Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(2), 49-54
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.152045

Hans汉斯

导数概念的结构分析与应用

王耀革，郭从洲，冯民娜

信息工程大学基础部，河南 郑州

收稿日期：2024年9月26日；录用日期：2025年2月8日；发布日期：2025年2月20日

摘 要

通过对导数概念的结构分析，揭示导数概念的本质特征及内涵外延，开拓学生思路，为学生理解和应用导数提供帮助。

关键词

导数概念，结构分析，应用

Structural Analysis and Application of Derivative Concept

Yaoge Wang, Congzhou Guo, Minna Feng

Basis Department, Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Sep. 26th, 2024; accepted: Feb. 8th, 2025; published: Feb. 20th, 2025

Abstract

By analyzing the structure of the derivative concept, the essential characteristics and connotation extension of the derivative concept are revealed, which can help broaden students' thinking and provide assistance for their understanding and application of derivatives.

Keywords

Derivative Concept, Structural Analysis, Application

文章引用: 王耀革, 郭从洲, 冯民娜. 导数概念的结构分析与应用[J]. 理论数学, 2025, 15(2): 49-54.
DOI: 10.12677/pm.2025.152045

1. 引言

导数的概念是微分学的核心概念，对它的理解和掌握直接影响甚至决定了学生对微分学的理解和掌握。导数最早由法国数学家费马在研究曲线的切线问题和函数的极大极小值问题时提出。17 世纪上半叶随着工业革命的兴起，蓬勃发展的自然科学面临着四类亟待解决的问题：瞬时速度及其逆问题、因透镜的设计需要而面临的切线问题、炮弹最远射程及确定近日点远日点的最值问题、与求体积面积相关的求和问题。那个时期，几乎所有的数学大师，都在致力于解决这些数学难题。在前人工作的基础上，17 世纪下半叶英国科学家牛顿和德国数学家莱布尼兹分别从物理学和几何学的角度独立研究和完成了微积分学的创立工作。但在牛顿和莱布尼兹时代，导数的概念由于缺乏极限理论而混淆不清，直至 19 世纪初期，法国数学家柯西提出极限的初步定义，后经维尔斯特拉斯改进，形成完善的极限理论，柯西随之给出了导数的明确定义，澄清了近一个世纪关于导数的争议[1]。

导数概念建立在极限理论基础之上，具有抽象度高，思维量大的特点，是学生学习过程中的一大障碍。通过对导数概念进行结构分析和解读，揭示导数概念的本质特征及内涵外延，挖掘导数概念中蕴含的思想方法，为导数概念的理解及其应用提供帮助。

2. 导数的概念及其结构分析

定义[2] 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx (点 $x_0+\Delta x$ 仍在邻域内)时，相应地，因变量取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

也可记作 $y'|_{x=x_0}$， $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 。

记号 $f'(x_0)$， $y'|_{x=x_0}$ 是由 lagrange 给出的，记号 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ ， $\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 则是由被称为“数学符号大师”的莱布尼兹给出的，一直沿用至今。

结构分析 (1) 导数定义既是定性的——函数在点 x_0 处可导，也是定量的——给出 x_0 点处导数的计算公式 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

(2) 由于导数是由极限定义，因此，导数是局部性概念——是一个“点概念”，描述的是函数的局部性质。

(3) 从导数计算式的结构看，函数在 x_0 点处的导数就是在此点处函数值的增量 Δy 与自变量增量 Δx 比值的极限，由于函数值增量与自变量增量之比的形式是多样的，因此，为了准确地计算导数值，必须依据自变量增量的形式确定与之相应的函数值增量的形式，如当自变量增量 $\Delta x=x-x_0$ 时，对应的函数值增量需为 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$；当自变量增量 $\Delta x=(x_0+\Delta x)-x_0$ 时，对应的函数值增量需为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如此等等。

(4) 由导数定义 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$ 的结构式可以看出，函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在，由于 Δx 分母趋近于零，因此分子 Δy 必然趋近于零，从而函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，所以

w $f(x)$ 在 x_0 处可导是函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分条件，而不是必要条件。

