Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(3), 127-135
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.153084

Hans汉斯

一道数学分析题目的多种解法

回思琪[1]，李　刚[2]

[1]新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐
[2]新疆开放大学教务处，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2025年2月13日；录用日期：2025年3月3日；发布日期：2025年3月14日

摘　要

针对一道数学分析中常见的一致收敛性题目，给出两种新的解法，构造出一套新的解题工具。

关键词

数学分析，一致收敛性

Multiple Solutions to a Mathematical Analysis Problem

Siqi Hui[1], Gang Li[2]

[1]School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang
[2]Dean's Office, The Open University of Xinjiang, Urumqi Xinjiang

Received: Feb. 13th, 2025; accepted: Mar. 3rd, 2025; published: Mar. 14th, 2025

Abstract

Aiming at a common problem of uniform convergence in Mathematical Analysis, two new solutions are given and a new set of solving tools is constructed.

Keywords

Mathematical Analysis, Uniform Convergence

文章引用: 回思琪, 李刚. 一道数学分析题目的多种解法[J]. 理论数学, 2025, 15(3): 127-135.
DOI: 10.12677/pm.2025.153084

1. 引言

函数列的一致收敛性是数学分析中的重要概念，对研究极限函数的连续性、可微性、可积性以及如何计算它们的导数和积分具有重要的作用。常庚哲、史济怀编著的《数学分析教程》[1]，谢惠民编著的《数学分析习题课讲义》[2]，以及佘志坤主编的《全国大学生数学竞赛解析教程》[3]等数学分析类教材和辅导书中多次出现了这样一道一致收敛的题目，此题被广泛采用说明了其经典性，并且在难度与深度上具有分析和探讨的价值。关于此题有多种解法，本文将给出三种证明，可供教师及考研学生参阅。通过一题多解教学，可以有效拓宽学生解题思路，提升学生分析与解决问题的能力及创新意识。

2. 题目及解法

试题 设$\{a_n\}$为单调下降的正数列且$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

证明 由$\{a_n\}$单调下降，$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$，可知$\sup\limits_{k\ge n}\{ka_k\}$为单调下降且有$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\ge n}\{ka_k\} = 0$，则对任意$\varepsilon > 0$，存在正整数$N\in\mathbb{N}$，使$n > N$时，$\left|\sup\limits_{k\ge n}\{ka_k\}\right| < \varepsilon$成立。

要证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，根据函数项级数的周期性及奇偶性，等价于证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$在$[0,\pi]$上一致收敛。设$m\ge n\ge 2$且均为正整数，即$S_{n,m}(x) = \sum\limits_{k=n}^{m} a_k \sin kx$。

根据 Cauchy 收敛原理，则需证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,\pi]}\left|S_{n,m}(x)\right| = 0$。由于

$$\sin kx \sin\frac{x}{2} = \frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2},$$

则有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m} a_k \sin kx &= \sum_{k=n}^{m} a_k \frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \\
&= a_n \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} + \sum_{k=n+1}^{m} a_k \frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \sum_{k=n}^{m} a_k \frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \\
&= a_n \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} + \sum_{k=n}^{m-1} a_{k+1} \frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \sum_{k=n}^{m-1} a_k \frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - a_m \frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \\
&= a_n \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \sum_{k=n}^{m-1}\left(a_k - a_{k+1}\right) \frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - a_m \frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

考虑将区间$[0,\pi]$分成三部分进行估计：$\left[0,\frac{\pi}{m}\right]$，$\left[\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{2n}\right]$，$\left[\frac{\pi}{2n},\pi\right]$。

当x在$\left[0,\frac{\pi}{m}\right]$中时，根据不等式$\sin x\le x$，$x\in(0,\pi)$，可以得到

$\left|S_{n,m}(x)\right|=\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\sin kx\right|=\sum_{k=n}^{m}a_k\sin kx\le x\sum_{k=n}^{m}ka_k\le\frac{\pi}{m}(m-n)\sup_{k\ge n}\{ka_k\}\le\pi\sup_{k\ge n}\{ka_k\}$成立。

