Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(2), 55-69
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.152046

Hans汉斯

具有权弱分担值的微分多项式的亚纯函数的唯一性

吴琳琳

福建师范大学数学与统计学院，福建 福州

收稿日期：2024年12月24日；录用日期：2025年2月9日；发布日期：2025年2月21日

摘 要

本文研究了一个形如 $f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)$ 的亚纯函数的k阶导数及其移动算子的k阶导数权弱分担值的唯一性问题，其中 m,n,k 均是正整数，α,β 是满足$|\alpha|+|\beta|\neq 0$的常数，将2018年林珊华和林伟川提出的结果推广到更一般的形式。

关键词

微分多项式，亚纯函数，权弱分担，唯一性定理

The Uniqueness of Meromorphic Functions of the Differential Polynomials with the Weakly Weighted Sharing Value

Linlin Wu

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: Dec. 24th, 2024; accepted: Feb. 9th, 2025; published: Feb. 21st, 2025

Abstract

In this paper, we study the uniqueness problem of the weakly weighted sharing values for the k-th derivative of a meromorphic function of the form $f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)$ and the k-th derivative of its translation operator, where m,n,k are all positive integers, and α,β are constants satisfying $|\alpha|+|\beta|\neq 0$ the results proposed by Lin Shanhua and Lin Weichuan in 2018 are extended to a more

文章引用: 吴琳琳. 具有权弱分担值的微分多项式的亚纯函数的唯一性[J]. 理论数学, 2025, 15(2): 55-69.
DOI: 10.12677/pm.2025.152046

general form.

Keywords

Differential Polynomials, Meromorphic Functions, Weakly Weighted Sharing, Uniqueness Theorems

1. 引言

本文使用值分布论中的一些标准记号和结论(见文献[1]和[2])。

近年来，随着 Nevanlinna [3]-[5]值分布理论和差分模拟理论的提出，越来越多学者将研究视线聚焦在有关亚纯函数分担值与分担值集的唯一性问题上，在之后的探究过程中也出现了许多有价值且影响深厚的研究成果。1959 年，Hayman [6]提出了很多关于微分多项式的值分布的结果：对于超越亚纯函数 $f, f^n f'$ 取任一非零无穷多次。紧接着，越来越多的学者对涉及亚纯函数微分多项式的问题深入研究。

定义 1 [2] (分担值)设 k 是一个非负整数或 ∞, a 为复数，定义 $E_k(a,f)$ 表示 $f-a$ 的零点集合，其中若 $m \le k$, 则 $f-a$ 的 m 重零点记 m 次；若 $m>k$, 则记 $k+1$ 次。如果 $E_k(a,f)=E_k(a,g)$，则称 f 与 g 以权 k 分担值 a，记作 (a,k)。特别地，如果 f 和 g 分担值 aIM 当且仅当 f 和 g 分担 $(a,0)$；如果 f 和 g 分担值 aCM 当且仅当 f 和 g 分担 (a,∞)。

1997 年杨重骏和华歆厚研究了仅分担一个值的亚纯函数的唯一性问题并得到以下结论：

定理 A [7]假设 f,g 是两个非常数的亚纯函数，n 是正整数且满足 $n \ge 11$，如果 $f^n f'$ 与 $g^n g'$ CM 分担 1，那么 f 和 g 满足下述两种情形之一：

(I) $f=tg$，其中 t 是常数且满足 $t^n=1$；

(II) $f=c_1e^{cz}, g=c_2e^{-cz}$，其中 c,c_1,c_2 是非零常数，且满足 $(c_1c_2)^{n+1}c^2=-1$。

2009 年方明亮提出：假设 f,g 是两个非常数的亚纯函数，n,k 是正整数且满足 $n>3k+11$，$\left(f^n(f-1)\right)^{(k)}$ 与 $\left(g^n(g-1)\right)^{(k)}$ CM 分担 1 时唯一性是否仍成立？李效敏、石悦和李岗回答了该问题并得到以下两个结论：

定理 B [8]假设 $f(z)$ 是非常数亚纯函数，$f(z+\eta)$ 是 $f(z)$ 的移动算子，其中 η 是非零复数；$\left(f^n(z)\left(f(z)-1\right)\right)^{(k)}$ 与 $\left(f^n(z+\eta)\left(f^m(z+\eta)-1\right)\right)^{(k)}$ CM 分担 1，其中 n,k 是正整数且满足 $n>3k+11$。如果 $\frac{2}{n}<\Theta(\infty,f)<\frac{n-k-1}{n+1}$，那么 $f(z)\equiv f(z+\eta)$。

定理 C [8]假设 $f(z)$ 是非常数亚纯函数，$f(z+\eta)$ 是 $f(z)$ 的移动算子，其中 η 是非零复数；$\left(f^n(z)\left(f(z)-1\right)\right)^{(k)}$ 与 $\left(f^n(z+\eta)\left(f^m(z+\eta)-1\right)\right)^{(k)}$ IM 分担 1，其中 n,k 是正整数且满足 $n>9k+20$。如果 $\frac{2}{n}<\Theta(\infty,f)<\frac{n-k-1}{n+1}$，那么 $f(z)\equiv f(z+\eta)$。

Lahiri 与 Banerjee 提出用权分担方法讨论唯一性问题，改进了先前学者们研究的 CM、IM 思想。进一步的，林珊华与林伟川于 2006 年提出了一个比权分担更弱的一个值分担，即提出了权弱分担的概念。

定义 2 [9] (权弱分担值)如果 f 和 g 为非常数亚纯函数，$a \in S(f)\cap S(g)$，k 是非负整数或 ∞。当 k 是

正整数或 ∞ 且有

$$\bar{N}_{k)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)-\bar{N}_{k)}^{E}(r,a)=S(r,f),\bar{N}_{k)}\left(r,\frac{1}{g-a}\right)-\bar{N}_{k)}^{E}(r,a)=S(r,g)$$

$$\bar{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)-\bar{N}_{(k+1}^{0}(r,a)=S(r,f),\bar{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{g-a}\right)-\bar{N}_{(k+1}^{0}(r,a)=S(r,g)$$

或者当 $k=0$，且有 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)-\bar{N}_0(r,a)=S(r,f)$，$\bar{N}\left(r,\frac{1}{g-a}\right)-\bar{N}_0(r,a)=S(r,g)$。则称 f,g 以权 k 弱分担 a，记作 f,g 分担“(a,k)”。

2018 年，林珊华和林伟川继续从权弱分担值的方面入手研究了这类非线性微分多项式的唯一性问题，得到以下结论：

定理 D [9]假设 $f(z)$ 是非常数亚纯函数，$f(z+\eta)$ 是 $f(z)$ 的移动算子，其中 η 是非零复数，n,k 是正整数，如果 $\Theta(\infty,f)>\frac{2}{n}$ (当 $k=1$ 时)或 $\frac{2}{n}<\Theta(\infty,f)<\frac{1}{n+1}\left(n-2-\frac{4k}{n+1-2k}\right)$ (当 $k\geq 2$ 时)，$\left(f^n(z)(f(z)-1)\right)^{(k)}$ 与 $\left(f^n(z+\eta)(f^m(z+\eta)-1)\right)^{(k)}$ 分担“$(1,m)$”且满足下述条件之一：

