**Pure Mathematics** 理论数学, 2025, 15(3), 144-155
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.153086

# 加权带有限函数空间在一致框架下的熵数

**任 航，高 洁**

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2025年1月17日；录用日期：2025年2月17日；发布日期：2025年3月17日

## 摘 要

熵数作为衡量函数空间复杂性的核心工具，在人工智能、控制论和科学计算等领域具有重要意义。本文基于已有研究，构建了加权带有限函数空间，采用离散化方法，探讨了加权带有限函数空间在一致框架下的熵数问题，并进一步估计出一致框架下熵数的精确渐近阶，即设 $1<p,\ q<\infty,\ r>\max\left\{0,\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right\},\ n=0,1,2,\cdots$，则 $\varepsilon_n\left(B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R}),B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right)\asymp n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}$。其中 $B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})$ 是权为 $\omega=\left\{|k|^r\right\}_{k\in\mathbb{Z}_0}$ 的加权带有限函数空间。

## 关键词

加权带有限函数空间，熵数，一致框架，渐近阶

# Entropy Numbers of Weighted Band-Limited Function Space in Uniform Setting

**Hang Ren, Jie Gao**

College of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Jan. 17th, 2025; accepted: Feb. 17th, 2025; published: Mar. 17th, 2025

## Abstract

**Entropy numbers, as a core tool for measuring the complexity of function spaces, play a significant role in fields such as artificial intelligence, cybernetics, and scientific computing. Based on existing research, this study constructs weighted band-limited function spaces and employs discretization methods to investigate the entropy numbers of these spaces in uniform setting. Furthermore, the**

文章引用: 任航, 高洁. 加权带有限函数空间在一致框架下的熵数[J]. 理论数学, 2025, 15(3): 144-155.
DOI: 10.12677/pm.2025.153086

**exact asymptotic order of the classical entropy number of the weighted band-limited function spaces is estimated, specifically: If $1<p,\ q<\infty,\ r>\max\left\{0,\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right\},\ n=0,1,2,\cdots$, then $\varepsilon_n\left(B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R}),B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right)\asymp n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}$. Where $B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})$ is the weighted band-limited function space characterized by weight $\omega=\left\{|k|^r\right\}_{k\in\mathbb{Z}_0}$.**

## Keywords

**Weighted Band-Limited Function Space, Entropy Numbers, Uniform Setting, Asymptotic Order**



## 1. 引言及主要结论

本节主要介绍本文研究的函数空间——加权带有限函数空间及其主要性质。下面介绍一些预备知识。

首先介绍 $L_p$ 空间和 $\ell_p$ 空间。

令 $1\le p\le\infty$，$L_p(\mathbb{R})$ 为定义在实数 $\mathbb{R}$ 上的 $p$-次幂可积的经典 Lebesgue 空间，并赋经典范数 $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{R})}$。记 $\ell_p(\Omega)$ 为 $\Omega$ 上的 $p$-次幂可和经典实序列空间，$\|\cdot\|_{\ell_p(\Omega)}$ 表示其经典范数，其中 $\Omega\in\{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_0,\mathbb{N},\mathbb{N}_+\}$，特别地，$\ell_p$ 表示为 $\ell_p(\mathbb{Z})$，$\|\cdot\|_{\ell_p}$ 表示 $\|\cdot\|_{\ell_p(\mathbb{Z})}$。它们范数如下：

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R})}=\begin{cases}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<\infty\\ \operatorname{ess\,sup}|f(x)|, & p=\infty\end{cases}，\text{其中 } f\in L_p(\mathbb{R}).$$

$$\|x\|_{\ell_p}=\begin{cases}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<\infty\\ \sup_{k\ge1}|x_k|, & p=\infty\end{cases}，\text{其中 } x\in\ell_p(\mathbb{Z}).$$

现在介绍带有限函数空间。

设 $\sigma>0$，令 $g(z)$ 为定义在复数域 $\mathbb{C}$ 上的整函数，若对 $\forall\varepsilon>0$，存在仅与 $\varepsilon$ 有关的正常数 $A=A(\varepsilon)$，使得

$$|g(z)|\le A\exp\left((\sigma+\varepsilon)|Z|\right),\ \forall z\in\mathbb{C},$$

即 $g(z)$ 称之为指数 $\sigma$-型整函数。用 $B_\sigma$ 表示限制在 $\mathbb{R}$ 上为有界的所有指数 $\sigma$-型整函数的集合。

