

基于量子Bernoulli噪声方法的超立方体上的磁量子游荡

杨 铮

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2025年1月26日; 录用日期: 2025年2月28日; 发布日期: 2025年3月13日

摘 要

本文介绍并研究了Bernoulli泛函框架下的离散时间磁量子游荡。根据作用于Bernoulli泛函的湮灭和增生算子引入了磁位移算子 $(e^{-i\theta_k}\partial_k^* + e^{i\theta_k}\partial_k)$, 其中 $e^{-i\theta_k}\partial_k^*$ 和 $e^{i\theta_k}\partial_k$ 分别是作用于Bernoulli泛函的磁增生和湮灭算子, 然后在此基础上使用它们来定义新的磁量子游荡模型。

关键词

量子Bernoulli噪声, 超立方体, 磁量子游荡

Magnetic Quantum Walk on the Hypercube in Terms of Quantum Bernoulli Noises Method

Zheng Yang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jan. 26th, 2025; accepted: Feb. 28th, 2025; published: Mar. 13th, 2025

Abstract

In this paper, we introduce and investigate a discrete-time magnetic quantum walk in the framework of Bernoulli functionals. We first introduce magnetic shift operators $(e^{-i\theta_k}\partial_k^* + e^{i\theta_k}\partial_k)$ in terms of the annihilation and creation operators acting on Bernoulli functionals, where $e^{-i\theta_k}\partial_k^*$ and

$e^{i\theta_k} \partial_k$ are the magnetic creation and annihilation operators acting on Bernoulli functionals. On this basis, we constructed a new model of magnetic quantum walk on the hypercube.

Keywords

Quantum Bernoulli Noises, Hypercube, Magnetic Quantum Walk

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

作为经典随机游荡的量子类似物, 量子游荡[1]在量子信息、量子计算和许多其他研究领域得到了广泛的应用。1997年, Grover 首次设计了一种基于量子游荡的量子搜索算法, 现在被称为 Grover 游荡[2]。2010年, Chin 等人[3]解释了量子网络中的噪声辅助能量转移, 这实际上表明量子游荡可以为量子系统中的输运建模提供一个有用的框架。量子游荡还有许多其他应用结果(例如, 参见[4]-[6]和其中的参考文献)。磁量子游荡是一种与磁场耦合的量子游荡, 用于研究粒子在磁场中的运动, 在数学和物理领域具有深远的研究意义。

从数学物理的角度来看, 量子游荡通常涉及两个复杂的 Hilbert 空间: 一个被称为位置空间, 描述量子游荡者的位置信息, 另一个被称作硬币空间, 描述量子游荡者的内部自由度。它们的张量空间充当量子游荡的系统空间。

量子 Bernoulli 噪声是一类作用于伯努利泛函的湮灭和增生算子, 在相等时间内满足正则反交换关系 (CAR), 可以提供一种研究环境对量子系统影响的方法。2016年, 王和叶[7]使用量子 Bernoulli 噪声在具有无限内部自由度的一维整数晶格上构建了离散时间量子随机游荡。2022年, 通过使用量子 Bernoulli 噪声方法, 王[8]引入了超立方体上的离散时间量子游荡。在本文中, 我们想将超立方体上的离散时间量子游荡扩展到与磁场耦合的量子游荡, 更具体地说, 我们将在量子 Bernoulli 泛函的框架下引入一个超立方体上离散时间磁量子游荡的模型。

2. 预备知识

量子 Bernoulli 噪声

本节简单回顾关于量子 Bernoulli 噪声的一些基本概念、记号和一般结果, 详细内容见文[9]-[11]及其参考文献。

本文中, $\mathbb{Z}$ 表示整数集, $\mathbb{N}$ 表示非负整数集, Γ 表示 $\mathbb{N}$ 的有限幂集, 即

$$\Gamma = \{\sigma | \sigma \subset \mathbb{N}, \#(\sigma) < \infty\}, \quad (2.1)$$

