

一类变分波动方程经典解的爆破

景晓萍

长安大学理学院, 陕西 西安

收稿日期: 2025年2月6日; 录用日期: 2025年2月28日; 发布日期: 2025年3月13日

摘 要

针对一类一维非线性变分波动方程初值问题, 应用特征线法和能量估计方法证明了即使初始能量任意小, 经典解也会在有限时间内发生爆破。该模型源于受电场影响的向列相液晶体的研究。

关键词

变分波动方程, 爆破, 特征线法, 能量估计

Blow-Up of Classical Solution to a Class of Variational Wave Equations

Xiaoping Jing

School of Science, Chang'an University, Xi'an Shaanxi

Received: Feb. 6th, 2025; accepted: Feb. 28th, 2025; published: Mar. 13th, 2025

Abstract

We consider the initial value problem for a class of one-dimensional nonlinear variational wave equations. The method of characteristics and energy estimate is used to prove that the classical solutions will blow up in finite time even if the initial energy is arbitrarily small. This model is derived from the study of the nematic liquid crystals affected by electric fields.

Keywords

Variational Wave Equation, Blow-Up, Characteristic Method, Energy Estimate



1. 引言

液晶作为液体和晶体的中间状态而存在，它像液体一样流动，同时又具备晶体的某些有向结构特性。根据分子排列的形式和有序性的不同，液晶分为三种类型：向列相、近晶相和胆甾相。其中，向列相是最简单的液晶，它的棒状分子质心位置分布杂乱无章，但是分子整体取向一致，其长轴大致平行。在外力作用下很容易流动，被广泛应用于液晶显示器、生物芯片和柔性电子材料等领域。因此，对刻画向列型液晶分子运动的数学模型的研究具有重要理论意义和现实应用价值。

液晶材料的分子取向对磁场、电场和表面结构等微弱的外部刺激高度敏感，从而导致材料性质发生改变，随着分子局部方向的变化，材料中经常出现缺陷或者奇点。孙新涛等[1]指出，当向列相液晶受外加电场作用时，如果液晶材料含有杂质或带电粒子，或者外加电场很强，液晶材料会发生强烈的电光效应，此时讨论向列相液晶棒状分子方向向量是很困难的。实际应用中采用高纯度绝缘材料和较弱电场，此时液晶发生简单的展曲、扭曲或弯曲形变，棒状分子的方向向量由电场对液晶分子施加的转矩和形变转矩的平衡来确定。本文正是基于这个基本原理建立数学模型来讨论一定弱电场作用下向列相液晶的分子运动情况，从而建立一类变分波动方程经典解的爆破条件，为之后的实际应用和数值模拟做准备。

Hunter 等[2]指出，向列液晶体的 Frank-Oseen 势能密度为

$$W(\mathbf{n}, \nabla \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \alpha (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} \beta (\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} \gamma |\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})|^2, \quad (1)$$

其中 α, β, γ 是液晶体的正弹性常数，分别代表展曲，扭曲和弯曲。当向列相液晶处于一定弱电场中时，引入电能密度为 $W_{elec} = \lambda g^2(\mathbf{n})$ ，其中 λ 为介电常数， $\mathbf{n}$ 是单位向量，表示向列相液晶棒状分子的长轴取向(后面简称“方向 $\mathbf{n}$ ”)， $g(\mathbf{n})$ 与方向 $\mathbf{n}$ 有关，见[3]。由最小作用原理

$$\delta \int \left(\frac{1}{2} \partial_t \mathbf{n} \cdot \partial_t \mathbf{n} - W(\mathbf{n}, \nabla \mathbf{n}) - \lambda g^2(\mathbf{n}) \right) dx dt = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad (2)$$

