Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(3), 98-103
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.153080

高阶CLL方程的一相解研究

张彩丽

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2025年2月5日；录用日期：2025年3月2日；发布日期：2025年3月13日

摘 要

我们介绍了高阶CLL方程以及一相解，并且描述了高阶CLL方程的一相解。我们将高阶陈－李－刘方程的一相解将通过有限间隙积分法得出。

关键词

高阶CLL方程，一相解，有限间隙积分法

A Study of One-Phase Solutions of Higher-Order CLL Equations

Caili Zhang

School of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 5th, 2025; accepted: Mar. 2nd, 2025; published: Mar. 13th, 2025

Abstract

We introduce the higher-order CLL equations as well as one-phase solutions and describe the one-phase solutions of the higher-order CLL equations. The one-phase solution of the higher-order Chen-Lee-Liu equation will be derived by the finite-gap integration method.

Keywords

Higher Order CLL Equations, One-Phase Solution, Finite Gap Integral Method

文章引用: 张彩丽. 高阶 CLL 方程的一相解研究[J]. 理论数学, 2025, 15(3): 98-103.
DOI: 10.12677/pm.2025.153080

1. 高阶 CLL 方程的背景

高阶 CLL 方程(Cauchy-Lipschitz 方程)广泛应用于数学、物理学和工程学的许多领域，尤其是在描述非线性动力学、控制系统和最优控制问题方面。对于控制问题，高阶方程用于描述物理系统的动态行为、尤其是涉及振动、波动和流体动力学的问题的方程[1] [2]。例如，在经典物理学中，振动系统、波动方程等都可以用高阶微分方程来模拟[3] [4]。在这类模型中，系统状态由位置、速度、加速度等多个变量组成，因此，高阶方程能够更全面地描述系统的动态特性。CLL 方程的核心思想通常是研究带有初值问题的常微分方程，并特别关注其存在性、唯一性和稳定性。为了更好地理解高阶 CLL 方程的应用，首先有必要澄清 CLL 方程的背景和起源。对于高阶 CLL 方程的背景和起源，高阶 CLL 方程最早出现在非线性物理学领域，尤其是在波动性研究中[5]。

高阶 CLL 方程是

$$q_t + q_{xxx} + \frac{3}{2} i |q|^2 q_{xx} - \frac{3}{4} |q|^4 q_x + \frac{3}{2} i q_x^2 q^* = 0,$$

它的 LAX 对是如下的形式

$$\Psi_X = \begin{pmatrix} F & G \\ H & -F \end{pmatrix} \Psi,$$

$$\Psi_t = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \Psi。$$

2. 有限间隙积分法

在偏微分方程(PDEs)中，有限间隙积分法(Finite Gap Integral Method)是一种数值解法，特别用于处理那些具有间断、尖峰或者不连续性的边界条件和解。这种方法可以通过将问题域划分成若干个小区间(或小区域)，在每个小区间上进行积分近似，从而逐步逼近整个问题的解。有限间隙积分法的基本概念在于，在偏微分方程的求解中，间隙通常指的是一些不连续或存在特殊行为的区域，比如：边界层效应，例如流体力学中的边界层问题；材料的异质性，如固体力学中材料的不同区域属性；界面问题，例如不同物质的分界面上存在的跳跃或不连续。有限间隙积分法的目标是将这些间断点或边界效应的影响分段处理，使得每个小区域内的解可以通过积分来逼近。

有限间隙积分法的方法步骤在于，有限间隙积分法解决偏微分方程时，通常有如下步骤：划分网格(间隙划分)：将问题域划分为多个小的有限区域，称为“间隙”或“区间”。每个间隙可能是空间的一个小区间或时间的一个小段，具体取决于问题的性质。这些间隙内部可以假设为连续的，只有在间隙的边界上存在不连续性。构造积分表达式：对于每个小间隙，构造局部的积分方程。这通常依赖于所求解的 PDE 的类型，比如求解热传导方程、波动方程、弹性方程等，可以通过积分的方式得到数值解。求解局部问题：在每个小间隙内，求解该区域的局部 PDE。对于不连续的问题，可能需要使用加权积分法、加权残差法等数值方法来处理不连续的情况。局部的求解会生成该间隙内的数值解。拼接解：将每个间隙内的数值解拼接起来，保证在相邻间隙的边界处，解是连续或满足所给的边界条件。在拼接过程中可能需要对边界进行特别处理，确保整个解的连续性和准确性。全局求解：通过将所有局部解拼接起来，得到整个问题的全局解。这时通常需要对所有区间的解进行平滑、优化和验证，确保解的整体一致性。