此处 $\#(\sigma)$ 指 σ 所包含的元素个数。

设 Σ 表示所有映射 $\Sigma: \mathbb{N} \mapsto \{-1, 1\}$ 构成的集合, $(\zeta_n)_{n \geq 0}$ 为 Σ 上的典则投影序列, 亦即

$$\zeta_n(\sigma) = \sigma(n), \quad \sigma \in \Sigma. \quad (2.2)$$

以 $\mathcal{A}$ 表示 Σ 上由序列 $(\zeta_n)_{n \geq 0}$ 生成的 σ -域。设 $(p_n)_{n \geq 0}$ 是给定的正数序列, 其中 $0 < p_n < 1$, $n \geq 0$, 则在可测空间 $(\Sigma, \mathcal{A})$ 上存在唯一的概率测度 μ , 使得

$$\mu \circ (\zeta_{n_1}, \zeta_{n_2}, \dots, \zeta_{n_k})^{-1} \{(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k)\} = \prod_{j=1}^k p_{n_j}^{\frac{1+\epsilon_j}{2}} (1-p_{n_j})^{\frac{1-\epsilon_j}{2}}, \quad (2.3)$$

其中 $k \geq 1$, $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$, $n_j \in \mathbb{N} (1 \leq j \leq k)$ 满足: 当 $i \neq j$ 时, 有 $n_i \neq n_j$ 。

此时得到一个概率测度空间 $(\Sigma, \mathcal{A}, \mu)$, 称之为 Bernoulli 空间, 该空间上的复值随机变量称为 Bernoulli 泛函。设 $Z = (Z_n)_{n \geq 0}$ 是随机变量序列 $(\zeta_n)_{n \geq 0}$ 生成的 Bernoulli 泛函, 即

$$Z_n = \frac{\zeta_n + q_n - p_n}{2\sqrt{p_n q_n}}, \quad n \geq 0, \quad (2.4)$$

其中 $q_n = 1 - p_n$ 。显然, $Z = (Z_n)_{n \geq 0}$ 是概率测度空间 $(\Sigma, \mathcal{A}, \mu)$ 上的一系列独立的随机变量。

设 $\mathcal{H}$ 表示平方可积 Bernoulli 泛函空间, 即

$$\mathcal{H} = L^2(\Sigma, \mathcal{A}, \mu), \quad (2.5)$$

其中 $\mathcal{H}$ 上的内积和范数分别记作 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, 并约定 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ 关于第一个变量共轭线性, 关于第二个变量线性。由文献[9]可知, Z 具有混沌表示性质, 从而 $\mathfrak{Z} = \{Z_{\sigma} | \sigma \in \Gamma\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准正交基(ONB), 称之为 $\mathcal{H}$ 的典则 ONB, 其中 $Z_{\emptyset} = 1$,

$$Z_{\sigma} = \prod_{j \in \sigma} Z_j, \sigma \in \Gamma, \sigma \neq \emptyset. \quad (2.6)$$

显然 $\mathcal{H}$ 是一个无穷维的复 Hilbert 空间。易见, 对于每个 $n \geq 0$, $Z_n = Z_{\{n\}}$ 为 $\mathcal{H}$ 的典则 ONB 的一个基向量。

对每个非负整数 $k \geq 0$, 在空间 $\mathcal{H}$ 上存在有界算子 $\partial_k : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, 满足 $\|\partial_k\| = 1$ 且

$$\partial_k Z_{\sigma} = 1_{\sigma}(k) Z_{\sigma \setminus k}, \partial_k^* Z_{\sigma} = [1 - 1_{\sigma}(k)] Z_{\sigma \cup k}, \sigma \in \Gamma, \quad (2.7)$$

其中 ∂_k^* 表示 ∂_k 的共轭算子, $\sigma \setminus k = \sigma \setminus \{k\}$, $\sigma \cup k = \sigma \cup \{k\}$, 且 $1_{\sigma}(k)$ 是 σ 作为集合 $\mathbb{N}$ 的子集时的示性函数。

算子 ∂_k 及其共轭算子 ∂_k^* 称为作用于 Bernoulli 泛函的湮灭算子和增生算子, 且算子族 $\{\partial_k, \partial_k^*\}_{k \geq 0}$ 称为量子 Bernoulli 噪声。

