型的统计性质，结合矩阵链优序或向量的优化序和T转换矩阵，研究了有限混合模型参数和混合比例的随机性质，给出了两组异质有限混合总体普通随机序成立的充分条件，丰富了异质有限混合总体的随机比较理论。

关键词

有限混合模型，改进比例反失效率模型，随机序，链优序

Stochastic Properties of Finite Mixture Population Based on the Modified Proportional Reversed Hazard Rate Model

Lina Guo

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Dec. 29th, 2024; accepted: Feb. 8th, 2025; published: Feb. 20th, 2025

Abstract

With the advent of the big data era, populations frequently display distinct heterogeneity characteristics. This paper uses mixture models to characterize the heterogeneity of populations composed of multiple homogeneous individuals. Based on the parameters of a modified proportional reversed hazard rate model, we incorporate information from the population and explore the

文章引用: 郭丽娜. 基于改进比例反失效率模型有限混合总体的随机性质[J]. 理论数学, 2025, 15(2): 39-48.
DOI: 10.12677/pm.2025.152044

statistical properties of a finite mixture model formed by the modified proportional reversed hazard rate model. By combining matrix chain optimization or the optimization sequence of vectors with the T-transformation matrix, we study the stochastic properties of the finite mixture model's parameters and mixing proportions. Sufficient conditions for the establishment of ordinary stochastic order for two heterogeneous finite mixture populations are provided, enriching the theory of stochastic comparisons for heterogeneous finite mixture populations.

Keywords

Finite Mixture Model, Modified Proportional Reversed Hazard Rate Model, Stochastic Order, Chain Majorization Order

1. 引言

有限混合模型在可靠性理论、生存分析的许多领域都有应用，是建模异质性的有效工具。在许多应用中，数据通常来自于两个或多个异质亚种群的混合种群，见 Amini-Seresht 和 Zhang Y (2017) [1]。换句话说，有限混合模型代表的数据集具有多个以不同比例组合的分布。例如，制造的工程项目由于不同的原因，如生产过程中使用的资源和部件的质量、原材料的质量、人为错误、不同的工作轮班、环境条件等，生产的项目往往有不同的寿命分布。当这些项目混合时，它们会导致异质种群，见 Finkelstein (2008) [2]和 Cha 和 Finkelstein (2013) [3]，在这方面，有限混合模型可以用于建模由有限数量的异质亚种群产生的寿命数据。

设 $\boldsymbol{X}=\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$ 为 n 个随机变量的向量，其边际分布函数、边际生存函数和边际概率密度函数分别定义为 $F_X(\cdot)$、$\bar{F}_X(\cdot)$ 和 $f_X(\cdot)$。假设我们有 n 个齐次无穷单位子群，X_i 表示第 i 个子群中一个单位的寿命，$i=1,2,\cdots,n$。设 $C(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})$ 是一个随机变量，代表从这 n 个子群中提取的单位混合，其分布函数、生存函数和密度函数表达为

$$F_{C_n(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})}(x)=\sum_{i=1}^{n}p_iF_{X_i}(x),\quad \bar{F}_{C_n(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})}(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i\bar{F}_{X_i}(x),\quad f_{C_n(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})}(x)=\sum_{i=1}^{n}p_if_{X_i}(x),$$

其中，混合比例 $p_i(>0)$，$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，第 i 个混合比例表示第 i 个单位所占总体混合的比例。在通过随机序研究混合模型的过程中，Hazra 和 Finkelstein (2018) [4]讨论了使用多元链优序的概念来研究两种有限混合的随机比较，其中相应的随机变量遵循比例失效率(PHR)、比例反失效率(PHR)或加速寿命模型。Albabtain 等(2020) [5]研究表明，有限混合模型在威布尔分布下的随机比较是通过调整不同的权重函数来进行的。Barmalzan 等(2022) [6]通过优化序探讨了混合指数分布的星、凸变换、扩散、右扩散和平均剩余寿命序。Barmalzan 等(2022) [7]发现，在链优化序下的两种有限混合的普通随机、失效率和反失效率序。Panja 等(2022) [8]推导出了两个有限混合模型的一些随机比较结果，其中相应的随机变量遵循比例概率(PO)、失效率和反失效率模型。Nadeb 和 Torabi (2022) [9]在向量优化的意义上研究了有限混合模型的普通随机、失效率、反失效率、似然比和扩散序。Shojaee 和 Babanezhad (2023) [10]证明了在一般随机序、上正序、弱失效率序和似然比序意义上的随机比较。Bhakta 等(2023) [11]讨论了在优化条件下对具有

inverted-Kumaraswamy 分布的两种有限混合模型的随机比较。Bhakta 等(2024) [12]通过优化、p-较大优化、相互优化和链优化序，对一般分布族的有限混合模型进行了随机比较。在研究随机序的过程中，Yan 等(2021) [13]讨论了相干系统中相关性的最优分配。Zhang 等(2023) [14]分析了具有受随机冲击影响的相依异质元件的故障安全系统的可靠性。Zhang 等(2023) [15]证明了相协系统中关联分配策略的随机比较。Lu 等(2023) [16]讨论了具有统计相关子系统的相协系统的最优分配。Zhang 等(2023) [17]做了相依异质保险组合的最大索赔金额的随机比较。Guo 等(2024) [18]研究了相依异质随机变量的二大次序统计量的随机比较。Zhang 等(2024) [19]讨论了在阈值模型下相关资产的资本配置的增凸序。