给定的 $1\le p\le\infty,\sigma>0$，令 $B_{\sigma,p}(\mathbb{R})=B_\sigma(\mathbb{R})\cap L_p(\mathbb{R})$，$B_{\sigma,p}(\mathbb{R})$ 称之为带有限函数空间，它关于范数 $\|\cdot\|_{L_p}$ 为 Banach 空间。特别地，经典的 Paley-Wiener 空间记为 $B_{\sigma,2}(\mathbb{R})$。由 Schwarz 定理[1]知

$$B_{\sigma,p}(\mathbb{R})=\left\{f\in L_p(\mathbb{R}),\operatorname{supp}\hat{f}\subset[-\sigma,\sigma]\right\}.$$

这里 $\hat{f}$ 表示 $f$ 的 Fourier 变换，即对 $f\in L_1(\mathbb{R})$，$f$ 的傅里叶变换如下

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi\cdot x}\,\mathrm{d}x.$$

且 $\hat{f}(k)$，$k\in\mathbb{Z}$ 表示 $f$ 的傅里叶系数。

带有限函数空间带有限函数空间在通信、数据处理、图像压缩等方面有广泛应用，得到深入的研究，取得了一系列深刻的结果。下面回顾它的主要性质，其在本文的研究中起到重要的作用。

**引理 1.1** [2] 令 $1<p<\infty$，$\sigma>0$

(1) 若 $f\in B_{\sigma,p}(\mathbb{R})$，则

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\operatorname{sinc}\left(\sigma\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$

且等式右边级数在 $\mathbb{R}$ 上绝对一致收敛于 $f(x)$，其中 $\sin ct=\begin{cases}\dfrac{\sin t}{t}, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}.$

(2) 存在仅依赖于 $p$ 和 $\sigma$ 的正常数 $c_1$ 和 $c_2$，使得对 $\forall f\in B_{\sigma,p}(\mathbb{R})$，有

$$c_1\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\|f\|_{\sigma,p}\leq c_2\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

即

$$\|f\|_{\sigma,p}\asymp\left\|\left\{f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right\}\right\|_{\ell_p(\mathbb{Z})}.$$

(3) 对任意 $y=\{y_k\}\in\ell_p(\mathbb{Z})$，则存在唯一的 $g\in B_{\sigma,p}(\mathbb{R})$ 使得

$$g\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)=y_k,\quad k\in\mathbb{Z}\cdot$$

**注 1.**

i) 引理 1.1 表明若 $y=\{y_k\}\in\ell_p(\mathbb{Z})$，则存在唯一的 $g\in B_{\sigma,p}(\mathbb{R})$，使得

$$g(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k\operatorname{sinc}\left(\sigma\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right),\quad x\in\mathbb{R},$$

且

$$g\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)=y_k,\quad k\in\mathbb{Z}\cdot$$

ii) 由引理 1.1 知

$$\mathring{B}_{\sigma,p}(\mathbb{R}):=\left\{f\in B_{\sigma,p}(\mathbb{R})\,\middle|\,f(0)=0\right\}\cdot$$

为 $B_{\sigma,p}(\mathbb{R})$ 的子空间，且关于范数 $\|\cdot\|_{\sigma,p}$ 也为 Banach 空间。

为方便，在下面的行文中，若没有特殊说明，参数 $c_1$ 和 $c_2$ 中的参数应为常数。

下面介绍本文研究的函数空间——加权带有限函数空间。

设 $\omega=\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}_0}$ 为定义在 $\mathbb{Z}_0$ 上的正实数序列，$1<p<\infty$，$\sigma>0$ 对 $f\in\mathring{B}_{\sigma,p}(\mathbb{R})$，令

$$f_\omega(x):=\sum_{k\in\mathbb{Z}_0}\omega_k f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\operatorname{sinc}\left(\sigma\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$

记

$$B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathring{B}_{\sigma,p}(\mathbb{R}) \middle| \left\{ \omega_k f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \right\} \in \ell_p(\mathbb{Z}_0) \right\}. \tag{1.1}$$

对 $f \in B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})$，令

$$\|f\|_{p,\omega} := \|f_\omega\|_{\sigma,p}.$$

易见，$B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})$ 是 $\mathring{B}_{\sigma,p}(\mathbb{R})$ 的线性子空间，$\|\cdot\|_{p,\omega}$ 为 $B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})$ 上的范数，且

$$\|f\|_{p,\omega} \asymp \left\| \left\{ \omega_k f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \right\} \right\|_{\ell_p(\mathbb{Z}_0)}.$$

称 $B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})$ 为加权带有限函数空间，其中 $\omega = \{\omega_k\}$ 为其权重。

在下文中，若没特殊说明，总是假设 $\omega = \{\omega_k\}$ 为定义在 $\mathbb{Z}_0$ 上的正实数序列，且满足条件

$$\lim_{|k|\to\infty} \omega_k = \infty, \inf_{k\in\mathbb{Z}_0} \omega_k = \rho > 0. \tag{1.2}$$