(5) 导数表示的是函数在某一点处的变化率，Δy 是自变量的改变量 Δx 对应的函数值的改变量，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 表示函数的平均变化率，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限就表示函数在某一点的变化快慢，即变化率[3]。因而，在应用领域，涉及到局部点的变化率的问题都可以表示为导数问题，如瞬时速度、增长率、传导率、扩散率等，这也反映出导数这一数学概念具有强烈的现实背景和应用背景。

(6) 这也体现了导数的几何意义：函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处的导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 点处的切线斜率。

(7) 导数的计算实际就是极限的计算，而导数是微分学中的核心概念，就此体现出极限理论是微分学的基础。

(8) 由导数定义知道，导数是通过极限来定义的，定义中 $x\to x_0$ 包含 x 既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋于 x_0。但有时只能或只需考虑 x 仅从 x_0 的左侧趋于 x_0 （$x\to x_0^-$），或 x 仅从 x_0 的右侧趋于 x_0 （$x\to x_0^+$），得到函数在 x_0 点处的单侧导数的定义：若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，称 $f(x)$ 在 x_0 点右可导，其极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 点的右导数，记为 $f'_+(x_0)$，即 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；类似可定义函数在点 x_0 处的左导数 $f'_-(x_0)$，即 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

(9) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件为左、右导数存在并相等，即

$$f'(x_0)\text{存在}\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0).$$

3. 导数概念的应用

3.1. 求解五类基本初等函数的导数

定义是最基本的也是最底层的工具，用它求导数是很难的事情，其中的难点：一是求函数的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；二是求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$。因此，一般仅用定义计算五类基本初等函数中的四类：幂函数、三角函数(正弦函数和余弦函数)、指数函数、对数函数的导数。

例 1 求幂级数 $f(x)=x^\alpha$ 的导数。

解 $x\neq 0$ 时，利用 $\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^a-1\sim a\dfrac{\Delta x}{x}$，

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^a-x^a}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}x^a\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a-1}{\Delta x}\\
&=x^a\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\cdot\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=ax^{a-1}.
\end{aligned}$$

即 $(x^a)'=ax^{a-1}$。

注：$x=0$ 时，须 $a>1$，此时 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^a}{\Delta x}=0$，仍有 $f'(x)=ax^{a-1}$。

特别地，$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$。

例 2 求正弦函数 $f(x)=\sin x$ 的导数。

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\cos\dfrac{2x+\Delta x}{2}\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos x$。

即 $(\sin x)'=\cos x$。

用类似地方法，可以求得：$(\cos x)'=-\sin x$。

例 3 求指数函数 $f(x)=a^x$ 的导数。

解
$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\\
&\underline{\underline{a^{\Delta x}-1=t}}\ a^x\lim_{t\to 0}\frac{t}{\dfrac{\ln(t+1)}{\ln a}}\\
&=a^x\ln a\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=a^x\ln a.
\end{aligned}
$$

即 $\left(a^x\right)'=a^x\ln a\,(a>0)$。

例 4 求对数函数 $f(x)=\ln x$ 的导数。

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}$。

即 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}(x>0)$。

更一般地，$y=\log_a x$，则 $y'=\dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\dfrac{1}{x\ln a}$。

3.2. 建立导数和函数增量结构或差值结构的联系

从导数计算公式的结构形式看，函数在 x_0 点处的导数就是在此点处函数值的增量与自变量增量比的极限，因此，定义式有如下不同形式：

$$
f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\quad f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},
$$
$$
f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},
$$

这些形式中涉及到函数的增量结构 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$、$f(x_0+h)-f(x_0)$ 或函数的差值结构 $f(x)-f(x_0)$，因此，定义中建立了导数和函数增量结构或差值结构的联系，当研究对象具有上述特征时可以考虑用导数进行研究。

例 5 设 $f'(x_0)$ 存在，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x+(\Delta x)^2\right)-f(x_0)}{\Delta x}$。

结构分析 题型为求商的极限，且分子为函数差值结构，分母与自变量增量有关，已知条件涉及一点处的导数；类比已知：这与导数定义的结构类似；确定思路：利用导数的定义求解。

DOI: 10.12677/pm.2025.152045

解 原式 $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{f\left(x_0+\Delta x+(\Delta x)^2\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x+(\Delta x)^2}\cdot\dfrac{\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}\right]=f'\left(x_0\right)$。

例 6 [4] 若 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)\tan 3x}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin x}$。