当x在$\left[\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{2n}\right]$中时，考虑分段估计(这是因为$x$的取值范围下界不是无穷小)，记$N=\left[\frac{\pi}{x}\right]$，则有$n\le\frac{\pi}{2x}<\frac{\pi}{x}-1<N\le\frac{\pi}{x}\le m$，$x\le\frac{\pi}{N}<2x$，根据不等式$\sin x\le x$与 Jordan 不等式$\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，可得估计

$$
\begin{aligned}
\left|S_{n,m}(x)\right|&=\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\sin kx\right|=\left|\sum_{k=n}^{N}a_k\sin kx+\sum_{k=N+1}^{m}a_k\sin kx\right|\\
&\le\frac{\pi}{2N}\sum_{k=n}^{N}ka_k+\sum_{k=N+1}^{m}a_k\sin kx\\
&\le\frac{\pi}{2N}\sum_{k=n}^{N}ka_k+a_m\frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\\
&\le\frac{\pi}{2}\sup_{k\ge n}\{ka_k\}+\frac{a_m}{\sin\frac{x}{2}}\le\pi\sup_{k\ge n}\{ka_k\}+a_m\frac{\pi}{x}\\
&\le\pi\sup_{k\ge n}\{ka_k\}+ma_m\le(\pi+1)\sup_{k\ge n}\{ka_k\}
\end{aligned}
$$

当x在$\left[\frac{\pi}{2n},\pi\right]$中，根据我们对$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$的变形结合 Jordan 不等式，可以得到下面的估计式成立：

$$
\begin{aligned}
\left|S_{n,m}(x)\right|&=\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\sin kx\right|\\
&\le\left|a_n\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|+\left|a_m\frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|+\sum_{k=n}^{m-1}\left|(a_k-a_{k+1})\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\\
&\le\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(a_n+a_m+\sum_{k=n}^{m-1}(a_k-a_{k+1})\right)=\frac{a_n}{\sin\frac{x}{2}}\\
&\le\frac{a_n}{\sin\frac{\pi}{4n}}\le 2na_n\le 2\sup_{k\ge n}\{ka_k\}
\end{aligned}
$$

结合一开始得到的有关$\sup_{k\ge n}\{ka_k\}$的估计：对任意$\varepsilon>0$，存在正整数$N\in\mathbb{N}$，使得$n>N$，$\left|\sup_{k\ge n}\{ka_k\}\right|<\varepsilon$成立，可以得到$\sup_{x\in[0,\pi]}\left|S_{n,m}(x)\right|\le(\pi+1)\sup_{k\ge n}\{ka_k\}$，从而有

$$\sup_{x\in[0,\pi]}\left|S_{n,m}(x)\right|\le(\pi+1)\sup_{k\ge n}\{ka_k\}<(\pi+1)\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,\pi]}\left|S_{n,m}(x)\right|=0,$$

可得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，得证。

评注 该参考答案的证明是用 Cauchy 一致收敛准则来判定函数项级数的结果，所用的分析方法具有一定特点，值得学习。一般参考书上基本都是采用此方法，将 x 分为三个区间进行估计，可以发现，此方法技巧性较高，不仅证明过程繁杂，而且相对不容易思考，对学生解决问题的能力要求较高。

以下两种新解法避开了将 x 分为三个区间讨论，主要利用 Fejér-Jackson 不等式、Dirichlet 判别法、Euler-Maclaurin 公式等，对标准工具进行改造，给出问题的证明。

3. 新解法

接下来我们给出试题证明的新解法。

思路 1 由题目可知 $\{a_n\}$ 单调下降，但无法确定 $\{na_n\}$ 的单调性，可以先考虑新的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 的一致收敛性，其中 nb_n 是单调递减趋于 0 的正项数列。由 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\frac{\sin nx}{n}$，根据 nb_n 单调递减趋于 0，考虑使用函数项级数 Dirichlet 判别法证明 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 一致收敛，那么根据三角函数的周期性以及奇偶性只要证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0,\pi)$ 上一致有界即可。

证法 1 由 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\frac{\sin nx}{n}$，则根据 Dirichlet 判别法，只需证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0,\pi)$ 上一致有界即可。

为证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0,\pi)$ 上一致有界，先给出如下引理。

引理 1 [4] (Fejér-Jackson 不等式) 设 $x\in(0,\pi)$，n 是正整数，则有 $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}>0$。