(I) 当 $m\geq 2$ 或 ∞ 时，$n>3k+9$，

(II) 当 $m=1$ 时，$n>4k+\frac{21}{2}$，

(III) 当 $m=0$ 时，$n>9k+18$，

那么，$f(z)\equiv f(z+\eta)$。

现考虑定理 D 中的微分多项式能否推广到更一般的情形？因此，本文借助定理 D 的研究思路，应用差分 Nevanlinna 理论和权弱分担的思想去研究更一般的微分多项式及其移动算子 $\left(f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)\right)^{(k)}$ 与 $\left(f^n(z+\eta)(\alpha f^m(z+\eta)+\beta)\right)^{(k)}$ 在权弱分担值下的亚纯函数的唯一性问题。即证明：

定理 1 假设 $f(z)$ 是非常数亚纯函数，$f(z+\eta)$ 是 $f(z)$ 的移动算子，η 是非零复数，m,n,k 均是正整数，α,β 是满足 $|\alpha|+|\beta|\neq 0$ 的常数，且

$$\tilde{m}=\begin{cases}0, & \alpha=0,\\ m, & \alpha\neq 0.\end{cases} \tag{1}$$

若 $\Theta(\infty,f)>\frac{n+(3-n)m-1}{n+m-1}$ (当 $k=1$ 时)或 $\frac{n+(3-n)m-1}{n+m-1}<\Theta(\infty,f)<\frac{1}{n+1}\left(n+1-3m-\frac{4km}{n+m-2k}\right)$ (当 $k\geq 2$ 时)，$F=\left(f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)\right)^{(k)}$ 与 $G=\left(f^n(z+\eta)(\alpha f^m(z+\eta)+\beta)\right)^{(k)}$ 分担“$(1,l)$”且满足下述条件之一：

(I) 当 $l\geq 2$ 或 ∞ 时，$n>3k+8+\tilde{m}$，

(II) 当 $l=1$ 时，$n>4k+9+\frac{3}{2}\tilde{m}$，

(III) 当 $l=0$ 时，$n>9k+14+4\tilde{m}$，

则 $f(z)\equiv f(z+\eta)$ 或 $f(z)\equiv tf(z+\eta)$，其中 $t^{n+\tilde{m}}=1$.

定理 1 中，当 $\alpha=1$，$\beta=-1$，$m=1$ 时即为定理 D 中的微分多项式形式，即定理 D 是定理 1 的一种特殊情况。

2. 主要引理

引理 2.1 [10]设 $f(z)$ 是非常数亚纯函数，p,k 是两个正整数，则

$$N_p\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\le N_{p+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+k\bar{N}(r,f)+S(r,f),$$

$$N_p\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\le N_{p+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+T\left(r,f^{(k)}\right)-T(r,f)+S(r,f).$$

引理 2.2 [11] 设 m 为非负整数或 ∞, F,G 是两个非常数亚纯函数，且 F,G 分担“$(1,m)$”，置 $H=\left(\frac{F''}{F'}-2\frac{F'}{F-1}\right)-\left(\frac{G''}{G'}-2\frac{G'}{G-1}\right)$，如果 $H\not\equiv 0$，则下面的结论成立：

1) 当 $m\ge 2$ 或 $m=\infty$ 时，

$$T(r,F)\le N_2(r,F)+N_2(r,G)+N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+S(r,F)+S(r,G).$$

2) 当 $m=1$ 时，

$$T(r,F)\le N_2(r,F)+N_2(r,G)+N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+\bar{N}^L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+S(r,F)+S(r,G).$$

3) 当 $m=0$ 时，

$$T(r,F)\le N_2(r,F)+N_2(r,G)+N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+2\bar{N}^L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)$$
$$+\bar{N}^L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+S(r,F)+S(r,G).$$

引理 2.3 [12] 设 f 是非常数亚纯函数，k 为正整数，设 c 为非零有穷复数，则

$$T(r,f)\le \bar{N}(r,f)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-c}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f),$$

$N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)$ 指的是 $f^{(k+1)}$ 的零点且不是 $f\left(f^{(k)}-c\right)$ 的零点的计数函数。

引理 2.4 [13] 设 f 是非常数亚纯函数，$R(f)=\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k f^k}{\sum_{j=0}^{m}a_j f^j}$ 是关于 f 具有常系数 a_k,a_j 的不可约有理函数，这里 $a_n\ne 0$，$b_m\ne 0$，则 $T(r,R(f))=\max\{n,m\}T(r,f)+O(1)$。

引理 2.5 [14] 设 f 是一个非常数有限级亚纯函数，$c\in\mathcal{C}$，则

$$N\left(r,\frac{1}{f(z+c)}\right)\le N\left(r,\frac{1}{f(z)}\right)+S(r,f), N(r,f(z+c))\le N(r,f(z))+S(r,f)$$

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f(z+c)}\right)\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{f(z)}\right)+S(r,f), \bar{N}(r,f(z+c))\le \bar{N}(r,f(z))+S(r,f)$$

除去一个对数测度有穷的例外集合。

引理 2.6 [12] 设 f 是一个非常数亚纯函数，且 α_1,α_2 为两个亚纯函数满足 $T(r,\alpha_i)=S(r,f)$，$i=1,2$ 则

$$T(r,f)\le \bar{N}(r,f)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-\alpha_1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-\alpha_2}\right)+S(r,f).$$

引理 2.7 [15]设 f 是一个非常数亚纯函数，且其增长级满足 $\rho(f)=\rho<\infty$，$\eta\neq 0$ 是复常数，则对任意正数 ϵ，当 r 充分大时有 $T(r,f(z+\eta))=T(r,f(z))+O(r^{\rho-1+\varepsilon})$。

引理 2.8 [1]设 f 是一个非常数亚纯函数，且 k 是一个正整数，则

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\leq N\left(r,\frac{1}{f}\right)+k\overline{N}(r,f)+S(r,f).$$

引理 2.9 [1]设 $f_j(z)(j=1,2,\cdots,n,n\geq 2)$ 为亚纯函数，$g_j(z)(j=1,2,\cdots,n)$ 为整函数，满足以下条件

1. $\sum_{j=1}^{n} f_j(z)e^{g_j(z)}\equiv 0$；
2. 当 $1\leq j<k\leq n$ 时，$g_j(z)-g_k(z)$ 不是常数；
3. 当 $1\leq j\leq n$，$1\leq h<k\leq n$ 时，$T(r,f_j)=o\left\{T\left(r,e^{g_h-g_k}\right)\right\}(r\to\infty,r\notin E)$

其中 E 是对数测度有限的集合，则 $f_j(z)\equiv 0(j=1,2,\cdots,n)$。

引理 2.10 [16]若 f 为非常数整函数，正整数 $k\geq 2$。如果 $ff^{(k)}\neq 0$，那么 $f=e^{az+b}$，这里 $a\neq 0$，b 为复常数。