结构分析 已知条件涉及一点处的导数，题型仍为求商的极限，分母利用等价无穷小代换可以简化为 $x^2\cdot x$，分子 $f\left(\sin^2 x+\cos x\right)$ 中，由于当 $x\to 0$ 时 $\sin^2 x+\cos x\to 1$，且已知 $f(1)=0$，因此，可以将分子 $f\left(\sin^2 x+\cos x\right)$ 看作是 $f\left(\sin^2 x+\cos x\right)-f(1)$，视为自变量在 $x=1$ 处发生改变，改变量为 $\left(\sin^2 x+\cos x-1\right)$，利用函数 $x=1$ 处可导的定义求解。

$$
\begin{aligned}
\text{解 原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)\cdot 3x}{x^2\cdot x}\\
&=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f\left(1+\sin^2 x+\cos x-1\right)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}\\
&=3\cdot f'(1)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}f'(1).
\end{aligned}
$$

例 7 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$，求 $f'(2)$。

结构分析 题型为求 $x=2$ 处的导数，已知条件是商的极限；类比已知：导数的定义；确定思路：利用导数的定义，将已知商的极限的分子向函数差值结构转化，需要知道 $x=2$ 处的函数值。

解 $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{f(x)}{x-2}\cdot(x-2)\right]=0$，

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3\text{。}$$

例 8 [5] 设 $f(2)=a$， $f'(2)=2$，计算：

(1) $a=0$ 时，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}nf\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)$；

(2) $a\neq 0$ 时，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)\right]^n$。

结构分析 从题目的条件看，只有导数的定义和题型关联紧密，思路是利用导数的定义进行计算，方法是形式统一法。但是，注意到(2)中的极限结构是 1^∞ 形式的幂指结构。

解 (1) 由导数的定义，则

$$\lim_{n\to+\infty}nf\left(\frac{2n+1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(2+\frac{1}{n}\right)-f(2)}{n^{-1}}=f'(2)=2.$$

(2) 利用导数的定义和第二个重要极限，则

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{a}f\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right]^{n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{f\left(\frac{2n+1}{n}\right)-a}{a}+1\right]^{n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{f\left(\frac{2n+1}{n}\right)-f(2)}{f(2)}\right]^{\frac{f(2)}{f(2+n^{-1})-f(2)}\frac{f(2+n^{-1})-f(2)}{f(2)}n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left\{\left[1+\frac{f\left(\frac{2n+1}{n}\right)-f(2)}{f(2)}\right]^{\frac{f(2)}{f(2+n^{-1})-f(2)}}\right\}^{\frac{f(2+n^{-1})-f(2)}{f(2)}n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left\{\left[1+\frac{f\left(\frac{2n+1}{n}\right)-f(2)}{f(2)}\right]^{\frac{f(2)}{f(2+n^{-1})-f(2)}}\right\}^{\frac{f(2+n^{-1})-f(2)}{n^{-1}}f(2)}$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{f'(2)}{f(2)}}.$$

4. 结语

通过对导数概念进行结构分析和解读，揭示导数概念的本质特征及内涵外延，挖掘导数概念中蕴含的思想方法，对于深刻理解导数概念的本质，灵活应用导数的概念求解相关问题十分有利，尤其是导数定义中涉及函数的增量的不同结构，如 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$、$f(x_0+h)-f(x_0)$ 或 $f(x)-f(x_0)$ 时，对应的自变量增量结构形式要与之一致，为导数概念的理解及其应用提供帮助。

基金项目

河南省本科高校研究性教学示范课程项目。

参考文献

[1] 王丽英, 赵文飞, 孙慧静, 刘波. “导数的概念”教学设计与实施[J]. 创新教育研究, 2021, 9(5): 1397-1403. https://doi.org/10.12677/ces.2021.95233

[2] 同济大学数学科学学院. 高等数学[M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023.

[3] 肖燕清. 导数的概念及其应用[J]. 教育教学论坛, 2012(26B): 129-130.

[4] 佘志坤, 主编, 全国大学生数学竞赛命题组, 编. 全国大学生数学竞赛真题解析与获奖名单(第 11-15 届) [M]. 北京: 科学出版社, 2024.

[5] 王耀革, 郭从洲, 崔国忠. 高等数学[M]. 北京: 科学出版社, 2022.