可知，当方向 $\mathbf{n} = (\cos u(x, t), \sin u(x, t), 0)$ 时(这里，因变量 $u \in \mathbb{R}^1$ 表示方向 $\mathbf{n}$ 与 x 轴的夹角， (t, x) 分别是时间自变量和空间自变量)，Euler-Lagrange 方程为

$$u_{tt} - c(u) [c(u) u_x]_x + \frac{\lambda}{2} (u + u^3) = 0, \quad (3)$$

其中波速 $c^2(u) = \alpha \sin^2 u + \gamma \cos^2 u$ 。这就是本文研究的一维非线性变分波动方程。

当 $\lambda = 0$ 时，方程(3)是最简单的一维变分波动方程

$$u_{tt} - c(u) [c(u) u_x]_x = 0, \quad (4)$$

见[4]。假设波速 c 是严格正函数，Glasse 等[5]最早使用特征线证明了方程(4)对于一般的光滑初值不存在整体光滑解；Duan 等[6]将[5]中的结果拓展到多维。这种正则性的缺失迫使研究者放弃经典解而去考虑弱解。Zhang 等[7][8]和 Bressan 等[9]系统地研究了方程(4)耗散型弱解的整体存在性。Bressan 等[10]-[12]用能量坐标法证明了方程(4)守恒型弱解的存在唯一性以及其它相关的性质。近年来，Song [13]利用[5]的方法证明了一维变分 Sine-Gordon 方程光滑解的爆破；Qin 等[14]进一步证明了多维 Sine-Gordon 方程在特定初值下的光滑解在有限时间内爆破。最近，在不假设双曲方程的波速 c 是一个正函数的情况下，Hu [15]证明了一维非线性退化双曲抛物耦合系统对于任意小的初始能量，光滑解在有限时间内发生爆破。更

多爆破结果见文献[16][17]。本文将研究受电场影响的向列相液晶的变分波动方程并证明其初值问题经典解发生爆破的充要条件, 为后续数值计算和弱解的研究奠定理论基础。

本文假设 $c(u) \in C^2$ 满足

$$0 < c_0 \leq c(u) \leq c_1, \quad |c'(u)| \leq c_1, \quad (5)$$

这里 c_0, c_1 是正常数。主要结论如下:

定理 1 考虑一维非线性变分波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - c(u)[c(u)u_x]_x + \frac{\lambda}{2}(u+u^3) = 0, \\ u(0, x) = u_0 + \varepsilon \varphi\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right), \\ u_t(0, x) = (-c(u(0, x)) + \varepsilon)u_x(0, x), \end{cases} \quad (6)$$

其中 u_0, x_0, ε 均为正常数。假设 $c'(u_0)$ 为正常数且光滑函数 $\varphi(z)$ 满足

$$\varphi(z) \in C_c^1((-1, 1)), \quad \max\left\{\frac{3}{\varepsilon}, \frac{64c_1^2}{c'(u_0)(x_0 - \varepsilon)\varepsilon}\right\} < \varphi'(0) < \frac{2c_0}{\lambda x_0 \varepsilon}. \quad (7)$$

如果 $u(t, x) \in C^2([0, T) \times \mathbb{R})$ 是初值问题(6)的光滑解, 那么对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在足够小的正数 ε_0 , 当 $\varepsilon < \varepsilon_0$ 时, $T < \infty$ 。

本文使用[5][6]的特征线法证明定理 1, 具体而言, 为方便假设特征线, 需引入新变量, 把二阶方程转化为一阶方程组, 将原经典解 $u(t, x) \in C^2([0, T) \times \mathbb{R})$ 在有限时间内爆破的问题转换为新变量沿特征线在一定时间内爆破和有界的问题。其中, 证明难点是 $c'(u)$ 符号的控制。根据一阶方程组假设特征线得到特征三角区域, 在该区域内对能量方程积分得到新变量的估计, 从而控制 $c'(u)$ 沿某一条特征线恒正。