3. 定理的证明

假设 $H\not\equiv 0.$

(I) 当 $l\geq 2$ 或 ∞ 时，根据引理 1 得

$$N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)\leq N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)}\right)+T\left(r,\left(f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)\right)^{(k)}\right)$$
$$-T\left(r,f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)\right)+S(r,f(z)),$$

$$N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)\leq N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f^n(z+\eta)(\alpha f^m(z+\eta)+\beta)}\right)+k\overline{N}(r,f(z+\eta))+S(r,f(z+\eta)).$$

由引理 2 得 $T(r,F)\leq N_2(r,F)+N_2(r,G)+N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+S(r,F)+S(r,G)$，即

$$\begin{aligned}
&T\left(r,\left(f^n(\alpha f^m(z)+\beta)\right)^{(k)}\right)\\
&\leq 2\overline{N}(r,f(z))+2\overline{N}(r,f(z+\eta))+S(r,f(z))+S(r,f(z+\eta))+N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)}\right)\\
&\quad+T\left(r,\left(f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)\right)^{(k)}\right)-T\left(r,f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)\right)+N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f^n(z+\eta)(\alpha f^m(z+\eta)+\beta)}\right)\\
&\quad+k\overline{N}(r,f(z+\eta))\\
&\leq 2\overline{N}(r,f(z))+(k+2)\overline{N}(r,f(z+\eta))+(k+2)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f(z)}\right)+N\left(r,\frac{1}{\alpha f^m(z)+\beta}\right)\\
&\quad+T\left(r,\left(f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)\right)^{(k)}\right)-T\left(r,f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)\right)+(k+2)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f(z+\eta)}\right)\\
&\quad+N\left(r,\frac{1}{\alpha f^m(z+\eta)+\beta}\right)+S(r,f(z))+S(r,f(z+\eta)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(n+\tilde{m})T(r,f(z))\\
&=T\left(r,f^{n}(z)\left(\alpha f^{m}(z)+\beta\right)\right)+O(1)\\
&\le 2\bar{N}(r,f(z))+(k+2)\bar{N}(r,f(z+\eta))+(k+2)\bar{N}\left(r,\frac{1}{f(z)}\right)+\tilde{m}T(r,f(z))\\
&\quad+(k+2)\bar{N}\left(r,\frac{1}{f(z+\eta)}\right)+\tilde{m}T(r,f(z+\eta))+S(r,f(z))+S(r,f(z+\eta))\\
&\le(k+4+\tilde{m})T(r,f(z))+(2k+4+\tilde{m})T(r,f(z+\eta))+S(r,f(z))+S(r,f(z+\eta)).
\end{aligned}$$

移项得 $(n-k-4)T(r,f(z))\le(2k+4+\tilde{m})T(r,f(z+\eta))+S(r,f(z))+S(r,f(z+\eta))$，
同理 $(n-k-4)T(r,f(z+\eta))\le(2k+4+\tilde{m})T(r,f(z))+S(r,f(z))+S(r,f(z+\eta))$。
整合上述两式有 $(n-3k-8-\tilde{m})\{T(r,f(z+\eta))+T(r,f(z))\}\le S(r,f(z))+S(r,f(z+\eta))$，
结合 $n>3k+8+\tilde{m}$ 有 $T(r,f(z+\eta))+T(r,f(z))\le S(r,f(z))+S(r,f(z+\eta))$，与条件矛盾，即 $H\equiv 0$。
此时可以得到 $\dfrac{1}{G-1}=\dfrac{T}{F-1}+J$，其中 $T(\ne 0)$， J 为积分常数。

情况 1： $J\ne 0$，且 $T\ne J$。

子情况 1.1： 若 $J=-1$，则 $G=\dfrac{-T}{F-(T+1)}$， $F=(T+1)-\dfrac{T}{G}$，结合引理 3 和引理 4 此时

$$\begin{aligned}
&(n+\tilde{m})T(r,f(z))\\
&=T\left(r,f^{n}(z)\left(\alpha f^{m}(z)+\beta\right)\right)+O(1)\\
&\le\bar{N}(r,f(z))+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{f^{n}(z)\left(\alpha f^{m}(z)+\beta\right)}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{\left(f^{n}(z)\left(\alpha f^{m}(z)+\beta\right)\right)^{(k)}-(T+1)}\right)+S(r,f(z))\\
&\le\bar{N}(r,f(z))+(k+1)\bar{N}\left(r,\frac{1}{f(z)}\right)+N\left(r,\frac{1}{\alpha f^{m}(z)+\beta}\right)+\bar{N}(r,f(z+\eta))+S(r,f(z))\\
&\le(k+2+\tilde{m})T(r,f(z))+T(r,f(z+\eta))+S(r,f(z)).
\end{aligned}$$

移项得

$$(n-k-2)T(r,f(z))\le T(r,f(z+\eta))+S(r,f(z)). \tag{2}$$

由引理 1 有

$$\begin{aligned}
&\bar{N}\left(r,\frac{1}{\left(f^{n}(z)\left(\alpha f^{m}(z)+\beta\right)\right)^{(k)}}\right)\\
&\le N_{k+1}\left(r,\frac{1}{f^{n}(z)\left(\alpha f^{m}(z)+\beta\right)}\right)+k\bar{N}(r,f(z))+S(r,f(z))\\
&\le(k+1)\bar{N}\left(r,\frac{1}{f(z)}\right)+N\left(r,\frac{1}{\alpha f^{m}(z)+\beta}\right)+k\bar{N}(r,f(z))+S(r,f(z))\\
&\le(2k+1+\tilde{m})T(r,f(z))+S(r,f(z)).
\end{aligned}$$

同理可以得到

$$\begin{aligned}
&(n+\tilde{m})T\big(r,f(z+\eta)\big)\\
&=T\Big(r,f^{n}(z+\eta)\big(\alpha f^{m}(z+\eta)+\beta\big)\Big)+O(1)\\
&\le \bar{N}\big(r,f(z+\eta)\big)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{f^{n}(z+\eta)\big(\alpha f^{m}(z+\eta)+\beta\big)}\right)\\
&\quad+\bar{N}\left(r,\frac{1}{\Big(f^{n}(z+\eta)\big(\alpha f^{m}(z+\eta)+\beta\big)\Big)^{(k)}-\frac{T}{T+1}}\right)+S\big(r,f(z+\eta)\big)\\
&\le \bar{N}\big(r,f(z+\eta)\big)+(k+1)\bar{N}\left(r,\frac{1}{f(z+\eta)}\right)+N\left(r,\frac{1}{\alpha f^{m}(z+\eta)+\beta}\right)\\
&\quad+\bar{N}\left(r,\frac{1}{\Big(f^{n}(z)\big(\alpha f^{m}(z)+\beta\big)\Big)^{(k)}}\right)+S\big(r,f(z+\eta)\big)\\
&\le (k+2+\tilde{m})T\big(r,f(z+\eta)\big)+(2k+1+\tilde{m})T\big(r,f(z)\big)+S\big(r,f(z)\big)+S\big(r,f(z+\eta)\big).
\end{aligned}$$

移项得

$$(n-k-2)T\big(r,f(z+\eta)\big)\le(2k+1+\tilde{m})T\big(r,f(z)\big)+S\big(r,f(z)\big)+S\big(r,f(z+\eta)\big). \tag{3}$$