**引理 1.2** [3] 设 $1 < p < \infty, \sigma > 0, \omega = \{\omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}_0}$ 为定义在 $\mathbb{Z}_0$ 上的正实数序列，且满足以上条件(1.2)，则 $B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})$ 关于 $\|\cdot\|_{p,\omega}$ 为 Banach 空间。

在以下的行文中，若没有特殊说明，$B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})$ 均指 Banach 空间 $\left(B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{p,\omega}\right)$，其中 $r$ 满足以上条件(1.2)，而 $B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})$ 均表示 $\mathring{B}_{\sigma,p}(\mathbb{R})$。

**引理 1.3** [3] 设 $1 < p, q < \infty$，$\omega = \{\omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}_0}$ 满足以上条件(1.2)，则 $B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})$ 可以连续地嵌入 $B_{\sigma,q}(\mathbb{R})$ 中。

本文主要讨论在一致框架下，权重 $\omega = \left\{|k|^r\right\}_{k\in\mathbb{Z}_0}$，并且当 $r > \max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right\}$ 时，$B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})$ 在 $B_{\sigma,q}(\mathbb{R})$ 中的熵数，并且估计其渐近阶。在以下行文中，若无特殊说明，$B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})(1 < p < \infty)$ 均指权重 $\omega = \left\{|k|^r\right\}_{k\in\mathbb{Z}_0}$ 时的加权带有限函数空间。

现在，让我们回顾一下一致框架下伪宽度和熵数的定义。设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间，$W \subset X$，$W \neq \varnothing$，$1 \le p \le \infty$，$n = 1, 2, 3, \cdots$ 称

$$\rho_n(W, X) := \inf_{M_n} \sup_{x\in W} \inf_{y\in M_n} \|x - y\|$$

$$\varepsilon_n(W, X) := \inf_{M_n} \sup_{x\in W} \inf_{y\in M_n} \|x - y\|$$

分别为一致框架下 $W$ 在 $X$ 中的伪宽度、熵数，简称 $W$ 在 $X$ 中的伪宽度、熵数。其中，$M_n$ 取遍 $X$ 中元素个数不超过 $2^n$ 的集合。关于熵数的详细介绍及性质，可参见 Pietsch [4]、Carl and Stephani [5]以及 Lorentz 等[6]的专著。

**引理 1.4** [7] 如果 $M$ 是维度为 $n$ 的线性流形，那么 $\dim_p(M) = n$。根据一致框架下伪宽度和熵数的定义，很容易看出 $\dim_p(M) \le \log|M|$。因此

$$\rho_n(W, X) \le \varepsilon_n(W, X) \tag{1.3}$$

为 $\Omega$ 上实值函数的赋范线性空间 $X$ 的任意子集 $W$。

函数逼近论是现代数学的一个重要分支，它的基本问题是函数的近似表示。它研究的主要内容有线性与非线性逼近方法、最佳逼近阶的估计、宽度问题、熵数问题等等。随着现代科学技术的突飞猛进，它所包含的内容越来越广泛，与泛函分析、微分方程、概率论、计算数学、计算机科学理论等众多学科

有着密不可分的关系。熵数作为逼近论中的重要内容一直被许多研究者所重视，它的估计和许多最优问题，如信息基的$\varepsilon$-复杂性、最优数估计等密切相关。熵数研究的主要对象是基于在现代分析及计算数学中广泛应用的基本函数类，其中包括 Sobolev、Holder-Nikolskii、Besov 及某些解析函数类等，其主要目的是寻找函数类在一定意义下的最佳逼近集和最佳逼近方法，并对最佳逼近阶进行估计。

目前，许多其他学者也对熵数做出了重大贡献。Schütt [8]研究了对称 Banach 空间对角算子的熵数有限维恒等算子的熵数并得到了精确阶。Kühn [9]运用了巧妙的离散化方法，实现了从有限维空间到无穷维空间的转化，给出了满足一定衰减条件的无穷维对角算子的熵数估计。随后，韩永杰[10]将一致框架下的熵数推广到概率框架下，讨论了有限维恒等算子在概率框架下的熵数，得到了其渐近阶。王桐心[11]进一步将有限维恒等算子的熵数问题进行了推广，讨论了无穷维恒等算子在最坏框架下和概率框架下的熵数，并得到了其渐进阶。陈锦[12]讨论了一致框架下无穷维对角算子的熵数精确阶的估计。另一方面，带有限函数作为函数逼近的重要数学工具，在信号处理、通信传输、数据处理等方面有着广泛的应用[13] [14]，并得到众多学者的关注。Li [3]构建了权重为$\omega=\{\omega_k\}=\left\{|k|^r\right\}_{k\in\mathbb{Z}_0}\left(r>\max\left\{0,\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right\}\right)$的加权带有限函数空间$B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R})$带有限函数空间$B_{\sigma,q}(\mathbb{R})(1<p,q<\infty)$中 Kolmogorov $n$-宽度与线性 $n$-宽度的精确渐进阶。