由文献[12]可知, 量子 Bernoulli 噪声满足如下等时典则反交换关系(CAR)和其它运算关系:

$$\partial_j \partial_k = \partial_k \partial_j, \partial_j^* \partial_k^* = \partial_k^* \partial_j^*, \partial_j^* \partial_k = \partial_k \partial_j^* \quad (j \neq k), \quad (2.8)$$

且

$$\partial_k \partial_k = \partial_k^* \partial_k^* = 0, \partial_k \partial_k^* + \partial_k^* \partial_k = I_{\mathcal{H}} \quad (2.9)$$

其中 $I_{\mathcal{H}}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的单位算子。

对于一个非负整数 $n \geq 0$, 记 $\mathbb{N}_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, 用 Γ_n 表示它的幂集, 即 $\Gamma_n = \{\sigma | \sigma \subset \mathbb{N}_n\}$ 。显然, $\Gamma_n \subset \Gamma$, $\#(\Gamma_n) = 2^{n+1}$ 。

我们知道, $l^2(\Gamma_n)$ 表示 Γ_n 上的平方可和复值函数的 Hilbert 空间, 同时, 由 $\mathcal{H}$ 具有标准正交基 $\mathfrak{Z} = \{Z_{\sigma} | \sigma \in \Gamma\}$ 可知, 对于每一个 $n \geq 0$, 可以引入 $\mathcal{H}$ 的一系列线性子空间如下:

$$\mathcal{H}_n = \text{span}\{Z_{\sigma} | \sigma \in \Gamma_n\}.$$

根据之前的记号, $\mathcal{H}$ 是向量集 $\{Z_{\sigma} | \sigma \in \Gamma\}$ 所张成的线性子空间, 并且有 $\dim \mathcal{H} = 2^{n+1}$ 。由 Hilbert 空间的一般理论可知, 存在一个酉同构 $J: l^2(\Gamma_n) \rightarrow \mathcal{H}$ 。

一般来说, 量子游荡的数学框架包括两个复 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_n$ 和 $\mathcal{H}_c$ 。空间 $\mathcal{H}_n$ 用来描述游荡者的空间位置, 即位置空间, 空间 $\mathcal{H}_c$ 用来描述游荡者的内部自由度, 被称为硬币空间。

3. 基于 Bernoulli 噪声方法的超立方体上的磁量子游荡

在本节中,我们将介绍一种基于量子 Bernoulli 泛函的磁量子游荡模型。在下文中,我们假设 $n \geq 0$ 是一个给定的非负整数,并继续使用第 2 节中的假设和符号。

3.1. 磁位移算子

在量子力学中,位移算子(也称为平移算子或位移算符)是一个重要的工具,用于描述量子态在空间中的平移操作,在量子游荡中的应用尤为关键。通过位移算子,可以将一个量子态在不改变其内部性质(如动量分布或相位)的前提下从一个位置移动到另一个位置,例如,在一维离散量子游荡中,位移算子可以将量子态从一个格点移动到相邻格点。

定义 3.1. 对所有的 $n \geq 0$, $(\Gamma_n, \mathcal{E}_n)$ 是以 Γ_n 为顶点集, $\mathcal{E}_n$ 为边集的图, 其中

$$\mathcal{E}_n = \{ \{ \sigma, \tau \} \mid \sigma, \tau \in \Gamma_n, \tau \in \Gamma_n, \#(\sigma \Delta \tau) = 1 \}, \quad (3.1)$$

这里的 $\sigma \Delta \tau = (\sigma \setminus \tau) \cup (\tau \setminus \sigma)$, $\#(\sigma \Delta \tau)$ 是指集合 $\sigma \Delta \tau$ 的基数。

我们可以在图 $(\Gamma_n, \mathcal{E}_n)$ 上引入如下邻接关系: 对任意的两个点 σ, τ , 若 $\#(\sigma \Delta \tau) = 1$, 那么这两个点邻接, 用 $\sigma \sim \tau$ 表示。通过上面介绍的邻接关系, $(\Gamma_n, \mathcal{E}_n)$ 变成了一个有限图, 如[8]所示, $(\Gamma_n, \mathcal{E}_n)$ 实际上是一个 $(n+1)$ 正则图, 与 $(n+1)$ 维超立方体同构。