证明 记 $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$，为求 $f_n(x)$ 在 $x\in(0,\pi)$ 上的极值点，考虑求 $f_n(x)$ 的导数得 $f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$，根据和差化积公式，

$$\begin{aligned}2\sin\frac{x}{2}f_n'(x)&=2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\\&=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}\end{aligned}$$

得

$$f_n'(x)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

可以发现 $f_n'(x)$ 的所有零点满足 $\frac{n}{2}x=k\pi(k\in\mathbb{Z})$ 和 $\frac{n+1}{2}x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$。

在 $(0,\pi)$ 上，将这些零点从小到大进行排序：

$$0<\frac{\pi}{n+1}<\frac{2\pi}{n}<\frac{3\pi}{n+1}<\frac{4\pi}{n}<\cdots<\frac{2\left[\frac{n}{2}\right]\pi}{n}\le\pi.$$

在 $\left(0,\frac{\pi}{n+1}\right)$ 上 $f_n'(x)>0$，即 $f_n(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{n+1}\right)$ 上单调递增，而后每经过一次零点 $f_n'(x)$ 改变一次符号，可以得到 $f_n(x)$ 的所有极小值点为 $\frac{2\pi}{n},\frac{4\pi}{n},\cdots,\frac{2\left[\frac{n}{2}\right]\pi}{n}$。

下面用数学归纳法证明 $f_n(x)>0$ 在 $(0,\pi)$ 上成立。

(i) 当 $n=1$ 时，$f_1(x)=\sin x$，结论显然成立；

(ii) 假设对任意 $n-1$，其中 $n\ge 2$ 时 $f_{n-1}(x)>0$ 成立，注意到，对 $j=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$，有 $f_n\left(\frac{2j\pi}{n}\right)=f_{n-1}\left(\frac{2j\pi}{n}\right)+\sin\left(n\cdot\frac{2j\pi}{n}\right)=f_{n-1}\left(\frac{2j\pi}{n}\right)>0$ 成立，归纳完毕，从而 $f_n(x)>0$ 在 $(0,\pi)$ 上恒成立。

下面回到证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0,\pi)$ 上一致有界。

设 $\forall x\in(0,\pi)$，存在与 x 无关的 $M>0$，对 $\forall n\in\mathbb{N}$，使得 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\le M$。

(i) 当 $n\le\frac{2\sqrt{2\pi}}{x}$ 时，由 $\sin t\le t$，有 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{kx}{k}=nx\le 2\sqrt{2\pi}$。

(ii) 当 $n>\frac{2\sqrt{2\pi}}{x}$ 时，取定 m 使得 m 满足：$mx\le\sqrt{2\pi}\le(m+1)x$，这里 $m\le n$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}+\sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=I_1+I_2$，由于 $\sin t\le t$，$I_1=\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}\le mx\le\sqrt{2\pi}$，记 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$，由 Abel 变换值

$$\begin{aligned}I_2&=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\sum_{k=m+1}^{n-1}S_k(x)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{S_n(x)}{n}-\frac{S_m(x)}{m+1}\\&\le\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\sum_{k=m+1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+1}\right)\\&=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left[\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+1}\right)\right]=\frac{2}{(m+1)\sin\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

而在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，有 $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$ 成立，则 $\sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\le\frac{2\pi}{(m+1)x}$，从而可得 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\le mx+\frac{2\pi}{(m+1)x}\le 2\sqrt{2\pi}$，故综上对任意 $n\in\mathbb{N}$，$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\le 2\sqrt{2\pi}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0,\pi)$ 上一致有界。

下证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 在 $(0,\pi)$ 上一致收敛：取定所有 b_n 满足 $a_n\ge b_n$，由于 a_n，b_n 均有界且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N_1\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N_1$ 时，有 $|a_n-b_n|<\varepsilon$。设其公共上界为 A，$\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-b_n)=0$，

则 $\sup\limits_{k\ge n}\left\{k\left(a_k-b_k\right)\right\}$ 单调递减趋于 0，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N_2\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N_2$ 时，有 $\sup\limits_{k\ge n}\left\{k\left(a_k-b_k\right)\right\}<\varepsilon$。若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 在 $[0,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$，问题转化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-b_n\right)\sin nx$ 在 $(0,\pi)$ 上一致收敛问题。