在实际情况下，寿命数据通常有不同的反失效率形状。因此，我们需要一个分布，它应该有相当大的灵活性，这有助于对可靠性和寿命数据的灵活建模，并服务于模型选择和评估的目的。Balakrishnan 等(2018) [20]定义了一种新的分布，称为改进比例反失效率(MPRHR)模型。MPRHR 可以更好地处理传统模型所面临的异构性和不确定性。一个随机变量 X 遵循倾斜参数 α，改进比例反失效率 λ 的 MPRHR 模型，模型的生存函数表示为

$$\bar{F}(x;\alpha,\lambda)=\frac{1-F^{\lambda}(x)}{1-\bar{\alpha}F^{\lambda}(x)}\quad x,\lambda,\alpha\in\mathcal{R}^{+},\quad \bar{\alpha}=1-\alpha. \tag{1}$$

本文将改进比例反失效率模型作为有限混合的基函数，形成新的混合模型，即本文要研究的新的混合模型。我们通过向量矩阵的链优化来研究有限混合模型的普通随机序。在研究混合模型普通随机序的过程中，分为两种情况进行研究，一种是当混合比例和倾斜参数发生变化时研究有限混合模型，另一种是当混合比例和改进比例反失效率发生变化时研究有限混合模型。

在本文中，我们针对改进比例反失效率模型的有限混合进行随机比较。在第 2 章，基于要研究的模型，介绍了一些基本的定义，在第 3 章，讨论了两种情况下的普通随机序，在第 4 章，对本文做总结。

2. 预备知识

在本节中，我们将介绍一些重要的基本定义和引理。设 X 和 Y 是两个非负连续随机变量，分别具有分布函数 $F_X(t)$、$F_Y(t)$，密度函数 $f_X(t)$、$f_Y(t)$，和生存函数 $\bar{F}_X(t)=1-F_X(t)$、$\bar{F}_Y(t)=1-F_Y(t)$。此外，我们使用“$a\overset{\text{sgn}}{=}b$”表示等号两边符号相同。

定义 1. 设 X 和 Y 为两个绝对连续的随机变量，若对于 $\forall t\in R$，$\bar{F}_X(t)\le\bar{F}_Y(t)$ 都成立，则称 X 在普通随机序下小于 Y (记作 $X\le_{\text{st}}Y$)。

定义 2. 设 $a_{(1)}\le a_{(2)}\le\cdots\le a_{(n)}$ 和 $b_{(1)}\le b_{(2)}\le\cdots\le b_{(n)}$ 是向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的递增排列，如果对于任意 $i=1,2,\cdots,n-1$，都有 $\sum_{i=1}^{n}a_{(i)}=\sum_{i=1}^{n}b_{(i)}$ 且 $\sum_{i=1}^{j}a_{(i)}\le\sum_{i=1}^{j}b_{(i)}$，则称 $\boldsymbol{a}$ 在优化序下大于 $\boldsymbol{b}$ (记作 $\boldsymbol{a}\overset{m}{\succeq}\boldsymbol{b}$)。

关于随机序和优化序及其应用更详细的讨论，请参阅 Shaked 等(2007) [21]和 Marshall 等(1979) [22]。

任何 T 转换矩阵具有以下的格式：

$$T=\omega I_n=(1-\omega)\Pi_n$$

其中 $0\le\omega\le1$，Π_n 是一个置换矩阵，I_n 是一个单位矩阵，如果 $\Pi_1=\Pi_2$，则称 $T_1=\omega_1 I_n+(1-\omega_1)\Pi_1$ 和 $T_2=\omega_2 I_n+(1-\omega_2)\Pi_2$ 是具有相同结构的两个矩阵。众所周知，具有相同结构的 T 转换矩阵的有限积也是 T 转换矩阵，而如果它的元素不具有相同的结构，则该有限积可能不是 T 转换矩阵，参考 Balakrishnan 等(2014) [23]。

定义 3. 考虑 $m\times n$ 阶矩阵 $A=\{a_{ij}\}$ 和 $B=\{b_{ij}\}$，行分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_m$。分别地

(i) 如果$\boldsymbol{a}_i \overset{m}{\succeq} \boldsymbol{b}_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$，称矩阵 A 在行优化下大于的矩阵 B (记作 $A >^{row} B$)；