2. 定理 1 的证明

为了证明定理 1, 首先引入新变量, 将二阶方程转化成一阶方程组, 将原初值问题(6)转换为新变量的初值问题; 其次, 推导新变量满足的能量方程并建立能量估计; 进一步, 在特征三角区域对新变量进行估计从而控制 $c'(u)$ 的符号; 最后通过引理 1 证明初值问题(6)的光滑解在 $t = \frac{x_0 - \varepsilon}{c_1}$ 之前发生爆破。

2.1. 变量变换

引入新变量

$$R_1 := u_t + c(u)u_x, \quad S_1 := u_t - c(u)u_x, \quad (8)$$

则有

$$u_x = \frac{R_1 - S_1}{2c(u)}, \quad u_t = \frac{R_1 + S_1}{2}, \quad (9)$$

且初值问题(3)(6)等价于以下初值问题

$$\begin{cases} \partial_t R_1 - c(u)\partial_x R_1 = \frac{c'(u)}{4c(u)}(R_1^2 - S_1^2) - \frac{\lambda}{2}(u+u^3), \\ \partial_t S_1 + c(u)\partial_x S_1 = \frac{c'(u)}{4c(u)}(S_1^2 - R_1^2) - \frac{\lambda}{2}(u+u^3), \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} R_1(0, x) = \varepsilon u_x(0, x), \\ S_1(0, x) = (-2c(u(0, x)) + \varepsilon)u_x(0, x), \end{cases} \quad (11)$$

2.2. 能量估计

考虑足够小的 $\varepsilon = \min\left\{c_0, \frac{x_0}{3}\right\}$, 由于 $\varphi(\cdot) \in C_c^1((-1, 1))$, 当 $x \in \mathbb{R} \setminus [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ 时,

$$R_1(0, x) = S_1(0, x) = 0. \quad (12)$$

将方程组(10)中第一个方程乘以 $2R_1$, 第二个方程乘以 $2S_1$, 然后相加, 得到能量方程

$$\partial_t \left[R_1^2 + S_1^2 + \lambda \left(u^2 + \frac{u^4}{2} \right) \right] - \partial_x [c(u)(R_1^2 - S_1^2)] = 0, \quad (13)$$

定义能量函数

$$E(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \left[R_1^2 + S_1^2 + \lambda \left(u^2 + \frac{u^4}{2} \right) \right] (t, x) dx, \quad (14)$$

则由(5) (6) (12)得初始能量

$$\begin{aligned} E(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[R_1^2(0, x) + S_1^2(0, x) + \lambda \left(u^2(0, x) + \frac{u^4}{2}(0, x) \right) \right] dx \\ &= \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \left\{ \left[\varepsilon^2 + (-2c(u(0, x)) + \varepsilon)^2 \right] \varphi'^2 \left(\frac{x - x_0}{\varepsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda \left[\left(u_0 + \varepsilon \varphi \left(\frac{x - x_0}{\varepsilon} \right) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(u_0 + \varepsilon \varphi \left(\frac{x - x_0}{\varepsilon} \right) \right)^4 \right] \right\} dx \\ &\leq \varepsilon \int_{-1}^1 \left[\left(\varepsilon^2 + (2c_1 + \varepsilon)^2 \right) (\varphi'^2(z)) \right] dz + 2\lambda M_1 \varepsilon \\ &\leq \left\{ 2 \|\varphi'(z)\|_{L^2} \left[c_0^2 + (2c_1 + c_0)^2 \right] + 2\lambda M_1 \right\} \varepsilon := M_2 \varepsilon, \end{aligned} \quad (15)$$

这里 $M_1 = \max_{z \in [-1, 1]} \left[\left(u_0 + \varepsilon \varphi(z) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(u_0 + \varepsilon \varphi(z) \right)^4 \right]$, M_2 为正常数。