因此，本文继续以上的研究，进一步探讨加权带有限函数空间在一致框架下的熵数问题，得到加权带有限函数空间一致框架下熵数的精确渐近阶估计，即得到本文的主要定理：

**定理 1.1** 设$1<p,\ q<\infty,\ r>\max\left\{0,\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right\},\ n=0,1,2,\cdots$，则

$$\varepsilon_n\left(B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R}),B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right)\asymp n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.$$

本文的结构如下：在第 2 节中，我们首先给出了主要定理的结果。随后，通过离散化方法，得到了加权带有限函数空间$B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R})$在一直框架下经典熵数的精确渐近阶。最后，在所得到的离散化定理的基础上，给出第 3 节中主要定理的证明。

为方便，在此介绍一些符号。用$\mathbb{Z}$表示整数集，$\mathbb{Z}_0=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$表示非负整数集，$\mathbb{N}$表示自然数集，$\mathbb{N}_+$表示正自然数集。$\mathbb{R}$和$\mathbb{C}$分别表示实数集和复数集。在本文中，假设$c_i,i=0,1,\cdots$是和参数$\sigma,p,r$有关的非负常数。对两个正函数$a(y)$和$b(y)$，$y\in D$，如果存在正常数$c_1$满足条件$a(y)\le c_1b(y)$，则记$a(y)\ll b(y)$。若存在正常数$c_2$满足条件$c_2a(y)\ge b(y)$，则记$a(y)\gg b(y)$，若$a(y)\ll b(y)$且$a(y)\gg b(y)$，则记$a(y)\asymp b(y)$。

## 2. 离散化定理

为了估计在一致框架下加权带有限函数空间$B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R})$在$B_{\sigma,q}(\mathbb{R})$中的熵数的精确渐近阶，本节主要建立定理 1.1 的两个离散化定理。首先，介绍有限维空间中的一些记号与基本概念。

用$\ell^m_p(1\le p\le\infty)$为定义在$\mathbb{R}^m$上的$m$维赋范线性空间，其范数为

$$\|x\|_{\ell^m_p}=\begin{cases}\left(\sum\limits_{n=1}^{m}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p\le\infty,\\ \max\limits_{1\le n\le m}|x_n|, & p=\infty.\end{cases}$$

用$B^m_p(r_0)=\left\{x\in\ell^m_p\,\middle|\,\|x\|_{\ell^m_p}\le r_0\right\}$表示$\ell^m_p$中半径为$r_0$的闭球，而$B^m_p:=B^m_p(1)$。特别地，$SB^{\omega}_{\sigma,p}$表示$B^{\omega}_{\sigma,p}$中的单位球，$SB^{\omega}_{\sigma,p}:=\left\{f\in B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R})\,\middle|\,\|f\|_{p,\omega}\le 1\right\}$。

关于$B^m_p$在$\ell^m_q$中的熵数和伪宽度有如下结果。该结果对定理 1.1 的证明起重要作用。

**引理 2.1** [8] [15] 对于任意的 $n,m\in\mathbb{N}$，

(1) 当 $1\le p<q\le\infty$ 时，有

$$\varepsilon_n\left(B_p^m,\ell_q^m\right)\asymp\begin{cases}1, & 1\le n<\log 2m,\\ \left(\dfrac{\log\left(1+\dfrac{m}{n}\right)}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & \log 2m\le n\le 2m,\\ 2^{-\frac{n}{2m}}m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & 2m\le n,\end{cases}$$

(2) 当 $1\le q\le p\le\infty$ 时，有

$$\varepsilon_n\left(B_p^m,\ell_q^m\right)\asymp 2^{-\frac{n}{2m}}m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

**引理 2.2** [16] 设 $1\le p,q\le\infty,n\in\mathbb{N}$，且 $m\ge cn$。

(1) 若 $1\le p<q\le\infty$，则

$$\rho_n\left(B_p^m,\ell_p^m\right)\asymp n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

(2) 若 $1\le q\le p\le\infty$，则

$$\rho_n\left(B_p^m,\ell_p^m\right)\asymp(m-n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

其中 $c$ 为绝对正常数且 $c>1$，对于上述两个公式的上界只要求 $n<m$。

现建立估计定理 1.1 的离散化定理。

对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$，$\mathbb{N}_+=\{1,2,\cdots\}$ 记

$$S_k=\left\{n\in\mathbb{N}_+\middle|2^{k-1}\le n<2^k\right\},$$

则 $|S_k|=2^{k-1}$，且对 $\forall k,k'\in\mathbb{N}$，$k\ne k'$ 有 $S_k\cap S_{k'}=\varnothing$，$\mathbb{N}_+=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k$。