推论 3.1. 设 σ 是图 $(\Gamma_n, \mathcal{E}_n)$ 的顶点, 即 $\sigma \in \Gamma_n$, 则该结论成立: 当 $k \in \sigma$ 时, $\sigma \sim (\sigma \setminus k)$; 当 $k \notin \sigma$ 时, $\sigma \sim (\sigma \cup k)$ 。

定义 3.2. 对于任意的 $\sigma, \tau \in \Gamma_n$, 函数 $\theta: \Gamma_n \times \Gamma_n \rightarrow [-\pi, \pi]$ 满足 $\theta(\sigma, \tau) = -\theta(\tau, \sigma)$ 被称为 Γ_n 上的磁势 [13]。

显然, 通过定义 $\theta^{(0)}(\sigma, \tau) = 0$, 可以得到 Γ_n 上的磁势 $\theta^{(0)}$, 也可以证明 Γ_n 上确实存在一个非平凡的磁势。在下文中, 除非另有说明, 否则我们始终假设 θ 是 Γ_n 上的给定磁势。我们定义:

$$\theta_k = \theta(\{k\}, \mathbb{N}_n \setminus \{k\}), \quad k \in \mathbb{N}_n, \quad (3.2)$$

$\mathbb{N}_n \setminus \{k\}$ 是集合 $\mathbb{N}_n$ 和 $\{k\}$ 的差集。

命题 3.1. 对于所有的 $k \in \mathbb{N}_n$, 存在一个 $\mathcal{H}_n$ 上的自伴酉算子 $\Xi_k^{(\theta)} = (e^{-i\theta_k} \partial_k^* + e^{i\theta_k} \partial_k)$, 同时有 $[\Xi_k^{(\theta)}]^* = \Xi_k^{(\theta)}$ 以及 $[\Xi_k^{(\theta)}]^2 = I_{\mathcal{H}_n}$, 此处 $I_{\mathcal{H}_n}$ 是 $\mathcal{H}_n$ 上的单位算子。

证明. 根据 $\Xi_k^{(\theta)}$ 的定义有

$$[\Xi_k^{(\theta)}]^* = [e^{-i\theta_k} \partial_k^* + e^{i\theta_k} \partial_k]^* = e^{i\theta_k} \partial_k + e^{-i\theta_k} \partial_k^* = \Xi_k^{(\theta)},$$

另一方面, 我们可以直接计算得到

$$[\Xi_k^{(\theta)}]^2 = [e^{-i\theta_k} \partial_k^* + e^{i\theta_k} \partial_k]^2 = (e^{i\theta_k} \partial_k)^2 + (e^{-i\theta_k} \partial_k^*)^2 + \partial_k^* \partial_k + \partial_k \partial_k^* = I_{\mathcal{H}_n}.$$

显然我们得到了 $\Xi_k^{(\theta)}$ 是自伴算子的结论。

定理 3.1. 对于给定的 $\sigma, \tau \in \Gamma_n$, 当且仅当存在唯一的 $k \in \mathbb{N}_n$ 使得 $\sigma \sim \tau$, 此时有

$$(e^{-i\theta_k} \partial_k^* + e^{i\theta_k} \partial_k) Z_\sigma = [(1 - 1_\sigma(k)) e^{-i\theta_k} + 1_\sigma(k) e^{i\theta_k}] Z_\tau. \quad (3.3)$$

证明. 假设 $\sigma \sim \tau$, 则有 $\#(\sigma \Delta \tau) = 1$, 因此存在一个唯一的 $k \in \mathbb{N}_n$, 使得

$\sigma \Delta \tau = \{k\}$, 这意味着 $\tau = \sigma \Delta k$ 。根据 $\Xi_k^{(\theta)}$ 的性质以及式(2.8)和(2.9), 我们有

$$\begin{aligned}
(e^{-i\theta_k} \partial_k^* + e^{i\theta_k} \partial_k) Z_\sigma &= e^{-i\theta_k} \partial_k^* Z_\sigma + e^{i\theta_k} \partial_k Z_\sigma \\
&= e^{-i\theta_k} (1 - 1_\sigma(k)) Z_{\sigma \cup k} + e^{i\theta_k} 1_\sigma(k) Z_{\sigma \setminus k} \\
&= (1 - 1_\sigma(k)) e^{-i\theta_k} Z_{\sigma \cup k} + 1_\sigma(k) e^{i\theta_k} Z_{\sigma \setminus k} g \\
&= [(1 - 1_\sigma(k)) e^{-i\theta_k} + 1_\sigma(k) e^{i\theta_k}] Z_{\sigma \Delta k}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