易得 $E(t)$ 与时间 t 无关, 则有

$$E(t) = E(0) \leq M_2 \varepsilon,$$

下面对方程(13)在特征三角区域积分。

在 x 轴上取两点 $(x_1, 0), (x_2, 0)$ 且满足 $0 < x_1 < x_2$ 。过该两点定义两组特征线

$$\begin{cases} \frac{dx^+(t)}{dt} = c(u(t, x^+(t))), & x^+(0) = x_1, \\ \frac{dx^-(t)}{dt} = -c(u(t, x^-(t))), & x^-(0) = x_2. \end{cases} \quad (16)$$

由(5)可知, 如果 $x_2 - x_1 \leq \frac{2c_0(x_0 - \varepsilon)}{c_1}$, 那么正特征线 $x^+(t)$ 和负特征线 $x^-(t)$ 会相交于点 (x_A, t_A) 且有

$x_1 < x_A < x_2$, $t_A < \frac{x_0 - \varepsilon}{c_1}$ 。设特征线 $x^+(t), x^-(t)$ 与 x 轴所围区域为 Ω , 如图 1 所示。

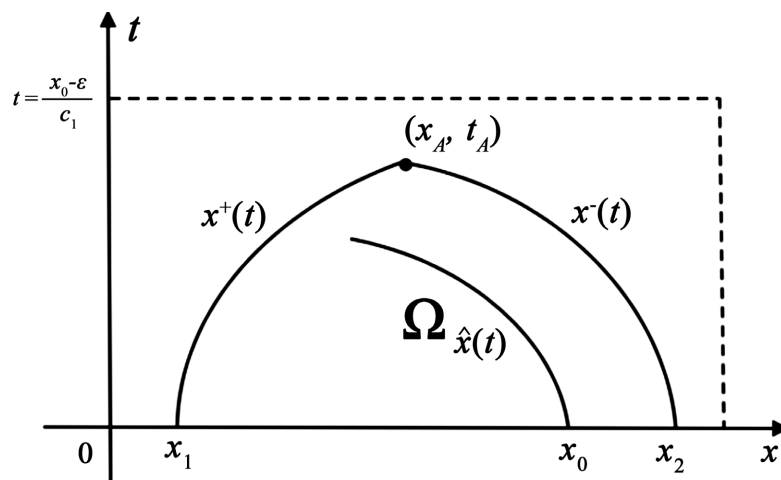


Figure 1. Characteristic plane

图 1. 特征平面

在区域 Ω 上对方程(13)应用格林公式, 可得:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega} \left[R_1^2 + S_1^2 + \lambda \left(u^2 + \frac{u^4}{2} \right) \right] - \left[c(u) (R_1^2 - S_1^2) \right]_x (t, x) dx dt \\
 &= \oint_{\partial\Omega} \left[c(u(t, x)) (R_1^2(t, x) - S_1^2(t, x)) \right] dt + \left[R_1^2(t, x) + S_1^2(t, x) + \lambda \left(u^2 + \frac{u^4}{2} \right) (t, x) \right] dx \\
 &= \int_{x_2}^{x_A} \left[2S_1^2 + \lambda \left(u^2 + \frac{u^4}{2} \right) \right] (t^-(x), x) dx + \int_{x_A}^{x_1} \left[2R_1^2 + \lambda \left(u^2 + \frac{u^4}{2} \right) \right] (t^+(x), x) dx \\
 &\quad + \int_{x_1}^{x_2} \left[R_1^2 + S_1^2 + \lambda \left(u^2 + \frac{u^4}{2} \right) \right] (0, x) dx = 0.
 \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_A}^{x_2} \left[S_1^2 + \frac{\lambda}{2} \left(u^2 + \frac{u^4}{2} \right) \right] (t^-(x), x) dx + \int_{x_1}^{x_A} \left[R_1^2 + \frac{\lambda}{2} \left(u^2 + \frac{u^4}{2} \right) \right] (t^+(x), x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[R_1^2 + S_1^2 + \lambda \left(u^2 + \frac{u^4}{2} \right) \right] (0, x) dx \leq M_2 \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{17}$$