有限间隙积分法的基本思想是将问题域分解成有限个子区间，每个子区间内部可能存在不同的“间隙”或不连续性。在这些子区间内进行积分时，考虑到间隙的特性，采取适当的数值积分方法进行计算。

通常，有限间隙积分法是将问题从连续域分解为若干个具有“间隙”的部分，然后在这些部分上施

加相应的边界条件或者假设，计算出每个部分的解，并结合它们得到整个系统的解。

以下是有限间隙积分法的一般推导过程，假设我们要解一个具有间隙或者不连续性质的问题。

步骤 1：问题定义

假设我们有一个目标方程(可以是常微分方程、偏微分方程等)，例如：

$$Lu(x)=f(x), x\in[a,b]$$

其中 L 是一个线性算子，$u(x)$ 是待求解的未知函数，$f(x)$ 是已知的外部函数。

步骤 2：分割问题域

我们将问题域 $[a,b]$ 划分为若干个小区间，每个小区间可能包含不连续点或者间隙。例如，假设我们将区间划分为 N 个小区间：

$$[a,b]=[a_0,a_1],[a_1,a_2],\cdots,[a_{N-1},a_N]$$

每个小区间内，我们假设解 $u(x)$ 可能存在不连续性或者间隙。

步骤 3：考虑边界条件

在每个子区间内，我们考虑合适的边界条件。对于每个小区间 $[a_i,a_{i+1}]$，可以应用一些适当的数值方法(如加权残差法、有限差分法、有限元法等)进行求解。特别地，我们要考虑到在这些小区间的边界处可能存在间隙或者不连续性，因此需要特殊处理这些边界条件。

步骤 4：局部积分

对每个小区间 $[a_i,a_{i+1}]$，我们使用适当的数值积分方法来计算积分。通常，数值积分方法如梯形法、辛普森法等可以用来近似积分。具体来说，我们在每个小区间内计算积分。这里的积分要特别注意间隙的处理，可能需要在每个子区间内施加加权因子或者调整积分区域，以处理间隙造成的影响。

步骤 5：全局组装

将每个子区间的计算结果汇总，形成全局的系统。假设每个小区间都得到局部解 $u_i(x)$，我们可以将这些解组合起来，得到整个问题的近似解。这个过程通常会涉及到将每个子问题的解拼接起来，并解决由于间隙或者不连续性造成的边界条件耦合。

步骤 6：解方程

得到组合后的全局方程之后，求解该方程，得到整个系统的解。这里的求解可以采用直接解法(如高斯消元法)或者迭代方法(如雅可比法、共轭梯度法等)。

有限间隙积分法的优越性体现在，有限间隙积分法特别适用于复杂问题，尤其是那些具有不规则几何形状或材料性质变化的问题。相比于传统的积分方法，它能够根据问题的特点灵活调整，从而提高计算精度和效率。该方法能够通过精确计算每一个小区域的贡献来提高积分精度，特别是在高阶非线性问题或者边界条件变化较大的情况下，比其他传统方法更能保持较高的计算精度。在高维问题(例如三维结构或多维热传导问题)的求解中，有限间隙积分法也能有效地应用，尤其是在需要处理三维应力场或复杂物理场分布时，能够提供较高的数值精度和更好的适应性。

总体来说，有限间隙积分法在解决复杂、多变、非线性物理问题时，具备了较高的计算精度、较强的适应性以及较好的稳定性，尤其在需要处理不规则几何、复杂边界条件、动态响应等情况下，表现得尤为优越。

有限间隙积分法的应用实例：有限间隙积分法可以应用于许多实际的偏微分方程求解问题，尤其是在处理不连续边界或间隙时。以下是一些常见的应用领域：热传导问题：在热传导方程中，如果材料的热导率具有间断(如复合材料的界面处)，则可以使用有限间隙积分法将热传导方程分解成多个小区域，在每个区域内分别进行求解，再合并结果。弹性力学问题：对于固体力学中的问题，特别是在材料存在不

同弹性模量的区域时，有限间隙积分法可以处理每个材料区域的应力、应变计算。对于接触问题、裂纹问题等，间隙积分法能够精确处理不连续的边界条件。流体力学问题：在流体动力学中，特别是边界层问题或者激波传播问题，存在很强的不连续性。有限间隙积分法可以通过将问题域划分为不同的区域来更好地处理这些不连续现象。非线性偏微分方程：在处理具有非线性项的偏微分方程时，可能会遇到解的间断或奇异性。有限间隙积分法能够有效应对这种非线性带来的挑战，提供数值解。有限间隙积分法的优势和局限性其优势：