(ii) 如果存在一个 $m\times n$ 阶 T 转换矩阵 $T_1,T_2,\cdots,T_k$，使得 $B = AT_1T_2\cdots T_k$，称矩阵 A 在链优序下大于矩阵 B(记作 $A \gg B$)。

关于矩阵优化更详细的讨论，请参阅 Marshall 等(1979) [22]。

定义 4. [Marshall 等(1979) [22]]一个定义在集合 $\mathbb{A}\subseteq\mathbb{R}$ 上的实值函数 ϕ，如果

$$\boldsymbol{a} \overset{m}{\succeq} \boldsymbol{b} \Rightarrow \phi(\boldsymbol{a}) \ge \phi(\boldsymbol{b}) \text{ 对任意 } \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{A} \text{。}$$

则称 ϕ 在 $\mathbb{A}$ 上是舒尔凸(舒尔凹)。

引理 1. [Barmalzan 等(2022) [7]]一个可微函数 $\phi: R_+^4 \to R_+$

$$\phi(A) \ge (\le) \phi(B) \text{ 对于任何 } A,B \text{，使得 } A\in\mathcal{K}_2(\mathcal{L}_2) \text{ 和 } A \gg B$$

当且仅当

(i) 对所有的置换矩阵 Π 和 $\mathcal{K}_2(\mathcal{L}_2)$，有 $\phi(A)=\phi(A\Pi)$；

(ii) 对所有的 $j,k=1,2$ 和 $A\in\mathcal{K}_2(\mathcal{L}_2)$，$\sum_{i=1}^{2}(a_{ik}-a_{ij})(\phi_{ik}(A)-\phi_{ij}(B)) \ge (\le) 0$，其中 $\phi_{ij}(A)=\partial\phi(A)/\partial a_{ij}$。

引理 2. [Barmalzan 等(2022) [7]]一个可微函数 $H: R_+^2 \to R_+$，并将函数 $\phi_n: R_+^{2n} \to R_+$ 定义为 $\phi_n(A)=\sum_{i=1}^{n} H(a_{1i},a_{2i})$。如果 ϕ_2 满足引理 1，则 $\phi_n(A) \ge \phi_n(B)$，其中 $A\in\mathcal{K}_n(L_n)$ 和 $B = AT$。

下面，我们定义了两个空间

$$\mathcal{K}_n = \left\{ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} : a_i,b_j > 0 \text{ and } (a_i-a_j)(b_i-b_j) \le 0, i,j=1,\cdots,n \right\};$$

$$\mathcal{L}_n = \left\{ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} : a_i,b_j > 0 \text{ and } (a_i-a_j)(b_i-b_j) \ge 0, i,j=1,\cdots,n \right\}。$$

3. 改进比例反失效率模型有限混合的普通随机序

在本章节中，我们研究了改进比例失效率模型有限混合的普通随机序。本节分为两部分，第一部分处理当混合比例 p 和倾斜参数 α 变化，改进比例反失效率 λ 不变时有限混合的普通随机序，第二部分处理当混合比例 p 和改进比例反失效率 λ 变化，倾斜参数 α 不变时有限混合的普通随机序，两部分分别研究了在四种情况下的普通随机序。将公式(1)带入混合模型中得：

$$\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1-F^{\lambda}(x)}{1-\bar{\alpha}_i F^{\lambda}(x)} = \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{F}_{\alpha_i}, \quad 0<\alpha_i \le 1.$$

3.1. 当 p 和 α 变化，λ 不变时有限混合的普通随机序

定理 1 讨论了两个 2 × 2 阶矩阵在链优序下的普通随机序。

定理 1. 假设两个改进比例反失效率模型的有限混合的随机变量是 $V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})$ 和 $W_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})$，分别有以下两个结论：

(i) 若 $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \gg \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$，并且 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})\in\mathcal{K}_2$，则 $V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \ge_{st} W_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})$；

(ii) 若 $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \gg \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})\in\mathcal{L}_2$，并且 $\frac{\bar{F}_{\alpha_1}^2}{p_1} \ge \frac{\bar{F}_{\alpha_2}^2}{p_2}$，则 $V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \le_{st} W_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})$。

证明： 随机变量$V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})$和$W_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})$的生存函数为：

$$\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)=\sum_{i=1}^{2}p_i\frac{1-F^{\lambda}(x)}{1-\bar{\alpha}_iF^{\lambda}(x)} \text{ 和 } \bar{F}_{W_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})}(x)=\sum_{i=1}^{2}q_i\frac{1-F^{\lambda}(x)}{1-\bar{\beta}_iF^{\lambda}(x)}\text{。}$$

为了达到理想的结果，我们需要证明引理 1 的条件(i)和(ii)，显然，对于固定的$x>0$，$V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})$在$\mathcal{L}_2$和$\mathcal{K}_2$上是排列不变的，这证实了条件(i)。现在，对于固定的$x>0$和$i\neq j$，考虑这个函数