在 x 轴上取点 $(x_0, 0)$ ($x_1 < x_0 < x_2$), 定义特征线 $\hat{x}(t) \left(t < \frac{x_0 - \varepsilon}{c_1} \right)$:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = -c(u(t, \hat{x}(t))), \quad \hat{x}(0) = x_0, \tag{18}$$

如图 1 所示。下面证明当 ε 足够小时, $c'(u(t, \hat{x}(t))) > 0$ 。

由定义(8)可知

$$\frac{du(t, \hat{x}(t))}{dt} = S_1(t, \hat{x}(t)). \tag{19}$$

对(19)从 $t = 0$ 到 $t < \frac{x_0 - \varepsilon}{c_1}$ 积分并应用(17)得

$$\begin{aligned} |u(t, \hat{x}(t)) - u(0, x_0)| &\leq \int_0^t |S_1(t, \hat{x}(t))| d\tau \leq \sqrt{t} \left(\int_0^t S_1^2(t, \hat{x}(t)) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\frac{x_0 - \varepsilon}{c_0 c_1}} \left(\int_{\hat{x}(t)}^{x_0} S_1^2(\hat{t}(x), x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{M_2(x_0 - \varepsilon)}{c_0 c_1}} \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

由于函数 $c(\cdot) \in C^2$, 因此, 对于足够小的 $\delta > 0$, 当 $\varepsilon \in (0, \delta)$ 时, 有

$$c'(u(t, \hat{x}(t))) \geq \frac{c'(u(0, x_0))}{2} \geq \frac{c'(u_0)}{4} > 0. \quad (20)$$

2.3. 光滑解的爆破

引理 1 在定理 1 条件下, 取 $\varepsilon_0 = \min \left\{ c_0, \delta, \frac{x_0}{3}, \frac{1}{3M_2M_3}, \frac{c'(u_0)x_0}{48c_1^2M_2M_3} \right\}$, 其中 $M_3 = \frac{1}{c_0} + \frac{c_1}{c_0^2}$, 则当 $\varepsilon < \varepsilon_0$

时, 初值问题(10) (11)的光滑解 $R_1(t, \hat{x}(t))$ 在 $t < \frac{x_0 - \varepsilon}{c_1}$ 趋于正无穷, 而光滑解 $S_1(t, \hat{x}(t))$, 在区间 $[0, T_*)$

$\left(T_* < \frac{x_0 - \varepsilon}{c_1} \right)$ 一致有界。

证明: 由(7) (11)及引理 1 条件可知

$$\max \left\{ 3, \frac{64c_1^2}{c'(u_0)(x_0 - \varepsilon)} \right\} < R_1(0, x_0) < \frac{2c_0}{\lambda x_0}, R_2(0, x_0) > 1, S_2(0, x_0) < 0.$$

第 1 步, 证明 $R_1(t, \hat{x}(t))$ 在 $t \in \left[0, \frac{x_0 - \varepsilon}{c_1} \right)$ 恒成立。

否则, 由 $R_1(0, x_0) > 3$ 且函数 $R_1(t, \hat{x}(t))$ 在 $t \in \left[0, \frac{x_0 - \varepsilon}{c_1} \right)$ 光滑, 设 $\exists t_1 \in \left(0, \frac{x_0 - \varepsilon}{c_1} \right)$ 使得

$R_1(t, \hat{x}(t)) \in C^1([0, t_1])$ 且满足 $R_1(t, \hat{x}(t)) > 1$, $t \in [0, t_1)$, $R_1(t_1, \hat{x}(t_1)) = 1$, 则由(5) (10) (20)有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R_1(t, \hat{x}(t))} \right) &= -\frac{1}{R_1^2} \left[\frac{c'(u)}{4c(u)} (R_1^2 - S_1^2) - \frac{\lambda}{2} (u + u^3) \right] \\ &\leq -\frac{c'(u_0)}{16c_1} + \frac{1}{R_1^2} \left[\frac{c_1}{4c_0} S_1^2 + \frac{\lambda}{2} |u + u^3| \right] \\ &\leq -\frac{c'(u_0)}{16c_1} + \frac{1}{R_1^2} \left[\frac{c_1}{4c_0} S_1^2 + \frac{\lambda}{2} |u + u^3| \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