对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$，记

$$F_k=span\left\{e_n(\sigma x)\middle|n\in S_k\right\},$$

则 $\dim F_k=|S_k|=2^{k-1}$。

对 $f\in B_{\sigma,p}(\mathbb{R})$，令

$$(\delta_k f)(x)=\sum_{n\in S_k}f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)e_n(\sigma x)\in F_k.$$

对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$，令

$$I_k:F_k\to\mathbb{R}^{|S_k|}$$

$$f(x)=\sum_{n\in S_k}f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)e_n(\sigma x)\mapsto\left\{f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right\}_{n\in S_k}\tag{2.1}$$

易见，$I_k$ 为 $F_k$ 到 $\mathbb{R}^{|S_k|}$ 的线性同构映射，可知：

对 $\forall f=\sum_{n\in S_k}f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)e_n(\sigma x)\in F_k$，有

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,\omega} &= \left(\sum_{n\in S_k}\left|n^r\right|^p\left|f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\asymp 2^{rk}\left(\sum_{n\in S_k}\left|f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\asymp 2^{rk}\left\|I_k f\right\|_{\ell_p^{|S_k|}}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

易见

$$\|g\|_{\sigma,q} = \left\|I_k g\right\|_{\ell_q^{|S_k|}}, 1<q<\infty. \tag{2.3}$$

因此，$I_k$ 是 $F_k \cap B_{\sigma,q}$ 到 $\ell_q^{|S_k|}$ 上的等距同构映射。

**定理 2.1** 令 $1<q,p<\infty$，$r>\max\left\{0,\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right\}$，$n\in\mathbb{N}_+$，$\{n_k\}$ 为非负实数序列，且 $\sum_{k=1}^{\infty} n_k \le n$，$n_k \le |S_k|$，$k\in\mathbb{N}_+$，则

$$\varepsilon_n\left(B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R}), B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right) \ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-rk}\varepsilon_{n_k}\left(B_p^{|S_k|}, \ell_q^{|S_k|}\right).$$

证明：对 $\forall k$，$\forall f\in SB_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})\cap F_k$，由(2.2)有

$$1 \gg \|f\|_{p,\omega} \gg 2^{rk}\left\|I_k f\right\|_{\ell_p^{|S_k|}}.$$

$\forall g\in B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\cap F_k$，由(2.3)有

$$\|g\|_{\sigma,q} \asymp \left\|I_k g\right\|_{\ell_q^{|S_k|}}.$$

所以

$$\varepsilon_{n_k}\left(SB_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})\cap F_k, B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\cap F_k\right) \ll 2^{-rk}\varepsilon_{n_k}\left(B_p^{|S_k|}, \ell_q^{|S_k|}\right).$$

从而由熵数的定义知，存在 $B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\cap F_k$ 的集合 $L_k\left(|L_k|\le 2^{n_k}\right)$，使得对 $\forall f\in SB_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})\cap F_k$，有

$$\sup_{f\in SB_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})\cap F_k}\ \inf_{g\in L_k}\|f-g\|_{\sigma,q} \ll 2^{-rk}\varepsilon_{n_k}\left(B_p^{|S_k|}, \ell_q^{|S_k|}\right).$$

令 $L=\bigcup_{k=1}^{\infty} L_k$，则

$$|L| \le \prod_{k=1}^{\infty}|L_k| = \prod_{k=1}^{\infty} 2^{n_k} = 2^{\sum_{k=1}^{\infty} n_k} \le 2^n.$$

从而

$$\begin{aligned}\varepsilon_n\left(B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R}), B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right) &\le \sup_{f\in SB_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})}\ \inf_{g\in L}\|f-g\|_{\sigma,q} \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty}\ \sup_{f\in SB_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R})\cap F_k}\ \inf_{g\in L_k}\|f-g\|_{\sigma,q} \\ &\ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-rk}\varepsilon_{n_k}\left(B_p^{|S_k|}, \ell_q^{|S_k|}\right).\end{aligned}$$

这样得到了定理 1.1 的上界估计的定理 2.1。

下面的定理 2.2 是估计定理 1.1 的下界。

**定理 2.2** 令$1<q,p<\infty$， $r>\max\left\{0,\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right\}$， $n\in\mathbb{N}$， $k\in\mathbb{N}$ 且 $n\asymp 2^k$， $|S_k|\geq 2n$，则

$$\varepsilon_n\left(B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R}),B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right)\gg 2^{-rk}\varepsilon_n\left(B_p^{|S_k|},\ell_q^{|S_k|}\right).$$