$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})=(p_1-p_2)\left(\frac{\partial\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)}{\partial p_1}-\frac{\partial\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)}{\partial p_2}\right)+(\alpha_1-\alpha_2)\left(\frac{\partial\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)}{\partial \alpha_1}-\frac{\partial\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)}{\partial \alpha_2}\right). \tag{2}$$

$\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)$关于$p_i$和$\alpha_i$的偏导为

$$\frac{\partial\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)}{\partial p_i}=\frac{1-F^{\lambda}(x)}{1-\bar{\alpha}_iF^{\lambda}(x)} \text{ 和 } \frac{\partial\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)}{\partial \alpha_i}=\frac{-p_iF^{\lambda}(x)\left(1-F^{\lambda}(x)\right)}{\left(1-\bar{\alpha}_iF^{\lambda}(x)\right)^2},$$

通过将这些表达式代入到(2)中，我们得到：

$$\frac{\partial\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)}{\partial p_1}-\frac{\partial\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)}{\partial p_2}=\frac{F^{\lambda}(x)\left(1-F^{\lambda}(x)\right)(\alpha_2-\alpha_1)}{\left(1-\bar{\alpha}_1F^{\lambda}(x)\right)\left(1-\bar{\alpha}_2F^{\lambda}(x)\right)}$$

和

$$\frac{\partial\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)}{\partial \alpha_i}-\frac{\partial\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)}{\partial \alpha_i}=\frac{F^{\lambda}(x)\left(1-F^{\lambda}(x)\right)\left[p_2\left(1-\bar{\alpha}_1F^{\lambda}(x)\right)^2-p_1\left(1-\bar{\alpha}_2F^{\lambda}(x)\right)^2\right]}{\left(1-\bar{\alpha}_1F^{\lambda}(x)\right)^2\left(1-\bar{\alpha}_2F^{\lambda}(x)\right)^2}.$$

因此，$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})$可以表示

$$\begin{aligned}
H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})&=(p_1-p_2)\left(\frac{\partial\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)}{\partial p_1}-\frac{\partial\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)}{\partial p_2}\right)+(\alpha_1-\alpha_2)\left(\frac{\partial\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)}{\partial \alpha_1}-\frac{\partial\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)}{\partial \alpha_2}\right)\\
&=\frac{(p_1-p_2)F^{\lambda}(x)\left(1-F^{\lambda}(x)\right)(\alpha_2-\alpha_1)}{\left(1-\bar{\alpha}_1F^{\lambda}(x)\right)\left(1-\bar{\alpha}_2F^{\lambda}(x)\right)}\\
&\quad+\frac{(\alpha_1-\alpha_2)F^{\lambda}(x)\left(1-F^{\lambda}(x)\right)\left[p_2\left(1-\bar{\alpha}_1F^{\lambda}(x)\right)^2-p_1\left(1-\bar{\alpha}_2F^{\lambda}(x)\right)^2\right]}{\left(1-\bar{\alpha}_1F^{\lambda}(x)\right)^2\left(1-\bar{\alpha}_2F^{\lambda}(x)\right)^2}\\
&\overset{sgn}{=}(p_1-p_2)(\alpha_2-\alpha_1)\left(1-\bar{\alpha}_1F^{\lambda}(x)\right)\left(1-\bar{\alpha}_2F^{\lambda}(x)\right)\\
&\quad+(\alpha_1-\alpha_2)\left[p_2\left(1-\bar{\alpha}_1F^{\lambda}(x)\right)^2-p_1\left(1-\bar{\alpha}_2F^{\lambda}(x)\right)^2\right]\\
&\overset{sgn}{=}(\alpha_2-\alpha_1)\left\{(p_1-p_2)\left(1-\bar{\alpha}_1F^{\lambda}(x)\right)\left(1-\bar{\alpha}_2F^{\lambda}(x)\right)\right.\\
&\quad\left.+\left[p_1\left(1-\bar{\alpha}_2F^{\lambda}(x)\right)^2-p_2\left(1-\bar{\alpha}_1F^{\lambda}(x)\right)^2\right]\right\}
\end{aligned}$$

先证明定理 1 的(i)，假设$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})\in\mathcal{K}_2$意味着

$$(p_1-p_2)(\alpha_1-\alpha_2)\leq 0,$$

因此，可以得到$p_1\geq p_2$和$\alpha_1\leq\alpha_2$（或$p_1\leq p_2$和$\alpha_1\geq\alpha_2$），因为对两种情况的证明非常相似，我们只对

$p_1 \ge p_2$ 和 $\alpha_1 \le \alpha_2$ 的情况给出证明。由此条件，我们可以得到：

$$1-\bar{\alpha}_1 F^{\lambda}(x) \le 1-\bar{\alpha}_2 F^{\lambda}(x).$$

从而我们得到 $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \ge 0$，引理 1 的(ii)的条件得到满足，根据引理 1，可得：

$$V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \ge_{st} W_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta}).$$