对(21)从 $t = 0$ 到 t_1 积分并应用引理 1 条件得

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{R_1(t_1, \hat{x}(t_1))} \leq \frac{1}{R_1(0, x_0)} - \int_0^{t_1} \frac{c'(u_0)}{16c_1} dt + \int_0^{t_1} \left[\frac{c_1}{c_0} S_1^2 + \frac{\lambda}{2} |u + u^3| \right] (t, \hat{x}(t)) dt \\ &\leq \frac{1}{R_1(0, x_0)} + \frac{\lambda}{2c_0} \int_{\hat{x}(t_1)}^{x_0} \frac{1 + 3u^2 + u^4}{2} (\hat{t}(x), x) dx + \frac{c_1}{c_0^2} \int_{\hat{x}(t_1)}^{x_0} S_1^2(\hat{t}(x), x) dx \\ &\leq \frac{1}{R_1(0, x_0)} + \frac{\lambda}{2c_0} c_1 t_1 + \frac{1}{2c_0} \int_{\hat{x}(t_1)}^{x_0} 2\lambda \left(u^2 + \frac{u^4}{2} \right) (\hat{t}(x), x) dx + \frac{c_1}{c_0^2} M_2 \varepsilon \\ &< \frac{1}{R_1(0, x_0)} + \frac{\lambda x_0}{2c_0} + \left(\frac{1}{c_0} + \frac{c_1}{c_0^2} \right) M_2 \varepsilon < \frac{2}{R_1(0, x_0)} + M_2 M_3 \varepsilon_0 < \frac{2}{3} + M_2 M_3 \frac{1}{3M_2 M_3} = 1, \end{aligned}$$

这里 $M_3 := \frac{1}{c_0} + \frac{3c_1}{c_0^2}$, 矛盾。因此 $R_1(t, \hat{x}(t)) > 1$ 在 $t \in \left[0, \frac{x_0 - \varepsilon}{c_1}\right]$ 恒成立。

第 2 步, 证明 $R_1(t, \hat{x}(t)) \rightarrow +\infty$ 在 $t \in \left[0, \frac{x_0 - \varepsilon}{c_1}\right]$ 成立。

对(21)从 $t=0$ 到 $t < \frac{x_0 - \varepsilon}{c_1}$ 积分并应用引理 1 条件得

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1(t, \hat{x}(t))} &\leq \frac{1}{R_1(0, x_0)} - \frac{c'(u_0)}{16c_1}t + \int_0^t \left[\frac{c_1}{c_0} S_1^2 + \frac{\lambda}{2} |u + u^3| \right] (t, \hat{x}(t)) d\tau \\ &\leq \frac{1}{R_1(0, x_0)} - \frac{c'(u_0)}{16c_1}t + \frac{\lambda}{2c_0} \int_{\hat{x}(t)}^{x_0} \frac{1+3u^2+u^4}{2} (\hat{t}(x), x) dx + \frac{c_1}{c_0^2} \int_{\hat{x}(t)}^{x_0} S_1^2 (\hat{t}(x), x) dx \\ &\leq \frac{1}{R_1(0, x_0)} - \frac{c'(u_0)}{16c_1}t + \frac{\lambda x_0}{2c_0} + \left[\frac{1}{c_0} + \frac{c_1}{c_0^2} \right] M_2 \varepsilon < \frac{2}{R_1(0, x_0)} - \frac{c'(u_0)}{16c_1}t + M_2 M_3 \varepsilon \\ &< \frac{c'(u_0)(x_0 - \varepsilon)}{32c_1^2} - \frac{c'(u_0)}{16c_1}t + M_2 M_3 \frac{c'(u_0)x_0}{48c_1^2 M_2 M_3} = \frac{c'(u_0)}{16c_1} \left(\frac{x_0 - \varepsilon}{2c_1} - t + \frac{x_0}{3c_1} \right). \end{aligned}$$