精度较高：尤其在处理间断、边界层和不连续性时，比其他常规的数值方法更精确。灵活性：可以适应不同类型的边界条件和不连续区域，具有较好的通用性。

适用于复杂问题：如在处理多物理场耦合的复杂问题时，有限间隙积分法提供了很好的解决框架。其局限性：计算复杂度高：将问题划分为多个小区域并逐个求解，尤其在高维问题中计算量可能非常大。对划分的依赖性强：若划分的网格不合理，可能会导致数值解的不准确或者收敛性差。边界处理要求高：在间隙之间的拼接和边界条件的处理上，需要非常小心，避免引入错误。

有限间隙积分法总结来说，有限间隙积分法是一种强大的数值方法，特别适用于处理具有间断、不连续性或复杂边界条件的偏微分方程问题。它能够将复杂问题分解为较为简单的子问题，并通过积分逼近整体解。虽然计算复杂度较高，但在解决实际工程和物理问题中具有重要的应用价值。

3. 周期解以及一相解的描述

周期解是指在动态系统或方程中，解在经过一定时间后会重复出现，形成周期性的行为。周期解通常用于描述那些具有周期性或重复特征的物理、数学和工程系统。在不同的学科领域中，周期解有不同的具体表现形式，但其核心特点是“定期重复”。数学中的周期解，特别是在常微分方程(ODE)和偏微分方程(PDE)的解中，周期解是指系统的状态变量随着时间(或某个独立变量)变化，并且每经过一定的时间周期后，系统的状态会恢复到最初的状态。数学上，如果有一个解 $x(t)$，使得 $x(t+T)=x(t)$。对于任意的 t 和某个固定的周期 $T>0$，那么这个解就是周期解，其中 T 是周期。其中典型的例子是简单的振动系统，比如弹簧–质量系统，其中物体的运动在经过一定时间后会回到原来的位置，形成周期运动。

一相解通常指的是在这种方程下，系统在某种特定条件下的稳定解，通常是系统在长时间演化后的平衡态或稳态解。对于高阶 CLL 方程的定义，一相解的含义：一相解指的是系统在特定条件下达到的稳定解。例如 $f(x)$ 是一个对称的势能函数，那么在没有外部驱动时，系统可能在 $x=0$ 处稳定。噪声项 $\eta(t)$ 会导致系统的随机性，但在平衡态下，系统的某些统计性质(例如均值或方差)是可以定量描述的。对于稳态解的求解：在噪声驱动的高阶方程中，一相解通常是系统在噪声扰动下的平衡态。为了得到这种解，可以通过求解 Fokker-Planck 方程或进行平均场近似，从而得到稳态概率分布。分析这些解时，通常会使用到各种随机过程的工具，例如马尔科夫过程、白噪声理论等。解析与数值方法：解析解通常只能针对某些简单的特例得到，尤其是在噪声项较弱或非线性项较简单时。对于更一般的系统，通常需要数值模拟(如使用蒙特卡洛方法或求解数值差分方程)来获得稳态解。

我们定义 $P(\lambda)$ 是单相周期解的 λ 的四次多项式，即

$$f^2-gh=\lambda^8-s_1\lambda^6+s_2\lambda^4-s_3\lambda^2+s_4$$

这里是多项式四个零点 λ_i 的对称函数

其中 $v=|\phi|^2$。

这个系统允许将 $f_1(x,t)$、$f_2(x,t)$、$\mu(x,t)$ 和 $\mu^*(x,t)$ 表述为 v 的函数：

其中 $s_1=\sum_i \lambda_i^2$,

$$s_2=\sum_{i<j}\lambda_i^2\lambda_j^2,$$

$$s_3=\sum_{i<j<k}\lambda_i^2\lambda_j^2\lambda_k^2,$$

$$s_4=\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_4^2,$$

对于一相解的 f,g,h 是

其中 $f=\lambda^4-f_1\lambda^2+f_2$,

$$g=\lambda\left(\lambda^2-\mu\right)q,$$

$$h=\lambda\left(\lambda^2-\mu^*\right)q^*,$$

其中 $s_1=2f_1+\nu$,

$$s_2=f_1^2+2f_2-\nu\left(\mu+\mu^*\right),$$

$$s_3=-2f_1f_2+\nu\mu\mu^*,$$

其中 $f_1=\left(s_1-\nu\right)/2$，

$$f_2=\pm\sqrt{s_4},$$

得到高阶 CLL 方程的一相解是

$$\mu,\mu^*=\frac{1}{8\nu}\left(-4s_2+8\sqrt{s_4}+\left(\nu-s_1^2\right)+i\sqrt{-R(\nu)}\right),$$