与 $\tau = \sigma \Delta k$ 一起得出(3.3)。现在, 假设存在一个唯一的 $k \in \mathbb{N}_n$, 使得(3.3)成立。然后, 根据式(3.4), 我们发现

$$[(1 - 1_\sigma(k)) e^{-i\theta_k} + 1_\sigma(k) e^{i\theta_k}] Z_\tau = [(1 - 1_\sigma(k)) e^{-i\theta_k} + 1_\sigma(k) e^{i\theta_k}] Z_{\sigma \Delta k},$$

这意味着 $\tau = \sigma \Delta k$, 因此 $\#(\sigma \Delta \tau) = 1$, 即 $\sigma \sim \tau$ 。

注记 3.1. 文[8]解释了和算子 $(\partial_k^* + \partial_k)$ 是一个自伴的西算子, 并且作为图 $(\Gamma_n, \mathcal{E}_n)$ 上的位移算子的事实。请注意, 本文定义的算子 $\Xi_k^{(\theta)} = (e^{-i\theta_k} \partial_k^* + e^{i\theta_k} \partial_k)$, 根据命题 3.1 和定理 3.1, 我们可以将 $\Xi_k^{(\theta)}$ 解释为图 $(\Gamma_n, \mathcal{E}_n)$ 上的磁位移算子。

3.2. 磁量子游荡的定义

在本小节中, 我们将给出基于 Bernoulli 噪声方法的磁量子游荡的定义。在本小节中, 我们假设 $\mathcal{H}_c$ 是一个有限维复 Hilbert 空间, $\dim \mathcal{H}_c \geq n+1$ 。此外, 我们为 $\mathcal{H}_c$ 固定了一个正交基 $\{e_i | 0 \leq i \leq \mathcal{H}_c - 1\}$ 。我们将 $\mathcal{H}_c$ 作为模型磁量子游荡模型的硬币空间。

设 $\mathcal{C} = \{C_k | 0 \leq k \leq n\}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_c$ 上的一个有界算子系, 并且满足条件:

- (1) $\sum_{k=0}^n C_k$ 是 $\mathcal{H}_c$ 上的西算子;
- (2) $C_j^* C_k = C_j C_k^* = 0, j \neq k, 0 \leq j, k \leq n$ 。

则称 $\mathcal{C} = \{C_k | 0 \leq k \leq n\}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_c$ 上的一个硬币算子系, 同时有以下结论成立:

$$\sum_{k=0}^n (C_k)^* (C_k) = \sum_{k=0}^n (C_k) (C_k)^* = I_{\mathcal{H}_c}, \tag{3.5}$$

这里 $I_{\mathcal{H}_c}$ 是 $\mathcal{H}_c$ 上的单位算子。

回忆之前的内容, $\mathcal{H}_n$ 是 $\mathcal{H}$ 的 $(2n+1)$ 维子空间, 其正则 ONB 为 $\mathfrak{Z} = \{Z_\sigma | \sigma \in \Gamma\}$, 详见第 2 节。请注意, 这个正交基仅由图 $(\Gamma_n, \mathcal{E}_n)$ 的顶点集索引。因此, $\mathcal{H}_n$ 可以作为图 $(\Gamma_n, \mathcal{E}_n)$ 上量子游荡的位置空间, 基于这个结论, 我们将 $\mathcal{H}_n$ 作为我们的磁量子游荡模型的位置空间。自然的, 张量空间 $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_c$ 充当我们的游荡模型的状态空间。我们分别用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_c$ 的内积和范数, $\{Z_\sigma \otimes e_i | \sigma \in \Gamma_n, 0 \leq i \leq \mathcal{H}_c - 1\}$ 作为空间 $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_c$ 的标准正交基。