证明：对 $\forall f\in B_p^{|S_k|}$， $\forall g\in\ell_q^{|S_k|}$，由(2.2)及(2.3)有

$$1\geq\|f\|_{\ell_p^{|S_k|}}\gg 2^{-rk}\left\|I_k^{-1}f\right\|_{p,\omega},$$

$$\|g\|_{\ell_q^{|S_k|}}=\left\|I_k^{-1}g\right\|_{\sigma,q}.$$

所以

$$\varepsilon_n\left(B_p^{|S_k|},\ell_q^{|S_k|}\right)\ll 2^{rk}\varepsilon_n\left(SB^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R})\cap F_k,B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\cap F_k\right),$$

故

$$\varepsilon_n\left(SB^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R})\cap F_k,B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\cap F_k\right)\gg 2^{-rk}\varepsilon_n\left(B_p^{|S_k|},\ell_q^{|S_k|}\right),$$

因此

$$\varepsilon_n\left(B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R}),B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right)\gg\varepsilon_n\left(SB^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R})\cap F_k,B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\cap F_k\right)\gg 2^{-rk}\varepsilon_n\left(B_p^{|S_k|},\ell_q^{|S_k|}\right).$$

定理 2.2 即证明完毕。

## 3. 主要结果的证明

**定理 1.1 的证明：**

**情形一：**$1<p<q<\infty$

首先估计其上界。令 $k'=[\log_2 n]$， $0<\beta<\min\left\{1,\frac{r}{2}-\frac{1}{2}\right\}$，对 $\forall k\in\mathbb{N}$，设

$$n_k=\begin{cases}\left[2^k\cdot 2^{(1-\beta)(k'-k)}\right], & 1\leq k\leq k',\\ \left[2^k\cdot 2^{(1+\beta)(k'-k)}\right], & k>k'.\end{cases}$$

则

$$\sum_{k=1}^{k'}n_k\ll\sum_{k=1}^{k'}2^k\cdot 2^{(1-\beta)(k'-k)}=2^{(1-\beta)k'}\sum_{k=1}^{k'}2^{\beta k}\ll 2^{k'}\ll n,$$

$$\sum_{k=k'+1}^{\infty}n_k\ll\sum_{k=k'+1}^{\infty}2^k\cdot 2^{(1+\beta)(k'-k)}=2^{(1+\beta)k'}\sum_{k=k'+1}^{\infty}2^{-\beta k}\ll 2^{k'}\ll n.$$

知

$$\sum_{k=1}^{\infty}n_k\ll n,$$

即 $\{n_k\}$ 满足定理 2.1 的条件，由引理 2.1、定理 2.1 有

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n\left(B_{\sigma,p}^{\omega}(\mathbb{R}),B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right) &\ll \sum_{k=1}^{\infty}2^{-rk}\varepsilon_{n_k}\left(B_p^{|S_k|},\ell_q^{|S_k|}\right)\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-rk}\cdot 2^{-\frac{n_k}{|S_k|}}|S_k|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\\
&\ll \sum_{k=1}^{\infty}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}\cdot 2^{-\frac{n_k}{|S_k|}}\\
&=\sum_{k\ge 1}^{k'-\frac{1}{1-\beta}}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}\cdot 2^{-\frac{n_k}{|S_k|}}+\sum_{k\ge k'-\frac{1}{1-\beta}}^{k'}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}\cdot 2^{-\frac{n_k}{|S_k|}}\\
&+\sum_{k\ge k'}^{2k'}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}\cdot 2^{-\frac{n_k}{|S_k|}}+\sum_{k\ge 2k'}^{\frac{1+\beta}{\beta}k'}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}\cdot 2^{-\frac{n_k}{|S_k|}}+\sum_{k\ge\frac{1+\beta}{\beta}k'}^{\infty}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}\cdot 2^{-\frac{n_k}{|S_k|}}\\
&=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1&=\sum_{k\ge 1}^{k'-\frac{1}{1-\beta}}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}\cdot 2^{-\frac{n_k}{|S_k|}}\\
&\ll\sum_{k\ge 1}^{k'-\frac{1}{1-\beta}}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}\cdot 2^{-\frac{2^k\cdot 2^{(1-\beta)(k'-k)}}{2\cdot 2^k}}\\
&=\sum_{k\ge 1}^{k'-\frac{1}{1-\beta}}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}\cdot 2^{-2^{(1-\beta)(k'-k)-1}}\\
&=2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'}\cdot\sum_{k\ge 1}^{k'-\frac{1}{1-\beta}}2^{\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)(k'-k)-2^{(1-\beta)(k'-k)-1}}\\
&\ll 2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'}\\
&\ll n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2&=\sum_{k\ge k'-\frac{1}{1-\beta}}^{k'}2^{-rk}\left(\frac{\log\left(1+\frac{2^k}{2^k\cdot 2^{(1-\beta)(k'-k)}}\right)}{2^k\cdot 2^{(1-\beta)(k'-k)}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\\
&\ll\sum_{k\ge k'-\frac{1}{1-\beta}}^{k'}2^{-rk}\left(2^{-k}2^{2(1-\beta)(k'-k)}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\\
&=\sum_{k\ge k'-\frac{1}{1-\beta}}^{k'}2^{-k\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}2^{2(1-\beta)(k-k')^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\\
&\ll 2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'}\ll n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.
\end{aligned}$$