接下来证明定理 1 的(ii)，假设 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{L}_2$ 意味着

$$(p_1 - p_2)(\alpha_1 - \alpha_2) \ge 0,$$

因此，可以得到 $p_1 \ge p_2$ 和 $\alpha_1 \ge \alpha_2$ (或 $p_1 \le p_2$ 和 $\alpha_1 \le \alpha_2$)，同理，我们只对 $p_1 \ge p_2$ 和 $\alpha_1 \ge \alpha_2$ 的情况给出证明。由此条件，我们可以得到：

$$1-\bar{\alpha}_1 F^{\lambda}(x) \ge 1-\bar{\alpha}_2 F^{\lambda}(x),$$

又因为 $\dfrac{\bar{F}_{\alpha_1}^2}{p_1} \ge \dfrac{\bar{F}_{\alpha_2}^2}{p_2}$，得到：

$$p_1\left(1-\bar{\alpha}_2 F^{\lambda}(x)\right)^2 \ge p_2\left(1-\bar{\alpha}_1 F^{\lambda}(x)\right)^2,$$

从而得到 $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \ge 0$，引理 1 的(ii)的条件得到满足，根据引理 1，我们可得：

$$V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \le_{st} W_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta}).$$

定理 1 的证明被完成。

定理 2 讨论了两个 2 × n 阶矩阵在链优序下的普通随机序。

定理 2. 假设两个改进比例反失效率模型的有限混合的随机变量是 $V_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})$ 和 $W_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})$，分别有以下两个结论：

(i) 若 $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} T$，并且 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{K}_n$，则 $V_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \ge_{st} W_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})$；

(ii) 若 $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} T$，$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{L}_n$，并且 $\dfrac{\bar{F}_{\alpha_i}^2}{p_i} \ge \dfrac{\bar{F}_{\alpha_j}^2}{p_j}$，$(1 \le i \le j \le n)$，则 $V_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \le_{st} W_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})$。

证明：随机变量 $V_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})$ 和 $W_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})$ 的生存函数为

$$\bar{F}_{V_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1-F^{\lambda}(x)}{1-\bar{\alpha}_i F^{\lambda}(x)} \text{ 和 } \bar{F}_{W_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})}(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{1-F^{\lambda}(x)}{1-\bar{\beta}_i F^{\lambda}(x)}。$$

为了获得理想的结果，设

$$\phi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) = \bar{F}_{V_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})}(x)$$

和

$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) = \frac{p\left(1-F^{\lambda}(x)\right)}{1-\bar{\alpha} F^{\lambda}(x)},$$

我们可以得到：

$$\phi_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} H_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1-F^{\lambda}(x)}{1-\bar{\alpha}_i F^{\lambda}(x)},$$

通过定理 1 已知，$\phi_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})$ 满足引理 1，定理 2 满足引理 2 的条件，结果得到证明。

推论 1 讨论了两个 2 × n 阶矩阵在链优序下的普通随机序，在链优化的过程中，T 转换矩阵具有相同的结构。

推论 1. 假设两个改进比例反失效率模型的有限混合的随机变量是 $V_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})$ 和 $W_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})$，如果 T 转换矩阵 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 有相同的结构，分别有以下两个结论：

(i) 若 $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} T_1,T_2,\cdots,T_k$，并且 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{K}_n$，则 $V_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \ge_{st} W_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})$；

(ii) 若 $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} T_1,T_2,\cdots,T_k$，$\frac{\bar{F}_{\alpha_i}^2}{p_i} \ge \frac{\bar{F}_{\alpha_j}^2}{p_j}$ $(1 \le i \le j \le n)$，并且 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{L}_n$，则 $V_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \le_{st} W_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})$。

推论 2 讨论了两个 2 × n 阶矩阵在链优序下的普通随机序，在链优化的过程中，T 转换矩阵具有不同的结构。

推论 2. 假设两个改进比例反失效率模型的有限混合的随机变量是 $V_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})$ 和 $W_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})$，如果 T 转换矩阵 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 有不同的结构，分别有以下两个结论：

(i) 若 $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} T_1,T_2,\cdots,T_k$，并且 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{K}_n$，则 $V_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \ge_{st} W_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})$；

(ii) 若 $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} T_1,T_2,\cdots,T_k$，$\frac{\bar{F}_{\alpha_i}^2}{p_i} \ge \frac{\bar{F}_{\alpha_j}^2}{p_j}$，$(1 \le i \le j \le n)$，并且 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{L}_n$，则 $V_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \le_{st} W_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\beta})$。

3.2. 当 p 和 λ 变化，α 不变时有限混合的普通随机序

定理 3 讨论了两个 2 × 2 阶矩阵在链优序下的普通随机序。

定理 3. 假设两个改进比例反失效率模型的有限混合的随机变量是 $Z_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ 和 $Y_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\theta})$，有以下结论：若 $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \gg \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{K}_2$，并且 $P_1 F^{\lambda_1}(x) = P_2 F^{\lambda_2}(x)$，则 $Z_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda}) \ge Y_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\theta})$。