令 $\frac{x_0 - \varepsilon}{2c_1} - t + \frac{x_0}{3c_1} = 0$, 得 $t = \frac{5x_0 - 3\varepsilon}{6c_1} < \frac{5x_0 - 3\varepsilon + x_0 - 3\varepsilon}{6c_1} = \frac{x_0 - \varepsilon}{c_1}$ 。因此, $\exists T_* = \frac{5x_0 - 3\varepsilon}{6c_1} < \frac{x_0 - \varepsilon}{c_1}$, 使得当

$\varepsilon < \varepsilon_0$ 且 $t \rightarrow T_*^-$, $R_1(t, \hat{x}(t)) \rightarrow +\infty$ 。

第 3 步, 证明 $S_1(t, \hat{x}(t))$ 在 $[0, T_*]$ 一致有界。

对于任意 $t^* \in [0, T_*]$, 过曲线 $x = \hat{x}(t)$ 上的点 (t^*, x^*) 作正特征线:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = c(u(t, \hat{x}(t))), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0. \quad (22)$$

对光滑解 $S_1(t, x)$ 沿特征线 $x = \hat{x}(t)$ 从 $t=0$ 到 $t=t^*$ 积分得

$$S_1(t^*, \hat{x}(t^*)) = S_1(0, \hat{x}_0) + \int_0^{t^*} \left[\frac{c'(u)}{4c(u)} (S_1^2 - R_1^2) - \frac{\lambda}{2} (u + u^3) \right] (t, \hat{x}(t)) dt,$$

则

$$\begin{aligned} |S_1(t^*, \hat{x}(t^*))| &\leq |S_1(0, \hat{x}_0)| + \int_0^{t^*} \left[\frac{|c'(u)|}{4c(u)} (S_1^2 + R_1^2) + \frac{\lambda}{2} |u + u^3| \right] (t, \hat{x}(t)) dt \\ &\leq (2c_1 + \varepsilon) \max_{z \in [-1, 1]} |\varphi'(z)| + \frac{c_1}{c_0^2} \int_{\hat{x}_0}^{x^*} (S_1^2 + R_1^2) (\hat{t}(x), x) dx \\ &\quad + \frac{1}{c_0} \int_{\hat{x}_0}^{x^*} \lambda \left(u^2 + \frac{u^4}{2} \right) (\hat{t}(x), x) dx + \frac{\lambda x_0}{2c_0} \\ &\leq (2c_1 + \varepsilon_0) \max_{z \in [-1, 1]} |\varphi'(z)| + \frac{c_1 + c_0}{c_0^2} M_2 \varepsilon_0 + \frac{\lambda x_0}{2c_0}. \end{aligned}$$

由 (t^*, x^*) 在曲线 $x = \hat{x}(t)$ 的任意性知, 当 $\varepsilon < \varepsilon_0$ 时, $S_1(t, \hat{x}(t))$ 在 $[0, T_*]$ 一致有界。

综上, 引理 1 证毕。

由引理 1 以及(5) (9)可知, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正数 $T_* = \frac{5x_0 - 3\varepsilon}{6c_1} < \frac{x_0 - \varepsilon}{c_1}$ 和足够小的正数

$\varepsilon_0 = \min \left\{ c_0, \delta, \frac{x_0}{3}, \frac{1}{3M_2M_3}, \frac{c'(u_0)x_0}{48c_1^2M_2M_3} \right\}$, 使得当 $\varepsilon < \varepsilon_0$ 且 $t \rightarrow T_*$ 时, 有 $\nabla u \rightarrow +\infty$ 。即当初始能量 $E(0)$ 任意小时, 初值问题(6)的经典解会在有限时间内发生爆破, 定理 1 证毕。