结合式(2)，(3)可以得到

$$(n-3k-3-\tilde{m})T\big(r,f(z)\big)+(n-k-3)T\big(r,f(z+\eta)\big)\le S\big(r,f(z)\big)+S\big(r,f(z+\eta)\big)。$$

由于 $n>3k+8+\tilde{m}$，此时有 $5\big\{T\big(r,f(z)\big)+T\big(r,f(z+\eta)\big)\big\}<S\big(r,f(z)\big)+S\big(r,f(z+\eta)\big)$，与条件矛盾。

子情况 1.2： $J\ne-1$，此时 $G-\left(1+\frac{1}{J}\right)=\frac{-T}{J^{2}\left(F+\frac{T-J}{J}\right)},F-\left(1-\frac{T}{J}\right)=\frac{-T}{J^{2}\left(G-\frac{J+1}{J}\right)}$，接下来的分析与子情况 1.1 同理可以推导出矛盾。

情况 2： $J\ne0$，且 $T=J$。

子情况 2.1： $J=-1$，此时 $\frac{1}{G-1}=\frac{-1}{F-1}-1$，也就是 $FG\equiv1$，即

$$\Big(f^{n}(z)\big(\alpha f^{m}(z)+\beta\big)\Big)^{(k)}\Big(f^{n}(z+\eta)\big(\alpha f^{m}(z+\eta)+\beta\big)\Big)^{(k)}\equiv1.$$

子情况 2.1.1： $\alpha\beta=0.$

(1) $\alpha=0$，$\beta\ne0$ 时，此时

$$\big(f^{n}(z)\beta\big)^{(k)}\big(f^{n}(z+\eta)\beta\big)^{(k)}\equiv1. \tag{4}$$

假设 z_0 是 $f(z+\eta)$ 的 $p(\ge1)$ 重零点，则 z_0 是 $f(z)$ 的 $q(\ge1)$ 重极点，且有 $np-k=nq+k$，即 $n(p-q)=2k$，可以得到 $n\le2k$，这与条件中 $n>3k+8+\tilde{m}$ 矛盾。也就是说 $f(z+\eta)$ 是没有零点的，反过来类似去分析也可以得到 $f(z)$ 也是没有零点的。那现在假设 $f(z+\eta)$ 有极点并设该点为 z_0，重数为 $q(\ge1)$ 重。根据分析可以知道 z_0 必须是 $f(z)$ 的零点，设其为 $p(\ge1)$ 重，则有 $np-k=nq+k$，即 $n\le2k$，此时推出矛盾。因此 $f(z+\eta)$ 是没有极点的，类似去分析也可以得到 $f(z)$ 也是没有极点的。则设 $f(z)=e^{P(z)}$，$f(z+\eta)=e^{P(z+\eta)}$，其中 $P(z)$ 与 $P(z+\eta)$ 是整函数。

我们考虑 $k=1$ 时，(4)变成 $\big(f^{n}(z)\beta\big)'\big(f^{n}(z+\eta)\beta\big)'\equiv1$

$$\beta^2 n^2 e^{n(P(z)+P(z+\eta))} P'(z) P'(z+\eta) \equiv 1 \tag{5}$$

由于 $P'(z)$，$P'(z+\eta)$ 没有零点和极点，则存在整函数 δ,γ 使得 $P'(z)=e^{\delta}$，$P'(z+\eta)=e^{\gamma}$。此时

$$\beta^2 n^2 e^{n(P(z)+P(z+\eta))+\delta+\gamma} \equiv 1.$$

现在对两边都进行求导可得

$$n\left(P'(z)+P'(z+\eta)\right)+\delta'+\gamma'=0. \tag{6}$$

也就是 $n\left(e^{\delta}+e^{\gamma}\right)+\delta'+\gamma'=0$，移项得 $n\left(e^{\delta}+e^{\gamma}\right)=-\left(\delta'+\gamma'\right)$。令 $n\left(e^{\delta}+e^{\gamma}\right)=-\left(\delta'+\gamma'\right)=a$。

若 $a\neq 0$，则 $\dfrac{e^{\delta}}{a}-\dfrac{1}{n}=-\dfrac{e^{\gamma}}{a}$。根据第二基本定理得

$$T\left(r,\frac{e^{\delta}}{a}\right)\le \bar{N}\left(r,\frac{e^{\delta}}{a}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{a}{e^{\delta}}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{\dfrac{e^{\delta}}{a}-\dfrac{1}{n}}\right)+S\left(r,\frac{e^{\delta}}{a}\right)=S\left(r,\frac{e^{\delta}}{a}\right).$$

即 $\dfrac{e^{\delta}}{a}$ 是常数，则 $\dfrac{e^{\delta}}{n\left(e^{\delta}+e^{\gamma}\right)}=\dfrac{1}{n\left(1+e^{\gamma-\delta}\right)}$ 为常数，也就是 $\gamma-\delta$ 为常数，设 $\gamma-\delta=b$，b 为常数，且 $\delta'=\gamma'\neq 0$，代入(5)有 $n\left(1+e^{c}\right)e^{\delta}+2\delta'e^{0}=0$，又 $T\left(r,n\left(1+e^{c}\right)\right)=o\left\{T\left(r,e^{\delta}\right)\right\}$，$T\left(r,2\delta'\right)=o\left\{T\left(r,e^{\delta}\right)\right\}$。

结合引理 9 得 $\delta'=0$，矛盾，因此 $a=0$。即 $\delta'+\gamma'=0$，则 $e^{\delta}+e^{\gamma}=0$，即 $\delta=\gamma+(2u+1)\pi i$，$u$ 为整数，所以 $\delta'=\gamma'=0$，得到 $P'(z)+P'(z+\eta)=0$ 且均为常数。设 $P(z)=cz+c_1$，$P(z+\eta)=-cz+c_2=c(z+\eta)+c_1$，其中 c,c_1,c_2 均为常数，得到 $c=0$，则 $f(z)$ 为常数与假设矛盾。

现在考虑 $k\ge 2$ 的情况，根据(4)得 $P(z)=cz+c_1$，$f(z)\neq 0$，$f(z+\eta)\neq 0$，$\left(f^n(z)\right)^{(k)}\neq 0$，$\left(f^n(z+\eta)\right)^{(k)}\neq 0$。即

$$f^n(z)\left(f^n(z)\right)^{(k)}\neq 0,\ f^n(z+\eta)\left(f^n(z+\eta)\right)^{(k)}\neq 0.$$

接下来由引理 10 推出 $f(z)=Ae^{cz+d_1}$，$f(z+\eta)=Be^{-cz+d_2}=Ae^{c(z+\eta)+d_1}$，其中 A,B,c,d_1,d_2 为常数。此时 $c=0$，则 f 恒为常数，与原条件矛盾。

(2) $\alpha\neq 0$，$\beta=0$ 时，此时 $\left(f^n(z)\left(\alpha f^m(z)\right)\right)^{(k)}\left(f^n(z+\eta)\left(\alpha f^m(z+\eta)\right)\right)^{(k)}\equiv 1$。