证明： 随机变量 $Z_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ 和 $Y_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\theta})$ 的生存函数为

$$\bar{F}_{Z_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x) = \sum_{i=1}^{2} p_i \frac{1-F^{\lambda_i}(x)}{1-\bar{\alpha}F^{\lambda_i}(x)} \text{ 和 } \bar{F}_{W_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\theta})}(x) = \sum_{i=1}^{2} q_i \frac{1-F^{\theta_i}(x)}{1-\bar{\alpha}F^{\theta_i}(x)}。$$

为了达到理想的结果，我们需要证明引理 1 的条件(i)和(ii)，显然，对于固定的 $x>0$，$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ 在 $\mathcal{K}_2$ 上是排列不变的，这证实了条件(i)。现在，对于固定的 $x>0$ 和 $i \ne j$，考虑这个函数

$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda}) = (p_1 - p_2)\left(\frac{\partial \bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)}{\partial p_1} - \frac{\partial \bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)}{\partial p_2}\right) + (\lambda_1 - \lambda_2)\left(\frac{\partial \bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)}{\partial \alpha_2}\right). \tag{3}$$

$\bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)$ 相对于 p_i 和 λ_i 的偏导数为

$$\frac{\partial \bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)}{\partial p_i} = \frac{1-F^{\lambda_i}(x)}{1-\bar{\alpha}F^{\lambda_i}(x)} \text{ 和 } \frac{\partial \bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)}{\partial \lambda_i} = \frac{-\alpha p_i F^{\lambda_i}(x)\ln F(x)}{\left(1-\bar{\alpha}F^{\lambda_i}(x)\right)^2},$$

通过将这些表达式代入到(3)中，我们得到

$$\frac{\partial \bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)}{\partial p_1}-\frac{\partial \bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)}{\partial p_2}=\frac{\alpha\left(F^{\lambda_2}(x)-F^{\lambda_1}(x)\right)}{M_1M_2}$$

和

$$\frac{\partial \bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)}{\partial \lambda_1}-\frac{\partial \bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)}{\partial \lambda_2}=\frac{\alpha \ln F(x)\left(p_2F^{\lambda_2}(x)M_1^2-p_1F^{\lambda_1}(x)M_2^2\right)}{M_1^2M_2^2},$$

这里 $M_1=1-\bar{\alpha}F^{\lambda_1}(x)$ 和 $M_2=1-\bar{\alpha}F^{\lambda_2}(x)$，因此，$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ 可以表示为

$$\begin{aligned}H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})&=(p_1-p_2)\left(\frac{\partial \bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)}{\partial p_1}-\frac{\partial \bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)}{\partial p_2}\right)+(\lambda_1-\lambda_2)\left(\frac{\partial \bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)}{\partial \alpha_1}-\frac{\partial \bar{F}_{V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)}{\partial \alpha_2}\right)\\&=\frac{(p_1-p_2)\alpha\left(F^{\lambda_2}(x)-F^{\lambda_1}(x)\right)}{M_1M_2}+\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\alpha\ln F(x)\left(p_2F^{\lambda_2}(x)M_1^2-p_1F^{\lambda_1}(x)M_2^2\right)}{M_1^2M_2^2}\\&\overset{sgn}{=}(p_1-p_2)\left(F^{\lambda_2}(x)-F^{\lambda_1}(x)\right)M_1M_2+\ln F(x)(\lambda_1-\lambda_2)\left(p_2F^{\lambda_2}(x)M_1^2-p_1F^{\lambda_1}(x)M_2^2\right).\end{aligned}$$

假设 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})\in\mathcal{K}_2$ 意味着

$$(p_1-p_2)(\lambda_1-\lambda_2)\le 0,$$

因此，可以得到 $p_1\ge p_2$ 和 $\lambda_1\le\lambda_2$（或 $p_1\le p_2$ 和 $\lambda_1\ge\lambda_2$），因为两种情况的证明非常相似，我们只对 $p_1\ge p_2$ 和 $\lambda_1\le\lambda_2$ 的情况给出证明。由此条件，我们可以得到：

$$F^{\lambda_1}(x)\le F^{\lambda_2}(x),$$

进而得到 $M_1\ge M_2$，等式的第一部分是非负的。因为 $F(x)$ 的值域是[0, 1]，得到

$$\ln F(x)\le 0,$$

由于 $P_1F^{\lambda_1}(x)=P_2F^{\lambda_2}(x)$，式子的第二部分是非负的，进而得到 $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})\ge 0$。引理 1 的(ii)的条件得到满足，根据引理 1，我们可得：

$$Z_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})\ge Y_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\theta}).$$