对区间 $(0,\pi)$ 分段为 $\left(0,\dfrac{\pi}{n}\right]$ 和 $\left[\dfrac{\pi}{n},\pi\right)$，并取 $N=\max\left\{N_1,N_2\right\}$。

若 x 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{n}\right]$ 中时，可以得到

$$\left|I_1\right|=\left|\sum_{k=1}^{N}\left(a_k-b_k\right)\sin kx\right|\le\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{N}N\left(a_k-b_k\right)\le\frac{2AN^2}{n},$$

$$\left|I_2\right|=\left|\sum_{k=N+1}^{n}\left(a_k-b_k\right)\sin kx\right|\le\frac{\pi}{n}\sum_{k=N+1}^{n}k\left(a_k-b_k\right)\le\frac{\pi}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\sup_{i\ge N+1}\left\{i\left(a_i-b_i\right)\right\}\le\pi\sup_{i\ge N+1}\left\{i\left(a_i-b_i\right)\right\}$$

若 x 在 $\left[\dfrac{\pi}{n},\pi\right)$ 中时，要证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-b_n\right)\sin nx$ 在 $(0,\pi)$ 上一致收敛等价于 x 在 $\left[\dfrac{\pi}{n},\pi\right)$ 中有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\left(a_k-b_k\right)\sin kx=0$。

分析可得，

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot k\left(a_k-b_k\right)\sin kx\right|&\le\frac{1}{n}\left|\sum_{k=n}^{\infty}k\left(a_k-b_k\right)\sin kx\right|\le\frac{1}{n}\left|\sum_{k=n}^{\infty}\sup_{i\ge k}\left\{i\left(a_i-b_i\right)\right\}\sin kx\right|\\&\le\frac{1}{2n\sin\frac{x}{2}}\left(\sup_{i\ge n}\left\{i\left(a_i-b_i\right)\right\}+\sum_{k=n}^{\infty}\left(\sup_{i\ge k}\left\{i\left(a_i-b_i\right)\right\}-\sup_{i\ge k+1}\left\{i\left(a_i-b_i\right)\right\}\right)\right)\\&=\frac{1}{n}\left|\sup_{i\ge n}\left\{i\left(a_i-b_i\right)\right\}\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\sum_{k=n}^{\infty}\left(\sup_{i\ge k}\left\{i\left(a_i-b_i\right)\right\}-\sup_{i\ge k+1}\left\{i\left(a_i-b_i\right)\right\}\right)\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\\&\le\frac{1}{2n\sin\frac{x}{2}}\left(\sup_{i\ge n}\left\{i\left(a_i-b_i\right)\right\}+\sum_{k=n}^{\infty}\left(\sup_{i\ge k}\left\{i\left(a_i-b_i\right)\right\}-\sup_{i\ge k+1}\left\{i\left(a_i-b_i\right)\right\}\right)\right)\\&=\frac{\sup\limits_{i\ge n}\left\{i\left(a_i-b_i\right)\right\}}{n\sin\frac{x}{2}}\le\frac{n\sup\limits_{i\ge N+1}\left\{i\left(a_i-b_i\right)\right\}}{2n}\le\sup_{i\ge N+1}\left\{i\left(a_i-b_i\right)\right\}\end{aligned}$$

从而可以得到 x 在 $\left[\dfrac{\pi}{n},\pi\right)$ 上有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\left(a_k-b_k\right)\sin kx=0$ 成立。

综上可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-b_n\right)\sin nx$ 在 $(0,\pi)$ 上一致收敛到 $g(x)$。由

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx-f(x)-g(x)\right|&=\left|\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-b_k\right)\sin kx+\sum_{k=1}^{n}b_k\sin kx-f(x)-g(x)\right|\\&\le\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\sin kx-f(x)\right|+\left|\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-b_k\right)\sin kx-g(x)\right|\\&\le\varepsilon+\left|\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-b_k\right)\sin kx-g(x)\right|\end{aligned}$$