如果 $f(z+\eta)$ 有一个零点，设为 z_0，其重数为 $p(\ge 1)$ 重，则按照上式可以知道 z_0 必须是 $f(z)$ 的一个极点，设其为 $q(\ge 1)$ 重，此时 $(n+m)p-k=(n+m)q+k$，也就是 $(n+m)(p-q)=2k$，即 $n\le 2k-m$，这与条件中 $n>3k+8+\tilde{m}$ 矛盾。即 $f(z+\eta)$ 无零点，同理 $f(z)$ 也无零点。接下来的分析过程与(1)类似，可以得到矛盾。

子情形 2.1.2： $\alpha\beta\neq 0$，此时 $\alpha\neq 0$，$\tilde{m}=m$。

$$\left(f^n(z)\left(\alpha f^m(z)+\beta\right)\right)^{(k)}\left(f^n(z+\eta)\left(\alpha f^m(z+\eta)+\beta\right)\right)^{(k)}\equiv 1. \tag{7}$$

如果说 z_0 是 $f(z+\eta)$ 的零点，先设其是 $p(\ge 1)$ 重，按照上式则 z_0 必须是 $f(z)$ 的极点，先设其为 $q(\ge 1)$ 重，满足 $nq+mq+k=np-k$，即 $n(p-q)=2k+mq$，其中 $p\ge q+1$，$2k+mq\ge n$，那么 $p\ge\dfrac{n-2k}{m}+1$。

反过来分析当 $f(z)$ 有零点，那么至少为 $\dfrac{n-2k}{m}+1$ 重零点。

1) 若 $k=1$，(7)变为

$$\left(f^{n}(z)\left(\alpha f^{m}(z)+\beta\right)\right)'\left(f^{n}(z+\eta)\left(\alpha f^{m}(z+\eta)+\beta\right)\right)'\equiv 1$$
$$\left[nf^{n-1}(z)f'(z)\left(\alpha f^{m}(z)+\beta\right)+f^{n}(z)\alpha mf^{m-1}(z)f'(z)\right]$$
$$\left[nf^{n-1}(z+\eta)f'(z+\eta)\left(\alpha f^{m}(z+\eta)+\beta\right)+f^{n}(z+\eta)\alpha mf^{m-1}(z+\eta)f'(z+\eta)\right]\equiv 1$$
$$f^{n-1}(z)f'(z)f^{n-1}(z+\eta)f'(z+\eta)\left[n\alpha f^{m}(z)+n\beta+f^{m}(z)m\alpha\right]\left[n\alpha f^{m}(z+\eta)+n\beta+f^{m}(z+\eta)m\alpha\right]\equiv 1$$
$$\alpha^{2}(n+m)^{2}f^{n-1}(z)f'(z)f^{n-1}(z+\eta)f'(z+\eta)\left(f^{m}(z)+\frac{\beta}{\alpha}\frac{n}{n+m}\right)\left(f^{m}(z+\eta)+\frac{\beta}{\alpha}\frac{n}{n+m}\right)\equiv 1.$$

如果 $f'(z+\eta)$ 有一个零点 z_1，设为 $p_1(\geq 1)$ 重且设 z_1 不是 $f(z+\eta)$， $f^{m}(z+\eta)+\frac{\beta}{\alpha}\frac{n}{n+m}$ 的零点，按照上诉式子 z_1 必须是 $f(z)$ 的极点，设为 $q_1(\geq 1)$ 重，此时 $p_1=(n+m)q_1+1\geq n+m+1$。

如果 $f^{m}(z+\eta)+\frac{\beta}{\alpha}\frac{n}{n+m}$ 有一个零点 z_2，设为 $p_2(\geq 1)$ 重，那么 z_2 必须是 $f(z)$ 的极点，设 $q_2(\geq 1)$ 重。

当 $p_2=1$ 时， z_2 就不是 $f'(z+\eta)$ 的零点，也就是有 $1=p_2=(n+m)q_2+1$ 矛盾，所以推出 $p_2\geq 1$。此时可以得到 z_2 是 $f'(z+\eta)$ 的零点，重数为的 p_2-1。根据分析有 $p_2+p_2-1=(n+m)q_2+1$，则 $p_2=\frac{(n+m)q_2}{2}+1\geq\frac{n+m+2}{2}$。反过来分析如果 $f^{m}(z)+\frac{\beta}{\alpha}\frac{n}{n+m}$ 有零点，那么至少为 $\frac{n+m+2}{2}$ 重。此时

$$\begin{aligned}\overline{N}(r,f(z))&\leq\overline{N}\left(r,\frac{1}{f(z+\eta)}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{m}(z+\eta)+\frac{\beta}{\alpha}\frac{n}{n+m}}\right)+\overline{N_0}\left(r,\frac{1}{f'(z+\eta)}\right)\\&\leq\frac{m}{n+m-2}N\left(r,\frac{1}{f(z+\eta)}\right)+\frac{2}{n+m+2}N\left(r,\frac{1}{f^{m}(z+\eta)+\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{n+m+1}}\right)+\frac{1}{n+2}N_0\left(r,\frac{1}{f'(z+\eta)}\right)\\&\leq\frac{m+3}{n+m-2}T(r,f(z+\eta))+S(r,f(z+\eta))\\&\leq\frac{m+3}{n+m-2}T(r,f(z))+S(r,f(z)).\end{aligned}$$

由第二基本定理得

$$\begin{aligned}T(r,f(z))&\leq\overline{N}(r,f(z))+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f(z)}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f(z)-\left(-\frac{\beta}{\alpha}\frac{n}{n+m}\right)^{\frac{1}{m}}}\right)+S(r,f(z))\\&\leq\left(\frac{m+3}{n+m-2}+\frac{m}{n+m-2}+\frac{1}{n+m+1}\right)T(r,f(z))+S(r,f(z))\\&\leq\frac{2m+4}{n+m-2}T(r,f(z))+S(r,f(z)).\end{aligned}$$

即 $\frac{n-m-6}{n+m-2}T(r,f(z))\leq S(r,f(z))$，与已知条件矛盾。

2) 当 $k\geq 2$ 时， $\left(f^{n}(z)\left(\alpha f^{m}(z)+\beta\right)\right)^{(k)}\left(f^{n}(z+\eta)\left(\alpha f^{m}(z+\eta)+\beta\right)\right)^{(k)}\equiv 1$。

如果 $\alpha f^{m}(z+\eta)+\beta$ 有一个零点，设该点为 z_3，其重数为 $p_3(\geq 1)$ 重，可以知道 z_3 也是 $\left(f^{n}(z+\eta)\left(\alpha f^{m}(z+\eta)+\beta\right)\right)^{(k)}$ 的零点，而根据分析可以知道 z_3 是 $f(z)$ 的极点，设为 q_3 重，并且满足