定理 3 的证明被完成。

定理 4 讨论了两个 2 × n 阶矩阵在链优序下的普通随机序。

定理 4. 假设两个改进比例反失效率模型的有限混合的随机变量是 $Z_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ 和 $Y_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\theta})$，分别有以下结论：

若 $\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & \cdots & p_n\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_1 & q_2 & \cdots & q_n\\ \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n\end{pmatrix}T$，$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})\in\mathcal{K}_n$，并且 $P_iF^{\lambda_i}(x)=P_jF^{\lambda_j}(x)$ $(1\le i\le j\le n)$，则 $Z_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})\ge Y_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\theta})$。

证明： 随便变量 $Z_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ 和 $Y_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\theta})$ 的生存函数为

$$\bar{F}_{Z_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{1-F^{\lambda_i}(x)}{1-\bar{\alpha}F^{\lambda_i}(x)}\text{ 和 }\bar{F}_{Y_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\theta})}(x)=\sum_{i=1}^{n}q_i\frac{1-F^{\lambda_i}(x)}{1-\bar{\alpha}F^{\lambda_i}(x)}。$$

为了获得理想的结果，设

$$\phi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})=\bar{F}_{Z_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})}(x)$$

和

$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})=\frac{p\left(1-F^{\lambda}(x)\right)}{1-\bar{\alpha}F^{\lambda}(x)},$$

我们可以得到：

$$\phi_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})=\sum_{i=1}^{n}H_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})=\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i\left(1-F^{\lambda_i}(x)\right)}{1-\bar{\alpha}F^{\lambda_i}(x)},$$

通过定理 3 已知，$\phi_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ 满足引理 1，定理 4 满足引理 2 的条件，结果得到证明。

推论 3 讨论了两个 2 × n 阶矩阵在链优序下的普通随机序，在链优化的过程中，T 转换矩阵具有相同的结构。

推论 3. 假设两个改进比例反失效率模型的有限混合的随机变量是 $Z_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ 和 $Y_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\theta})$，如果 T 转换矩阵 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 有相同的结构，有以下结论：

若 $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \end{pmatrix}T_1,T_2,\cdots,T_k$， $P_iF^{\lambda_i}(x)=P_jF^{\lambda_j}(x)\ (1\le i\le j\le n)$，并且 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})\in\mathcal{K}_n$，则 $Z_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})\ge Y_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\theta})$。

推论 4 讨论了两个 2 × n 阶矩阵在链优序下的普通随机序，在链优化的过程中，T 转换矩阵具有不同的结构。

推论 4. 假设两个改进比例反失效率模型的有限混合的随机变量是 $Z_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ 和 $Y_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\theta})$，如果 T 转换矩阵 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 有不同的结构，有以下结论：

若 $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \end{pmatrix}T_1,T_2,\cdots,T_k$， $P_iF^{\lambda_i}(x)=P_jF^{\lambda_j}(x)\ (1\le i\le j\le n)$，并且 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})\in\mathcal{K}_n$，则 $Z_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})\ge Y_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\theta})$。

备注 1.

在实际生活中，例如，工业中生产的项目，项目分为两个总体，每个总体的每一个单位满足改进比例反失效率模型的基生存函数形式，同时，基生存函数满足上述定理和推论的条件，两个项目总体可以上述改进比例反失效率模型有限混合的统计性质进行比较，根据结果，最优的项目总体说明，该项目总体的产品生存率高，可以尽可能地使用该项目生产过程中的人力物力机器等，一定程度上提高了生产率和产品的质量。

4. 结论

在本文中，我们基于改进比例反失效率模型的参数，探讨了改进比例反失效率模型构成的混合模型的统计性质，结合矩阵链优序或向量的优化序和 T 转换矩阵，分别给出了当混合比例和倾斜参数或混合比例和改进比例反失效率不同时，两组异质有限混合总体普通随机序的充分条件。

通过以上的研究，我们认为有可能扩展本文的结果。将改进比例反失效率模型有限混合的普通随机序结果扩展到失效率序、反失效率序和变异序。同时，本文建立了当混合比例和倾斜参数不同、混合比例和改进比例反失效率不同时，改进比例反失效率模型有限混合的随机序，可以扩展到当混合比例、倾斜参数和改进比例反失效率不同时，改进比例反失效率模型有限混合的随机比较。

基金项目

本文受到国家自然科学基金项目：不完全数据下相依竞争失效单调关联系统可靠性的统计推断(No. 12361060)的支持。

参考文献

[1] Amini-Seresht, E. and Zhang, Y. (2017) Stochastic Comparisons on Two Finite Mixture Models. *Operations Research Letters*, **45**, 475-480. https://doi.org/10.1016/j.orl.2017.07.009

[2] Finkelstein, M. (2008) Failure Rate Modelling for Reliability and Risk. Springer Science & Business Media.