成立，可得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $(0,\pi)$ 上一致收敛，从而证毕。

评注 解法 1 根据 Dirichlet 判别法，利用正弦函数的周期性以及奇偶性证明级数在 $(0,\pi)$ 上一致有界即可。为此使用 Fejér-Jackson 不等式，先证明了条件更强的命题，再利用其结果对原命题的函数项级数进行逼近从而完成了证明。证明过程简洁明了，这也从侧面说明了加强基础知识的掌握有利于提高学生知识灵活运用能力，也是我们大学数学学习应该努力的方向。

思路 2 上述解法使用 Dirichlet 判别法、Fejér-Jackson 不等式提高了证明的简洁性。下面我们考虑构造一种新的加强工具，对标准工具 Dirichlet 判别法进行改造，主要的工具是 Euler-Maclaurin 求和公式，使其能够应用的级数更加广泛，此工具在解题中有广泛而深刻的应用，值得研究和推广。为此我们先给出引理 2。

引理 2 [5] (Dirichlet 判别法) $\{a_n\}$ 单调趋于 0，$\sum_{i=1}^{n} b_i(x)$ 有界，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 收敛。

渐近估计语言叙述：对 $\forall x \in D$，有 $a_n(x) = o(1)\ n \to \infty$，且 $\sum_{n=1}^{N} b_n(x) = B_N(x) = O(1)$，$N \to \infty$，设 $\{a_n\}$ 单调递减，则有 $a_k(x) - a_{k+1}(x) \ge 0$。

证明 A-D 判别法：根据 Abel 变换，得

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(x) &= a_1(x) b_1(x) + \sum_{k=2}^{n} a_k(x)\big(B_k(x) - B_{k-1}(x)\big) \\
&= a_1(x) b_1(x) + \sum_{k=2}^{n} a_k(x) B_k(x) - \sum_{k=2}^{n} a_k(x) B_{k-1}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x) B_k(x) - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}(x) B_k(x) + a_n(x) B_n(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big) B_k(x) + a_n(x) B_n(x)
\end{aligned}
$$

先分析满足 Dirichlet 判别法条件的 $a_n(x)$ 和 $b_n(x)$，因 $a_n(x) = o(1)\ B_N(x) = O(1)$，可得 $a_n(x) B_n(x) = o(1)$；另一方面，因

$$
\sum_{k=1}^{n-1} \left| \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big) B_k(x) \right| \le M \sum_{k=1}^{n-1} \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big) = M\big(a_1(x) - a_n(x)\big) = O(1),
$$

可以知道，$\sum_{k=1}^{n-1} \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big) B_k(x)$ 在 $x \in D$ 上绝对收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 D 上一致收敛。

分析可知，只需 $\lim_{n\to\infty} a_n(x) B_n(x) = 0$ 即可，而 $B_N(x) = O(1)$ 条件太强，只要有 $B_N(x) = O\Big(\big(a_N(x)\big)^{-a}\Big)$，其中 $a \in (0,1)$，就能使 $\lim_{n\to\infty} a_n(x) B_n(x) = M \lim_{n\to\infty} \big(a_n(x)\big)^{1-a} = 0$；另需

$$
\sum_{k=1}^{n-1} \left| \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big) B_k(x) \right| \sim \sum_{k=1}^{n-1} \left| \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big)\big(a_k(x)\big)^{-a} \right| \le 2 \sum_{k=1}^{n-1} \big(a_k(x)\big)^{1-a}
$$

是绝对收敛的，可知 $a_n(x) = O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{1-a}}}\right)$，其中，$\alpha > 0$ 且有 $\dfrac{\alpha}{1-a} > 1$，就可以满足要求。而这里我们加强了 $a_n(x)$，此时，$B_n(x) = O\left(n^{\frac{a\alpha}{1-a}}\right)$，$\dfrac{a\alpha}{1-a} > 0$，我们便加强了 Dirichlet 判别法，再利用这个改进版本进行证明。