定理 3.2. 令 $\mathcal{C} = \{C_k | 0 \leq k \leq n\}$ 是空间 $\mathcal{H}_c$ 上的硬币(coin)算子, 那么空间 $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_c$ 上的一个西算子 U_C^θ 定义如下:

$$U_C^\theta = \sum_{n=0}^k (e^{-i\theta_k} \partial_k^* + e^{i\theta_k} \partial_k) \otimes C_k, \tag{3.6}$$

这里 $\theta_k = \theta(\{k\}, \mathbb{N}_n \setminus \{k\}), k \in \mathbb{N}_n$ 。

证明. 根据 3.1 节中证明的算子 $\Xi_k^{(\theta)} := (e^{-i\theta_k} \partial_k^* + e^{i\theta_k} \partial_k)$ 的性质 $[e^{-i\theta_k} \partial_k^* + e^{i\theta_k} \partial_k]^2 = I_{\mathcal{H}_n}, 0 \leq k \leq n$ 以及式(3.5), 我们有

$$\begin{aligned}
 (U_C^\theta)^* U_C^\theta &= \left[\sum_{n=0}^k (e^{-i\theta_k} \partial_k^* + e^{i\theta_k} \partial_k) \otimes C_k \right]^* \left[\sum_{n=0}^k (e^{-i\theta_k} \partial_k^* + e^{i\theta_k} \partial_k) \otimes C_k \right] \\
 &= \sum_{n=0}^k \left((e^{-i\theta_k} \partial_k^* + e^{i\theta_k} \partial_k) \right)^2 \otimes C_k^* C_k \\
 &= \sum_{k=0}^n I_{\mathcal{H}_n} \otimes C_k^* C_k \\
 &= I_{\mathcal{H}_n} \otimes I_{\mathcal{H}_c} \\
 &= I,
 \end{aligned}$$

此处 $I_{\mathcal{H}_n}$ 和 $I_{\mathcal{H}_c}$ 分别是空间 $\mathcal{H}_n$ 和 $\mathcal{H}_c$ 上的单位算子。

接下来, 我们要给出磁量子游荡模型的精确定义。我们总是假设 $\mathcal{C} = \{C_k | 0 \leq k \leq n\}$ 是空间 $\mathcal{H}_c$ 上的固定硬币(coin)算子系统。我们由(3.5)给出的 $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_c$ 上的酉算子 U_C^θ 称为与硬币算子系统 $\mathcal{C}$ 相关的磁演化算子。

定义 3.3. 基于量子 Bernoulli 噪声的磁量子随机游荡是定义在带磁场 θ 的有限维超立方体 $(\Gamma_n, \mathcal{E}_n)$ 上的离散时间量子随机游荡, 其主要性质如下:

- (1) 该游荡模型的态空间为 $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_c$, 其中 $\mathcal{H}_c$ 作为硬币(coin)空间用来描述游荡者的内部自由度, $\mathcal{H}_n$ 作为位置(position)空间用来描述游荡者的位置;
- (2) 该游荡模型的态由 $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_c$ 上的单位算子表示, 时间演化方程为

$$\Psi_{t+1}^{(\theta)} = U_C^{(\theta)} \Psi_t^{(\theta)}, \quad t \geq 0, \quad (3.7)$$

这里 $\Psi_t^{(\theta)}$ 表示 $t \geq 0$ 时刻的态;

- (3) 时刻 $t \geq 0$ 在位置 $\sigma \in \Gamma_n$ 上发现游荡者的概率 $P_t^{(\theta)}(\sigma | \Psi_0)$ 表示为

$$P_t^{(\theta)}(\sigma | \Psi_0) = \sum_{i=0}^{d_{\mathcal{H}_c}-1} \left| \left\langle Z_\sigma \otimes e_{i^*} \Psi_t^{(\theta)} \right\rangle \right|, \quad (3.8)$$