[3] Cha, J.H. and Finkelstein, M. (2013) The Failure Rate Dynamics in Heterogeneous Populations. *Reliability Engineering & System Safety*, **112**, 120-128. https://doi.org/10.1016/j.ress.2012.11.012

[4] Hazra, N.K. and Finkelstein, M. (2018) On Stochastic Comparisons of Finite Mixtures for Some Semiparametric Families of Distributions. *TEST*, **27**, 988-1006. https://doi.org/10.1007/s11749-018-0581-7

[5] Albabtain, A.A., Shrahili, M., Al-Shehri, M.A. and Kayid, M. (2020) Stochastic Comparisons of Weighted Distributions and Their Mixtures. *Entropy*, **22**, Article 843. https://doi.org/10.3390/e22080843

[6] Barmalzan, G., Hosseinzadeh, A.A. and Balakrishnan, N. (2021) Dispersion and Variability Orders of Mixture Exponential Distributions and Their Sample Spacings, and Some Associated Characterizations. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **51**, 8657-8670. https://doi.org/10.1080/03610926.2021.1901925

[7] Barmalzan, G., Kosari, S. and Balakrishnan, N. (2020) Orderings of Finite Mixture Models with Location-Scale Distributed Components. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **36**, 461-481. https://doi.org/10.1017/s0269964820000467

[8] Panja, A., Kundu, P. and Pradhan, B. (2021) On Stochastic Comparisons of Finite Mixture Models. *Stochastic Models*, **38**, 190-213. https://doi.org/10.1080/15326349.2021.1987264

[9] Nadeb, H. and Torabi, H. (2020) New Results on Stochastic Comparisons of Finite Mixtures for Some Families of Distributions. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **51**, 3104-3119. https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1788082

[10] Shojaee, O. and Babanezhad, M. (2022) On Some Stochastic Comparisons of Arithmetic and Geometric Mixture Models. *Metrika*, **86**, 499-515. https://doi.org/10.1007/s00184-022-00880-3

[11] Bhakta, R., Kundu, P., Kayal, S. and Alizadeh, M. (2024) Stochastic Orderings between Two Finite Mixtures with Inverted-Kumaraswamy Distributed Components. *Mathematics*, **12**, Article 852. https://doi.org/10.3390/math12060852

[12] Bhakta, R., Majumder, P., Kayal, S. and Balakrishnan, N. (2023) Stochastic Comparisons of Two Finite Mixtures of General Family of Distributions. *Metrika*, **87**, 681-712. https://doi.org/10.1007/s00184-023-00930-4

[13] Yan, R., Zhang, J. and Zhang, Y. (2021) Optimal Allocation of Relevations in Coherent Systems. *Journal of Applied Probability*, **58**, 1152-1169. https://doi.org/10.1017/jpr.2021.23

[14] Zhang, J., Yan, R. and Zhang, Y. (2022) Reliability Analysis of Fail-Safe Systems with Heterogeneous and Dependent Components Subject to Random Shocks. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, *Part O*: *Journal of Risk and Reliability*, **237**, 1073-1087. https://doi.org/10.1177/1748006x221122033

[15] Zhang, J. and Zhang, Y. (2023) Stochastic Comparisons of Relevation Allocation Policies in Coherent Systems. *TEST*, **32**, 865-907. https://doi.org/10.1007/s11749-023-00855-0

[16] Lu, B., Zhang, J. and Yan, R. (2021) Optimal Allocation of a Coherent System with Statistical Dependent Subsystems. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **37**, 29-48. https://doi.org/10.1017/s0269964821000437

[17] Zhang, J., Yan, R. and Zhang, Y. (2023) Stochastic Comparisons of Largest Claim Amount from Heterogeneous and Dependent Insurance Portfolios. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **431**, Article ID: 115265. https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115265

[18] Guo, M., Zhang, J. and Yan, R. (2024) Stochastic Comparisons of Second Largest Order Statistics with Dependent Heterogeneous Random Variables. *Communications in Statistics—Theory and Methods*. https://doi.org/10.1080/03610926.2024.2392858

[19] Zhang, J., Guo, Z., Niu, J. and Yan, R. (2024) Increasing Convex Order of Capital Allocation with Dependent Assets under Threshold Model. *Statistical Theory and Related Fields*, **8**, 124-135. https://doi.org/10.1080/24754269.2023.2301630

[20] Balakrishnan, N., Barmalzan, G. and Haidari, A. (2018) Modified Proportional Hazard Rates and Proportional Reversed Hazard Rates Models via Marshall-Olkin Distribution and Some Stochastic Comparisons. *Journal of the Korean Statistical Society*, **47**, 127-138. https://doi.org/10.1016/j.jkss.2017.10.003

[21] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007) Stochastic Orders. Springer.

[22] Marshall, A.W. (1979) Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. Springer.

[23] Balakrishnan, N., Haidari, A. and Masoumifard, K. (2015) Stochastic Comparisons of Series and Parallel Systems with Generalized Exponential Components. *IEEE Transactions on Reliability*, **64**, 333-348. https://doi.org/10.1109/tr.2014.2354192