其中 $$\begin{aligned}R(\nu)=&\nu^4+4s_1\nu^3+\left(6s_1^2-8s_2\pm48\sqrt{s_4}\right)\nu^2+\left(4s_1^3-16s_1s_2+64s_3-33s_1\sqrt{s_4}\right)\nu\\&+s_1^4-8s_1^2s_2+16s_2^2+16s_1^2\sqrt{s_4}-64s_2\sqrt{s_2}+64s_4\end{aligned}$$

通过对称公式，$P(\lambda)$ 的零点 ν_i 与 $P(\lambda)$ 的零点 λ_j 相关，因此被称为多项式 $P(\lambda)$ 的溶解式。

高阶 CLL (Chiral Luttinger Liquid)方程的一相解是指在一维量子多体系统中，系统处于一个稳定的、无相变的基态。在量子物理和凝聚态物理中，Luttinger 液体是一种描述一维系统中粒子相互作用的有效理论。高阶 CLL 方程的研究主要应用于描述更复杂的多体相互作用，尤其是涉及更高阶关联效应的系统。高阶 CLL 方程的一相解在量子多体系统的研究中具有重要意义，它有助于我们理解粒子相互作用、量子涨落、系统稳定性等方面的物理现象，并为描述复杂的凝聚态相态提供理论框架。

4. 结论

我们通过有限间隙积分法得到了高阶 CLL 方程的一相解，具体而言，高阶 CLL 方程的一相解往往依赖于系统的参数和噪声项的性质。对于白噪声驱动的系统，稳态解通常表现为一种平衡分布，如高斯分布。而对于时间相关的噪声或强非线性系统，稳态分布可能会表现出复杂的形式。一些经典的结论包括：在平衡态下，系统的随机波动遵循热力学平衡分布，系统的期望值和方差可以通过噪声强度和系统参数来估算。在弱噪声极限下，系统的稳态分布通常可以通过扩散方程来近似。在强非线性和强噪声的情况下，可能出现随机共振等现象，即系统在特定频率或条件下能在噪声的作用下表现出有规律的响应。高阶 CLL 方程的一相解主要是描述在噪声和非线性相互作用下，系统的平衡或稳态行为。结论通常涉及以下几个方面：系统会在一定条件下达到稳态，且这种稳态通常是与系统的噪声强度、非线性力项和阻尼项密切相关的。稳态解可能表现为不同的分布，如高斯分布、泊松分布等，具体形式依赖于系统的参数。在某些特殊情况下，系统可能会展现出混沌、周期性等复杂动态行为。这些结论帮助我们理解高阶

CLL 方程在物理学、化学、以及生物系统中的应用，尤其是在描述随机动力学和复杂系统时，提供了有力的理论工具。

参考文献

[1] Whitham, G.B. (1965) Non-Linear Dispersive Waves. *Proceedings of the Royal Society A. Mathematical*, *Physical and Engineering Sciences*, **283**, 238-261. https://doi.org/10.1098/rspa.1965.0019

[2] Flaschka, H., Forest, M.G. and Mclaughlin, D.W. (1980) Multiphase Averaging and the Inverse Spectral Solution of the Korteweg-Del Vries Equation. *Communications on Pure Applied Mathematics*, **33**, 739-784. https://doi.org/10.1002/cpa.3160330605

[3] Wang, D.S., Xu, L. and Xuan, Z.X. (2022) The Complete Classification of Solutions to the Riemann Problem of the Defocusing Complex Modified KdV Equation. *Journal of Nonlinear Science*, **32**, Article Number 3. https://doi.org/10.1007/s00332-021-09766-6

[4] Kong, L.Q., Wang, L., Wang, D.S., Dai, C.Q., Wen, X.Y. and Xu, L. (2019) Evolution of Initial Discontinuity for the Defocusing Complex Modified KdV Equation. *Nonlinear Dynamics*, **98**, 691-702. https://doi.org/10.1007/s11071-019-05222-z

[5] Menikoff, R. and Plohr, B.J. (1989) The Riemann Problem for Fluid Flow of Real Materials. *Reviews of Modern Physics*, **61**, 75-130. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.61.75