$$I_3=\sum_{k\ge k'}^{2k'}2^{-rk}\left(\frac{\log\left(1+\dfrac{2^k}{2^k\cdot 2^{(1-\beta)(k'-k)}}\right)}{2^k\cdot 2^{(1-\beta)(k'-k)}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

$$\ll\sum_{k\ge k'}^{2k'}2^{-rk}\left(2^{-k}2^{2(1-\beta)(k'-k)}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

$$=\sum_{k\ge k'}^{2k'}2^{-k\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}2^{2(1-\beta)(k-k')\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$$

$$\ll n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.$$

$$I_4=\sum_{k\ge 2k'}^{\frac{1+\beta}{\beta}k'}2^{-rk}\ll 2^{-r(2k')}=2^{-rk'-rk'}\ll 2^{-rk'-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k'}\ll n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.$$

$$I_5=\sum_{k>\frac{1+\beta}{\beta}k'}^{\infty}2^{-rk}\ll 2^{-\frac{1+\beta}{\beta}rk'}=2^{-rk'-\frac{1}{\beta}rk'}\ll 2^{-rk'-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k'}\ll n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.$$

故

$$\varepsilon_n\left(B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R}),B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right)\ll I_1+I_2+I_3+I_4+I_5\ll n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.$$

再估计其下界。取 $k$ 满足定理 2.2 中的条件，则由定理 2.2、引理 1.4、引理 2.2 有

$$\begin{aligned}\varepsilon_n\left(B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R}),B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right)&\gg 2^{-rk}\varepsilon_n\left(B_p^{|S_k|},\ell_q^{|S_k|}\right)\\&\gg 2^{-rk}\rho_n\left(B_p^{|S_k|},\ell_q^{|S_k|}\right)\\&\gg 2^{-rk}n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\asymp n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.\end{aligned}$$

所以当 $1<p<q<\infty$ 时，有

$$\varepsilon_n\left(B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R}),B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right)\asymp n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.$$

**情形二：**$1<q\le p<\infty$

首先估计其上界，令 $k'=\left[\log_2 n\right]$，$0<\beta<1$，对 $\forall k\in\mathbb{N}$，设

$$n_k=\begin{cases}\left[2^k\cdot 2^{(1-\beta)(k'-k)}\right], & 1\le k\le k',\\ \left[2^k\cdot 2^{(1+\beta)(k'-k)}\right], & k>k'.\end{cases}$$

显然

$$\sum_{k=1}^{\infty}n_k\ll n,$$

即 $\{n_k\}$ 满足定理 2.1 的条件，由引理 2.1、定理 2.1 有

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n\left(B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R}),B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right) &\ll \sum_{k=1}^{\infty}2^{-rk}\varepsilon_{n_k}\left(B_p^{|S_k|},\ell_q^{|S_k|}\right)\\
&\ll \sum_{k=1}^{\infty}2^{-rk}2^{-\frac{n_k}{|S_k|}}\left|S_k\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\\
&\ll \sum_{k=1}^{\infty}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}2^{-\frac{n_k}{|S_k|}}\\
&= \sum_{k=1}^{k'}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}2^{-\frac{n_k}{|S_k|}}+\sum_{k=k'+1}^{\infty}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}2^{-\frac{n_k}{|S_k|}}\\
&= I_1+I_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{k=1}^{k'}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}2^{-\frac{n_k}{|S_k|}} \ll \sum_{k=1}^{k'}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}2^{-\frac{2^k\bullet 2^{(1-\beta)(k'-k)}}{2^k}}\\
&= \sum_{k=1}^{k'}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}2^{-2^{(1-\beta)(k'-k)}}\\
&= 2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'}\sum_{k=1}^{k'}2^{\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'-2^{(1-\beta)(k'-k)}}\\
&\ll 2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'}n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{k=k'+1}^{\infty}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}2^{-\frac{n_k}{|S_k|}} \ll \sum_{k=k'+1}^{\infty}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}2^{-\frac{2^k\bullet 2^{(1+\beta)(k'-k)}}{2^k}}\\
&= \sum_{k=k'+1}^{\infty}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}2^{-2^{(1+\beta)(k'-k)}}\\
&= 2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'}\sum_{k=k'+1}^{\infty}2^{\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'-2^{(1+\beta)(k'-k)}}\\
&\ll 2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'}n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.
\end{aligned}$$

故

$$\varepsilon_n\left(B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R}),B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right)\ll I_1+I_2\le n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.$$