$p_3-k=(n+m)q_3+k$，也就是有 $p_3\ge n+m+2k$。

如果 $f(z)$ 有一个极点，设该极点为 z_4，但同时它不是 $f(z+\eta)$ 和 $\alpha f^m(z+\eta)+\beta$ 的零点，则按照分析 z_4 必须是 $\dfrac{\left(f^n(z+\eta)\left(\alpha f^m(z+\eta)+\beta\right)\right)^{(k)}}{\alpha f^m(z+\eta)+\beta}$ 的零点，其重数大于等于 $n+m+k$。此时

$$
\begin{aligned}
&(n+m+k)\left[\bar{N}(r,f(z))-\bar{N}\left(r,\frac{1}{f(z+\eta)}\right)-\bar{N}_{(n+m+2k}\left(r,\frac{1}{\alpha f^m(z+\eta)+\beta}\right)\right]\\
&\le N\left(r,\frac{\left(f^n(z+\eta)\left(\alpha f^m(z+\eta)+\beta\right)\right)}{\left(f^n(z+\eta)\left(\alpha f^m(z+\eta)+\beta\right)\right)^{(k)}}\right)\\
&\le N\left(r,\frac{1}{\left(f^n(z+\eta)\left(\alpha f^m(z+\eta)+\beta\right)\right)^{(k)}}\right)\\
&\le N_{k+1}\left(r,\frac{1}{f^n(z+\eta)(\alpha f^m(z+\eta)+\beta}\right)+k\bar{N}(r,f(z+\eta))+S(r,f(z+\eta))\\
&\le k\bar{N}(r,f(z))+(k+1)\bar{N}\left(r,\frac{1}{f(z+\eta)}\right)+N\left(r,\frac{1}{\alpha f^m(z)+\beta}\right)+S(r,f(z)).
\end{aligned}
$$

移项得

$$
\begin{aligned}
&(n+m)\bar{N}(r,f(z))\\
&\le(n+m+2k+1)\bar{N}\left(r,\frac{1}{f(z+\eta)}\right)+N\left(r,\frac{1}{\alpha f^m(z+\eta)+\beta}\right)\\
&\quad+(n+m+k)\bar{N}_{(n+m+2k}\left(r,\frac{1}{\alpha f^m(z+\eta)+\beta}\right)+S(r,f(z))\\
&\le\frac{n+m+2k+1}{\frac{n-2k}{m}+1}N\left(r,\frac{1}{f(z+\eta)}\right)+N\left(r,\frac{1}{\alpha f^m(z+\eta)+\beta}\right)\\
&\quad+\frac{n+m+k}{n+m+2k}N\left(r,\frac{1}{\alpha f^m(z+\eta)+\beta}\right)+S(r,f(z))\\
&\le\left(m+\frac{4km+m}{n-2k+m}\right)T(r,f(z+\eta))+mT(r,f(z+\eta))\\
&\quad+\left(m-\frac{m}{n+2k+m}\right)T(r,f(z+\eta))+S(r,f(z))\\
&\le\left(3m+\frac{4km}{n-2k+m}\right)T(r,f(z))+S(r,f(z)).
\end{aligned}
$$

此时 $\Theta(\infty,f(z))=1-\dfrac{1}{n+m}\left[3m+\dfrac{4km}{n-2k+m}\right]\ge\dfrac{1}{n+m}\left[n+m-3m-\dfrac{4km}{n-2k+m}\right]$

与 $\Theta(\infty,f)<\dfrac{1}{n+m}\left(n-2m-\dfrac{4km}{n+m-2k}\right)$ 矛盾。

子情形 2.2： 若 $J \neq -1$，则 $F = \dfrac{-1}{T\left(G-\dfrac{T+1}{T}\right)}$， $G = \dfrac{T+1}{T} + \dfrac{-1}{(T+1)\left(F-\dfrac{1}{T+1}\right)}$， 此时

$$\begin{aligned}
&(n+\tilde{m})T(r, f(z)) \\
&= T\left(r,\left(f^n(z)\left(\alpha f^m(z)+\beta\right)\right)\right)+O(1) \\
&\leq \bar{N}(r, f(z)) + N_{k+1}\left(r, \frac{1}{f^n(z)\left(\alpha f^m(z)+\beta\right)}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{\left(f^n(z)\left(\alpha f^m(z)+\beta\right)\right)^{(k)} - \dfrac{1}{T+1}}\right) + S(r, f(z)) \\
&\leq \bar{N}(r, f(z)) + (k+1)\bar{N}\left(r, \frac{1}{f(z)}\right) + N\left(r, \frac{1}{\alpha f^m(z)+\beta}\right) + \bar{N}(r, f(z+\eta)) + S(r, f(z)) \\
&\leq (k+2+\tilde{m})T(r, f(z)) + T(r, f(z+\eta)) + S(r, f(z)).
\end{aligned}$$

移项得

$$(n-k-2)T(r, f(z)) \leq T(r, f(z+\eta)) + S(r, f(z)). \tag{8}$$

同理

$$\begin{aligned}
&(n+\tilde{m})T(r, f(z+\eta)) \\
&= T\left(r, f^n(z+\eta)\left(\alpha f^m(z+\eta)+\beta\right)\right)+O(1) \\
&\leq \bar{N}(r, f(z+\eta)) + N_{k+1}\left(r, \frac{1}{f^n(z+\eta)\left(\alpha f^m(z+\eta)+\beta\right)}\right) \\
&\quad + \bar{N}\left(r, \frac{1}{\left(f^n(z+\eta)\left(\alpha f^m(z+\eta)+\beta\right)\right)^{(k)} - \dfrac{T+1}{T}}\right) + S(r, f(z+\eta)) \\
&\leq \bar{N}(r, f(z+\eta)) + (k+1)\bar{N}\left(r, \frac{1}{f(z+\eta)}\right) + N\left(r, \frac{1}{\alpha f^m(z+\eta)+\beta}\right) + \bar{N}(r, f(z)) + S(r, f(z+\eta)) \\
&\leq (k+2+\tilde{m})T(r, f(z+\eta)) + T(r, f(z)) + S(r, f(z+\eta)).
\end{aligned}$$

移项得

$$(n-k-2)T(r, f(z+\eta)) \leq T(r, f(z)) + S(r, f(z+\eta)). \tag{9}$$

结合(8)，(9)可以得到 $(n-k-3)\{T(r, f(z)) + T(r, f(z+\eta))\} \leq S(r, f(z)) + S(r, f(z+\eta))$ 。由于 $n > 3k+8+\tilde{m}$ ，此时与条件矛盾。

情形 3： $J = 0$， 同时 $T \neq 0$ 。

子情形 3.1： 如果 $T \neq 1$， 那么 $\dfrac{1}{G-1} = \dfrac{T}{F-1}$ ， 可以变形为 $G = \dfrac{F}{T} + \left(1-\dfrac{1}{T}\right)$， $F = TG + (1-T)$ 。接下来的证明过程与情形 1 相似推导得出矛盾。

子情形 3.2： 如果 $T = 1$， 那么 $F = G$ 。

子情形 3.2.1： 若 $\alpha\beta \neq 0$， 此时 $\tilde{m} = m$，

$$\left(f^n(z)\left(\alpha f^m(z)+\beta\right)\right)^{(k)} = \left(f^n(z+\eta)\left(\alpha f^m(z+\eta)+\beta\right)\right)^{(k)}.$$

对等式两边分别积分得到 $f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)=f^n(z+\eta)(\alpha f^m(z+\eta)+\beta)+Q_1(z)$，其中 $Q_1(z)$ 是次数不大于 $k-1$ 的多项式。