致 谢

感谢审稿专家和编辑老师对本文提出宝贵的修改意见。

参考文献

- [1] 孙新涛, 钱祥忠. 电场对向列相液晶指向矢取向的影响[J]. 淮南工业学院学报, 1999, 19(2): 71-74.
- [2] Hunter, J.K. and Zheng, Y. (1995) On a Nonlinear Hyperbolic Variational Equation: I. Global Existence of Weak Solutions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **129**, 305-353. <https://doi.org/10.1007/bf00379259>
- [3] Stewart, I.W. (2004) The Static and Dynamic Continuum Theory of Liquid Crystals: A Mathematical Introduction. CRC Press, 26-28.
- [4] Ali, G. and Hunter, J.K. (2009) Orientation Waves in a Director Field with Rotational Inertia. *Kinetic & Related Models*, **2**, 1-37. <https://doi.org/10.3934/krm.2009.2.1>
- [5] Glassey, R.T., Hunter, J.K. and Zheng, Y. (1996) Singularities of a Variational Wave Equation. *Journal of Differential Equations*, **129**, 49-78. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0111>
- [6] Duan, W., Hu, Y. and Wang, G. (2020) Singularity and Existence for a Multidimensional Variational Wave Equation Arising from Nematic Liquid Crystals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **487**, Article 124026. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124026>
- [7] Zhang, P. and Zheng, Y. (2003) Weak Solutions to a Nonlinear Variational Wave Equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **166**, 303-319. <https://doi.org/10.1007/s00205-002-0232-7>
- [8] Zhang, P. and Zheng, Y. (2005) Weak Solutions to a Nonlinear Variational Wave Equation with General Data. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **22**, 207-226. <https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2004.04.001>
- [9] Bressan, A. and Huang, T. (2016) Representation of Dissipative Solutions to a Nonlinear Variational Wave Equation. *Communications in Mathematical Sciences*, **14**, 31-53. <https://doi.org/10.4310/cms.2016.v14.n1.a2>
- [10] Bressan, A. and Zheng, Y. (2006) Conservative Solutions to a Nonlinear Variational Wave Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **266**, 471-497. <https://doi.org/10.1007/s00220-006-0047-8>
- [11] Bressan, A. (2016) Uniqueness of Conservative Solutions for Nonlinear Wave Equations via Characteristics. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, **47**, 157-169. <https://doi.org/10.1007/s00574-016-0129-y>
- [12] Bressan, A. and Chen, G. (2017) Lipschitz Metrics for a Class of Nonlinear Wave Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **226**, 1303-1343. <https://doi.org/10.1007/s00205-017-1155-7>
- [13] Song, K. (2003) On Singularity of a Nonlinear Variational Sine-Gordon Equation. *Journal of Differential Equations*, **189**, 183-198. [https://doi.org/10.1016/s0022-0396\(02\)00150-x](https://doi.org/10.1016/s0022-0396(02)00150-x)
- [14] Qin, F.M., Song, K. and Wang, Q. (2023) Singularity Formation for Nonlinear Variational Sine-Gordon Equation in a Multidimensional Space. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **60**, 1697-1704. <https://doi.org/10.4134/BKMS.b220859>
- [15] Hu, Y. (2022) Singularity for a Nonlinear Degenerate Hyperbolic-Parabolic Coupled System Arising from Nematic Liquid Crystals. *Advances in Nonlinear Analysis*, **12**, Article 20220268. <https://doi.org/10.1515/anona-2022-0268>
- [16] Chen, G. and Zheng, Y. (2013) Singularity and Existence for a Wave System of Nematic Liquid Crystals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **398**, 170-188. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.08.048>
- [17] Chen, G. and Sofiani, M. (2023) Singularity Formation for the General Poiseuille Flow of Nematic Liquid Crystals. *Communications on Applied Mathematics and Computation*, **5**, 1130-1147. <https://doi.org/10.1007/s42967-022-00190-5>