证法 2 由于 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$，可得 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)(n\to\infty)$，即 $a_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$，其中 $\alpha > 1$。只需 $B_n(x) = O\left(\left(a_n(x)\right)^{-a}\right) = O\left(n^{\beta}\right) = O\left(n^{a\alpha}\right) = O\left(n^{\beta}\right)$ 即可，考虑对 $B_k(x) = \sum_{i=1}^{k} b_i(x)$ 使用欧拉－麦克劳林公式(Euler-Maclaurin formula)进行估计：

$$
\begin{aligned}
B_N(x) &= \sum_{n=1}^{N} \sin nx \\
&= \int_1^N \sin xt\,\mathrm{d}t + \frac{\sin x + \sin Nx}{2} + x\int_1^N \left(t - [t] - \frac{1}{2}\right)\cos xt\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\cos x - \cos Nx}{x} + \frac{\sin x + \sin Nx}{2} + x\sum_{k=1}^{N-1}\int_k^{k+1}\left(t - k - \frac{1}{2}\right)\cos xt\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\cos x - \cos Nx}{x} + \frac{\sin x + \sin Nx}{2} + x\sum_{k=1}^{N-1}\int_0^1\left(t - \frac{1}{2}\right)\cos x(t+k)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\cos x - \cos Nx}{x} + \frac{\sin x + \sin Nx}{2} + \sum_{k=1}^{N-1}\int_0^1\left(t - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\sin x(t+k) \\
&= \frac{\cos x - \cos Nx}{x} + \frac{\sin x + \sin Nx}{2} + \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{\sin(k+1)x - \sin kx}{2} - \int_0^1 \sin x(t+k)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{\cos x - \cos Nx}{x} + \frac{\sin x + \sin Nx}{2} + \frac{\sin Nx - \sin x}{2} + \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{N-1}\int_0^1 \mathrm{d}\cos x(t+k) \\
&= \frac{\cos x - \cos Nx}{x} + \frac{\sin x + \sin Nx}{2} + \frac{\sin Nx - \sin x}{2} + \frac{\cos Nx - \cos x}{x} \\
&= \sin Nx
\end{aligned}
$$

从而估计得到 $B_N(x) = O(N)$ 相当于 $B_n(x) = O\left(\left(a_n(x)\right)^{-a}\right) = O\left(n^{a\alpha}\right) = O\left(n^{\beta}\right)$ $\beta = 1$ 的情况，从而满足改进后的 Abel-Dirichlet 判别法的条件，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛，得证。

评注 解法 2 通过改进 Dirichlet 判别法从而达到简化前述方法中逼近的过程，进而思考出了这套新的工具。主要用到的工具是 Euler-Maclaurin 求和公式，对于光滑函数的和而言这是标准的工具，不过这个工具也是有局限的，因为有时候往往只能得到精度在 $O(1)$ 级别的估计，而对于判定是否条件收敛这种需要 $o(1)$ 级别的估计问题是不合适的，这也是为什么绝对收敛判定起来更容易，因为判定绝对收敛只需要 $O(1)$ 精度。

笔者认为当标准工具达到能力的极限范围时，如何思考标准工具诞生的想法，从而改造标准工具以应对更复杂的数学问题是解题中最基本、最重要的能力之一。因为标准工具能直接解决的问题往往相对来说比较基础，难度较大问题都需要改造甚至创造新工具才能得到解决。

4. 总结

本文介绍了级数收敛性问题的三种解法。原解答是用 Cauchy 一致收敛准则来判定函数项级数的经典性结果，其中所用的分析方法具有一定特点，值得学习，但此方法技巧性较高，证明过程繁杂。解法 1 使用函数项级数 Dirichlet 判别法与 Fejér-Jackson 不等式证明一致收敛，提高了证明的简洁性。解法 2 通过改进 Dirichlet 判别法从而达到简化解法 1 的逼近过程，本研究方法为笔者思考出的一套新的解题工具，当我们思考数学问题时往往涉及到对标准工具的改造，如果仅仅会使用标准工具的结论，其实是没有办法独立解决有价值的数学问题，笔者通过对 Dirichlet-Abel 判别法的改进，希望能给学生在学习一致收敛性及判别法中提供一种新的思路。

参考文献

[1] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程(下册) [M]. 第 3 版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2013.

[2] 谢惠民, 恽自求, 易法槐, 钱定边. 数学分析习题课讲义(下册) [M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2018.

[3] 佘志坤. 全国大学生数学竞赛解析教程(上册) [M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2024.

[4] 戈弗雷·哈代. 不等式[M]. 第 2 版. 北京: 人民邮电出版社, 2020.

[5] 华东师范大学数学系. 数学分析(上册) [M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.