若 $Q_1(z)\neq 0$。考虑 f 是一个超越亚纯函数，

$$\begin{aligned}&(n+m)T(r,f(z))=T\left(r,\left(f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)\right)\right)+O(1)\\&\le \bar{N}(r,f(z))+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)-Q_1(z)}\right)+S(r,f(z))\\&\le(2+m)T(r,f(z))+(1+m)T(r,f(z+\eta))+S(r,f(z)).\end{aligned}$$

移项得 $(n-2)T(r,f(z))\le(1+m)T(r,f(z+\eta))+S(r,f(z))$。

同理 $(n-2)T(r,f(z+\eta))\le(1+m)T(r,f(z))+S(r,f(z+\eta))$。

结合上述两个式子可以得到 $(n-3-m)\{T(r,f(z))+T(r,f(z+\eta))\}\le S(r,f(z))+S(r,f(z+\eta))$，矛盾。

接下来考虑 f 是一个有理函数，$\dfrac{f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)}{Q_1(z)}=\dfrac{f^n(z+\eta)(\alpha f^m(z+\eta)+\beta)}{Q_1(z)}+1$，且 $\log r\le T(r,f)$。此时

$$\begin{aligned}&(n+m)T(r,f(z))\\&=T\left(r,\frac{f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)}{Q_1(z)}\right)+T(r,Q_1(z))+O(1)\\&\le\bar{N}\left(r,\frac{f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)}{Q_1(z)}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{Q_1(z)}{f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{\frac{f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)}{Q_1(z)}-1}\right)\\&\quad+T(r,Q_1(z))+S(r,f(z))\\&\le\bar{N}(r,f(z))+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f(z)}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{\alpha f^m(z)+\beta}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{Q_1(z)}{f^n(z+\eta)(\alpha f^m(z+\eta)+\beta)}\right)\\&\quad+2T(r,Q_1(z))+S(r,f(z))\\&\le(2+m)T(r,f(z))+(1+m)T(r,f(z+\eta))+2(k-1)\log r+S(r,f(z))\\&\le(2k+m)T(r,f(z))+(1+m)T(r,f(z+\eta))+S(r,f(z)).\end{aligned}$$

移项得 $(n-2k)T(r,f(z))\le(1+m)T(r,f(z+\eta))+S(r,f(z))$。

同理 $(n-2k)T(r,f(z+\eta))\le(1+m)T(r,f(z))+S(r,f(z+\eta))$。

结合上述两个式子可以得到 $(n-2k-1-m)\{T(r,f(z))+T(r,f(z+\eta))\}\le S(r,f(z))+S(r,f(z+\eta))$，矛盾。则 $Q_1(z)\equiv 0$。

此时 $f^n(z)(\alpha f^m(z)+\beta)=f^n(z+\eta)(\alpha f^m(z+\eta)+\beta)$。

令 $h=\dfrac{f(z)}{f(z+\eta)}$。若 $h\neq 1$，此时有

$$f^m=-\frac{\beta}{\alpha}\frac{1-h^n}{1-h^{n+m}}h^m=-\frac{\beta}{\alpha}\frac{(1+h+\cdots+h^{n-1})h^m}{1+h+\cdots+h^{n+m-1}}.$$

则 $mT\left(r,f\left(z\right)\right)=T\left(r,f^{m}\left(z\right)\right)=\left(n-m-1\right)T\left(r,h\right)+O\left(1\right)$，

且 $S\left(r,f\left(z\right)\right)=S\left(r,h\right)$。

由第二基本定理得

$$\bar{N}\left(r,f\left(z\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}\bar{N}\left(r,\frac{1}{h-\alpha_{j}}\right)+S\left(r,h\right)\geq\left(n-2\right)T\left(r,h\right)+S\left(r,h\right)=\frac{\left(n-2\right)m}{n+m-1}T\left(r,f\left(z\right)\right)+S\left(r,f\left(z\right)\right).$$

此时

$$\Theta\left(\infty,f\left(z\right)\right)=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\bar{N}\left(r,f\left(z\right)\right)}{T\left(r,f\left(z\right)\right)}\leq1-\frac{\left(n-2\right)m}{n+m-1}=\frac{n+\left(3-n\right)m-1}{n+m-1},$$

与 $\Theta\left(\infty,f\right)>\dfrac{n+\left(3-n\right)m-1}{n+m-1}$ 矛盾，则 $h\equiv1$，此时 $f\left(z\right)\equiv f\left(z+\eta\right)$。

子情形 3.2.2： 若 $\alpha\beta=0$。

子情形 3.2.2.1： $\alpha=0,\beta\neq0$，此时

$$\left(f^{n}\left(z\right)\beta\right)^{(k)}=\left(f^{n}\left(z+\eta\right)\beta\right)^{(k)}.$$

两边积分得 $f^{n}\left(z\right)\beta=f^{n}\left(z+\eta\right)\beta+Q_{1}\left(z\right)$，其中 $Q_{1}\left(z\right)$ 是次数小于等于 $k-1$ 的多项式。

(I) $Q_{1}\left(z\right)\not\equiv0.$

当 f 是超越亚纯函数时，有

$$\begin{aligned}nT\left(r,f\left(z\right)\right)&=T\left(r,f^{n}\left(z\right)\beta\right)+O\left(1\right)\\&\leq\bar{N}\left(r,f\left(z\right)\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{n}\left(z\right)\beta}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{n}\left(z\right)\beta-Q_{1}\left(z\right)}\right)+S\left(r,f\left(z\right)\right)\\&\leq2T\left(r,f\left(z\right)\right)+T\left(r,f\left(z+\eta\right)\right)+S\left(r,f\left(z\right)\right).\end{aligned}$$

移项得 $\left(n-2\right)T\left(r,f\left(z\right)\right)\leq T\left(r,f\left(z+\eta\right)\right)+S\left(r,f\left(z\right)\right)$。

同理 $\left(n-2\right)T\left(r,f\left(z+\eta\right)\right)\leq T\left(r,f\left(z\right)\right)+S\left(r,f\left(z+\eta\right)\right)$。

结合上述两个式子可以得到 $\left(n-3\right)\left\{T\left(r,f\left(z\right)\right)+T\left(r,f\left(z+\eta\right)\right)\right\}\leq S\left(r,f\left(z\right)\right)+S\left(r,f\left(z+\eta\right)\right)$，矛盾。