其中 Ψ_0 为给定的初始态。

注记 3.2. 正如[8]中所指, 当初始状态满足一些温和条件时, 与磁场耦合的离散时间量子游荡也可以在超立方体上产生均匀测度作为其平稳测度。

下面, 我们提供了一个简单的例子来验证该结果的合理性和正确性。

考虑超立方体 $(\Gamma_1, \mathcal{E}_1)$, 它与二维超立方体同构, 在这种情况下, 磁量子游荡的位置空间为 $\mathcal{H}_1 = \text{span}\{Z_\sigma | \sigma \in \Gamma_1\}$, 这里 $\Gamma_1 = \{\Phi, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ 。

我们定义一个函数 $\psi: \Gamma_2 \times \Gamma_2 \rightarrow [-\pi, \pi]$ 为

$$\psi(\sigma, \tau) = \begin{cases} \frac{2\pi}{3}, & \sigma = \{k\}, \tau = \mathbb{N}_2 \setminus \{k\}, k \in \mathbb{N}_2 \\ -\frac{2\pi}{3}, & \sigma = \mathbb{N}_2 \setminus \{k\}, \tau = \{k\}, k \in \mathbb{N}_2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

显然, ψ 是超立方体 Γ_1 上的磁势, 它不同于零磁势 $\theta^{(0)}$ 。

例 3.1. 取 $\mathbb{C}^4$ 作为硬币空间, 即 $\mathcal{H}_c = \mathbb{C}^4$, 则有 $\mathbb{C}^4$ 上的一个硬币算子系 $\mathcal{C} = \{C_0, C_1\}$:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

此时, 磁量子游荡的态空间为 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathbb{C}^4$, 磁演化算子 U_c^ψ 为以下形式:

$$U_c^\psi = (e^{-i\psi_0} \partial_0^* + e^{i\psi_0} \partial_0) \otimes C_0 + (e^{-i\psi_1} \partial_1^* + e^{i\psi_1} \partial_0) \otimes C_1,$$

其中 $\psi_0 = \psi(0,1) = \frac{2\pi}{3}$, $\psi_1 = \psi(1,0) = -\frac{2\pi}{3}$, 加权求和算子为

$$\Lambda_{\emptyset}^{(c)} = -C_0 - C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda_{\{0\}}^{(c)} = C_0 - C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_{\{1\}}^{(c)} = -C_0 + C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \Lambda_{\{0,1\}}^{(c)} = C_0 + C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

通过仔细计算, 可以得到酉算子的谱:

$$\text{Spec}(\Lambda_{\{\emptyset\}}^{(c)}) = \text{Spec}(\Lambda_{\{0,1\}}^{(c)}) = \{1, -1\}, \text{Spec}(\Lambda_{\{0\}}^{(c)}) = 1, \text{Spec}(\Lambda_{\{1\}}^{(c)}) = \{-1\}.$$

这些算子的特征向量 $\varphi_{\emptyset}, \varphi_{\{0\}}, \varphi_{\{1\}}, \varphi_{\{0,1\}}$ 分别由下式给出:

$$\varphi_{\emptyset} = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \varphi_{\{0\}} = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^T,$$

$$\varphi_{\{1\}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)^T, \varphi_{\{0,1\}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)^T.$$

我们可以得到:

$$A_0 = |\varphi_{\emptyset}|_{\mathcal{H}_c}^2 + |\varphi_{\{0\}}|_{\mathcal{H}_c}^2 + |\varphi_{\{1\}}|_{\mathcal{H}_c}^2 + |\varphi_{\{0,1\}}|_{\mathcal{H}_c}^2 = 4.$$

显然, ξ_0 是单位向量, 它是离散时间磁量子游荡的初始态, 对于每个 $\tau \in \Gamma_1$, 我们有

$$\phi_\tau = \sum_{j=0}^3 \widehat{Z_\tau^{(\psi)}} \otimes e_j, \xi_0 e_j = \frac{1}{2} \varphi_\tau,$$

这意味着 $\Lambda_\tau^{(c)} \phi_\tau = \lambda_\tau \phi_\tau$, 即 ϕ_τ 是 $\Lambda_\tau^{(c)}$ 的特征向量, λ_τ 是相应的特征值。