再估计定理其下界。取 $k$ 满足定理 2.2 中的条件，则由定理 2.2、引理 1.4 及引理 2.2 有

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n\left(B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R}),B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right) &\gg 2^{-rk}\varepsilon_n\left(B_p^{|S_k|},\ell_q^{|S_k|}\right)\\
&\gg 2^{-rk}\rho_n\left(B_p^{|S_k|},\ell_q^{|S_k|}\right)\\
&\gg 2^{-rk}\left((c-1)n\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\\
&\gg 2^{-rk}n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\\
&\gg n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.
\end{aligned}$$

所以当 $1<q\le p<\infty$ 时，有

$$\varepsilon_n\left(B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R}),B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right)\asymp n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.$$

综上所述当$1<p,q<\infty$时

$$\varepsilon_n\left(B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R}),B_{\sigma,q}(\mathbb{R})\right)\asymp n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)},$$

成立，即定理 1.1 得证。

## 4. 总结与展望

本论文主要讨论了加权带有限函数空间$B^{\omega}_{\sigma,p}(\mathbb{R})$在一致框架下的熵数问题，并估计了其渐近阶，该结果为相应问题的计算复杂性、最优算法提供了理论基础。特别地，利用离散化思想，将无穷维空间下的问题先转化为有限维空间问题，从而通过有限维的结论间接的解决无穷维问题。基于此，接下来的工作，一方面，基于本文的研究结果，之后还可以对加权带有限函数空间在概率框架和平均框架下的熵数和宽度进行深入的研究。另一方面，一致框架下的熵数反映了系统中信息流的不确定性特征，熵数与系统中信息基半径密切相关，从而使得熵数广泛地应用到信息论与学习理论等方面。我们试图将本论文所得到熵数的精确阶与学习理论中的熵问题相结合，探求他们更为广泛的应用。

## 参考文献


[1] Nikol’skii, S.M. (2012) Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems. Springer Science & Business Media, 205.

[2] Gensun, F. (1996) Whittaker-Kotelnikov-Shannon Sampling Theorem and Aliasing Error. *Journal of Approximation Theory*, **85**, 115-131. https://doi.org/10.1006/jath.1996.0033

[3] Li, Y., Chen, G., Xu, Y. and Pan, X. (2024) The Approximation Characteristics of Weighted Band-Limited Function Space. *Mathematics*, **12**, Article 1348. https://doi.org/10.3390/math12091348

[4] Diestel, J., Jarchow, H. and Pietsch, A. (2001) Operator Ideals. *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, **1**, 437-496. https://doi.org/10.1016/s1874-5849(01)80013-9

[5] Carl, B. and Stephani, I. (1990) Entropy, Compactness and the Approximation of Operators. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9780511897467

[6] Lorentz, G. von Golitschek, M. and Makovoz, Y. (1996) Constructive Approximation: Advanced Problems, Volume 304, Citeseer.

[7] Vapnik, V.N. and Chervonenkis, A.Y. (1971) On the Uniform Convergence of Relative Frequencies of Events to Their Probabilities. *Theory of Probability & Its Applications*, **16**, 264-280. https://doi.org/10.1137/1116025

[8] Schütt, C. (1984) Entropy Numbers of Diagonal Operators between Symmetric Banach Spaces. *Journal of Approximation Theory*, **40**, 121-128. https://doi.org/10.1016/0021-9045(84)90021-2

[9] Kuhn, T. (2005) Entropy Numbers of General Diagonal Operators. *Revista Matemática Complutense*, **18**, 479-491. https://doi.org/10.5209/rev_rema.2005.v18.n2.16697

[10] 韩永杰. 概率框架和平均框架下的熵数[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2011.

[11] 王桐心. 不同框架下对角算子的熵数[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2018.

[12] Chen, J., Lu, W., Xiao, H., Wang, Y. and Tan, X. (2019) Entropy Number of Diagonal Operator. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **7**, 738-745. https://doi.org/10.4236/jamp.2019.73051

[13] Zayed, A.I. (1994) A Sampling Theorem for Signals Bandlimited to a General Domain in Several Dimensions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **187**, 196-211. https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1352

[14] Seip, K. (1987) An Irregular Sampling Theorem for Functions Bandlimited in a Generalized Sense. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **47**, 1112-1116. https://doi.org/10.1137/0147073

[15] Edmunds, D.E. and Triebel, H. (1996) Function Spaces, Entropy Numbers, Differential Operators. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9780511662201

[16] Maiorov, V. and Ratsaby, J. (1998) The Degree of Approximation of Sets in Euclidean Space Using Sets with Bounded Vapnik-Chervonenkis Dimension. *Discrete Applied Mathematics*, **86**, 81-93. https://doi.org/10.1016/s0166-218x(98)00015-8