当 f 是有理函数时，有 $\dfrac{f^{n}\left(z\right)\beta}{Q_{1}\left(z\right)}=\dfrac{f^{n}\left(z+\eta\right)+\beta}{Q_{1}\left(z\right)}+1$，且 $\log r\leq T\left(r,f\right)$。此时

$$\begin{aligned}nT\left(r,f\left(z\right)\right)&=T\left(r,\frac{f^{n}\left(z\right)\beta}{Q_{1}\left(z\right)}\right)+T\left(r,Q_{1}\left(z\right)\right)+O\left(1\right)\\&\leq\bar{N}\left(r,\frac{f^{n}\left(z\right)\beta}{Q_{1}\left(z\right)}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{Q_{1}\left(z\right)}{f^{n}\left(z\right)\beta}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{\frac{f^{n}\left(z\right)\beta}{Q_{1}\left(z\right)}-1}\right)+T\left(r,Q_{1}\left(z\right)\right)+S\left(r,f\left(z\right)\right)\\&\leq\bar{N}\left(r,f\left(z\right)\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f\left(z\right)}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{Q_{1}\left(z\right)}{f^{n}\left(z+\eta\right)\beta}\right)+2T\left(r,Q_{1}\left(z\right)\right)+S\left(r,f\left(z\right)\right)\\&\leq\bar{N}\left(r,f\left(z\right)\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f\left(z\right)}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f\left(z+\eta\right)}\right)+2\left(k-1\right)\log r+S\left(r,f\left(z\right)\right)\\&\leq2kT\left(r,f\left(z\right)\right)+T\left(r,f\left(z+\eta\right)\right)+S\left(r,f\left(z\right)\right).\end{aligned}$$

移项得 $(n-2k)T(r,f(z)) \le T(r,f(z+\eta))+S(r,f(z))$。

同理 $(n-2k)T(r,f(z+\eta)) \le T(r,f(z))+S(r,f(z+\eta))$。

结合上述两个式子可以得到 $(n-2k-1)\{T(r,f(z))+T(r,f(z+\eta))\} \le S(r,f(z))+S(r,f(z+\eta))$，矛盾。

则 $Q_1(z)\equiv 0$。

此时 $f^n(z)\beta = f^n(z+\eta)\beta$，即 $f^n(z)=f^n(z+\eta)$，则

$$f(z)\equiv tf(z+\eta), t^n\equiv 1.$$

子情形 3.2.2.2： $\alpha\ne 0$，$\beta=0$，此时 $\left(f^n(z)\left(\alpha f^m(z)\right)\right)^{(k)}=\left(f^n(z+\eta)\left(\alpha f^m(z+\eta)\right)\right)^{(k)}$，即

$$\left(\alpha f^{n+m}(z)\right)^{(k)}=\left(\alpha f^{n+m}(z+\eta)\right)^{(k)}.$$

推导与分析过程与子情形 3.2.2.1 相同，只需要将其中的 n 变为 $n+m$，则此时有 $f(z)\equiv tf(z+\eta)$，$t^{n+m}\equiv 1$。

到此为止该情况证毕。

(II) 当 $l=1$ 时，

$$\overline{N^L}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\le\frac{1}{2}N\left(r,\frac{F}{F'}\right)\le\frac{1}{2}N\left(r,\frac{F'}{F}\right)+S(r,f)\le\left(k+1+\frac{\tilde{m}}{2}\right)T(r,f)+S(r,f).$$

同理 $\overline{N^L}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\le\left(k+1+\frac{\tilde{m}}{2}\right)T(r,f(z+\eta))+S(r,f(z+\eta)).$

根据引理 2，此时有

$$\left(n-4k-9-\frac{3\tilde{m}}{2}\right)\{T(r,f(z))+T(r,f(z+\eta))\}\le S(r,f(z))+S(r,f(z+\eta)),$$

与 $n\ge 4k+9+\frac{3\tilde{m}}{2}$ 矛盾，接下来类似(I)证明过程可得结论。

(III) 当 $l=0$ 时，

此时 $\overline{N^L}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\le(2k+2+\tilde{m})T(r,f)+S(r,f)$。

同理 $\overline{N^L}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\le(2k+2+\tilde{m})T(r,f(z+\eta))+S(r,f(z+\eta))$。

根据引理 1，此时有

$$(n-9k-14-4\tilde{m})\{T(r,f(z))+T(r,f(z+\eta))\}\le S(r,f(z))+S(r,f(z+\eta)),$$

与 $n\ge 9k+14+4\tilde{m}$ 矛盾，接下来类似(I)证明过程可得结论。

4. 结论

本文主要研究一类非线性微分多项式的值分布，以亚纯函数唯一性理论及其差分模拟理论为工具，结合权弱分担值思想去研究这类多项式的亚纯函数的唯一性问题，该研究结果改进和完善了定理 D，丰富目前具有权弱分担值的微分多项式的亚纯函数的唯一性问题。后续的进一步研究，可以将研究对象推广到更复杂的微分多项式，如研究具有线性差分算子的微分多项式；或者不再考虑权弱分担值的问题，转而考虑分担值集甚至是分担小函数的情况，探究其唯一性问题。

致　谢

作者衷心感谢导师林伟川教授对本文的指导。

基金项目

福建省自然科学基金青年创新项目(2022J05050)。

参考文献

[1] Yi, H.X. and Yang, C.C. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Science Press.

[2] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Science Press.

[3] Nevanlinna, R. (1925) Zur Theorie der Meromorphen Funktionen. *Acta Mathematica*, **46**, 1-99. https://doi.org/10.1007/bf02543858

[4] Nevanlinna, R. (1930) Über die Herstellung transzendenter Funktionen als Grenzwerte rationaler Funktionen. *Acta Mathematica*, **55**, 259-276. https://doi.org/10.1007/bf02546512

[5] Nevanlinna, R. (1935) Uber die eigenschaften meronorpher Funktionen in einem winkelraum. *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, **50**, 1-45.

[6] Hayman, W.K. (1959) Picard Values of Meromorphic Functions and Their Derivatives. *The Annals of Mathematics*, **70**, 9. https://doi.org/10.2307/1969890

[7] Yang, C.C. and Hua, X.H. (1997) Uniqueness and Value Sharing of Meromorphic Functions. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, **22**, 395-406.

[8] 李效敏，石悦，李岗. 涉及微分多项式和差分多项式的亚纯函数的唯一性[J]. 中国海洋大学学报, 2015, 45(5): 131-138.

[9] 林珊华，林伟川. 具有权弱分担值的差分或微分多项式的亚纯函数的唯一性[J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2018, 46(1): 12-19.

[10] Zhang, J.L. and Yang, L.Z. (2007) Some Results Related to a Conjecture of R. Brück. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **8**, 141-149.

[11] Lin, S.H. and Lin, W.C. (2006) Uniqueness of Meromorphic Functions Concerning Weakly Weighted Sharing. *Kodai Mathematical Journal*, **29**, 269-280.

[12] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press.

[13] Mokhonko, A.Z. (1971) On the Nevanlinna Characteristics of Some Meromorphic Functions. *Functional Analysis and Its Applications*, **14**, 83-87.

[14] Qi, X., Yang, L. and Liu, K. (2010) Uniqueness and Periodicity of Meromorphic Functions Concerning the Difference Operator. *Computers & Mathematics with Applications*, **60**, 1739-1746. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.07.004

[15] Chiang, Y. and Feng, S. (2008) On the Nevanlinna Characteristic of $f(z+\eta)$ and Difference Equations in the Complex Plane. *The Ramanujan Journal*, **16**, 105-129. https://doi.org/10.1007/s11139-007-9101-1

[16] Frank, G. (1976) Eine Vermutung von Hayman über Nullstellen meromorpher Funktionen. *Mathematische Zeitschrift*, **149**, 29-36. https://doi.org/10.1007/bf01301627