显然, 对于 $\tau_1, \tau_2 \in \Gamma_1, \lambda_{\tau_1} \neq \lambda_{\tau_2}$ 且 $\tau_1 \neq \tau_2$, 有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\mu_T^{(\theta)}}(\sigma | \xi_0) = \frac{1}{4}, \quad \forall \sigma \in \Gamma_1.$$

至此, 我们在 Bernoulli 泛函的框架下提出了一个离散时间磁量子游荡模型, 通过在 Bernoulli 泛函上引入磁位移算子, 然后使用它们来构造磁演化算子从而构建最终模型。

在一般量子游荡的基础上加入磁场，可以引入额外的物理效应和调控手段，从而扩展量子游荡的应用范围和性能。磁场可以诱导拓扑相变，使量子游荡具有拓扑保护特性。这种特性对噪声和扰动具有鲁棒性(robustness)，适用于量子计算和量子信息处理。拓扑非平凡的情况下，磁场驱动的量子游荡可以支持边缘态，这些态局域在系统的边界，具有独特的物理性质。

我们将进一步研究该磁量子游荡模型的概率分布公式，挖掘当该游荡的初始状态满足一些温和条件时，其概率分布与磁势的关系。探究磁场是否可以改变量子游荡的扩散速度和干涉模式，从而优化量子搜索算法的效率。

参考文献

- [1] Aharonov, Y., Davidovich, L. and Zagury, N. (1993) Quantum random walks. *Physical Review A*, **48**, 1687-1690. <https://doi.org/10.1103/physreva.48.1687>
- [2] Grover, L.K. (1997) Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack. *Physical Review Letters*, **79**, 325-328. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.79.325>
- [3] Chin, A.W., Datta, A., Caruso, F., Huelga, S.F. and Plenio, M.B. (2010) Noise-Assisted Energy Transfer in Quantum Networks and Light-Harvesting Complexes. *New Journal of Physics*, **12**, Article ID: 065002. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/6/065002>
- [4] Kempe, J. (2003) Quantum Random Walks: An Introductory Overview. *Contemporary Physics*, **44**, 307-327. <https://doi.org/10.1080/00107151031000110776>
- [5] Konno, N. (2008) Quantum Walks. *Lecture Notes in Mathematics*, **1954**, 309-452.
- [6] Venegas-Andraca, S.E. (2012) Quantum Walks: A Comprehensive Review. *Quantum Information Processing*, **11**, 1015-1106. <https://doi.org/10.1007/s11128-012-0432-5>
- [7] Wang, C. and Ye, X. (2016) Quantum Walk in Terms of Quantum Bernoulli Noises. *Quantum Information Processing*, **15**, 1897-1908. <https://doi.org/10.1007/s11128-016-1259-2>
- [8] Wang, C. (2022) The Uniform Measure for Quantum Walk on Hypercube: A Quantum Bernoulli Noises Approach. *Journal of Mathematical Physics*, **63**, Article ID: 113501. <https://doi.org/10.1063/5.0070451>
- [9] Wang, C. and Ye, X. (2016) Quantum Walk in Terms of Quantum Bernoulli Noises. *Quantum Information Processing*, **15**, 1897-1908. <https://doi.org/10.1007/s11128-016-1259-2>
- [10] Wang, C., Wang, C., Ren, S. and Tang, Y. (2018) Open Quantum Random Walk in Terms of Quantum Bernoulli Noise. *Quantum Information Processing*, **17**, Article No. 46. <https://doi.org/10.1007/s11128-018-1820-2>
- [11] Wang, C., Ren, S. and Tang, Y. (2020) A New Limit Theorem for Quantum Walk in Terms of Quantum Bernoulli Noises. *Entropy*, **22**, Article 486. <https://doi.org/10.3390/e22040486>
- [12] Wang, C., Chai, H. and Lu, Y. (2010) Discrete-Time Quantum Bernoulli Noises. *Journal of Mathematical Physics*, **51**, Article No. 46. <https://doi.org/10.1063/1.3431028>
- [13] Güneysu, B., Keller, M. and Schmidt, M. (2015) A Feynman-Kac-Itô Formula for Magnetic Schrödinger Operators on Graphs. *Probability Theory and Related Fields*, **165**, 365-399. <https://doi.org/10.1007/s00440-015-0633-9>