Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(3), 156-161
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.153087

Hans汉斯

一类几乎单型的拟本原图的刻画

谢柯忻

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2025年2月10日；录用日期：2025年3月3日；发布日期：2025年3月17日

摘　要

设Γ是一个连通图，$G \le Aut\Gamma$，Γ是G-边传递但不是$(G,2)$-弧传递的。在奇数阶2倍素数度图的研究基础上，本文聚焦于拟本原非2-弧传递的情况，通过研究几乎单群G作用在V上的拟本原情形，对奇素数幂阶2倍素数度非2-弧传递图展开刻画。研究发现，此类图的结构较为特殊，要么是完全图K_7或K_{11}，要么同构于一个27阶10度图。这一结论进一步丰富了图论中关于特殊度数和传递性图的分类成果，为后续相关研究提供了重要参考。

关键词

边传递图，几乎单群，拟本原，自同构群

The Characterization of a Class of Quasiprimitive Graphs Admitting an Almost Simple Group

Kexin Xie

College of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Feb. 10th, 2025; accepted: Mar. 3rd, 2025; published: Mar. 17th, 2025

Abstract

Let Γ be a connected graph, $G \le Aut\Gamma$, and Γ be G-edge-transitive but not $(G,2)$-arc-transitive. Based on the research of graphs with odd order and twice prime valency, this paper focuses on the quasiprimitive non-2-arc-transitive case. By investigating the quasiprimitive action of almost simple groups G on V, we provide a characterization of odd prime power order graphs with twice prime valency that are non-2-arc-transitive. The research shows that the structures of such graphs

文章引用: 谢柯忻. 一类几乎单型的拟本原图的刻画[J]. 理论数学, 2025, 15(3): 156-161.
DOI: 10.12677/pm.2025.153087

are rather special. They are either complete graphs K_7 or K_{11}, or isomorphic to a graph of order 27 and valency 10. This conclusion further enriches the classification results of graphs with special valency and transitivity in graph theory, and provides an important reference for subsequent related research.

Keywords

Edge-Transitive Graph, Almost Simple Group, Quasiprimitive, Automorphism Group

1. 引言

在图论与群论的交叉研究领域，图的对称性与群作用的性质紧密相连，这一研究方向长期以来备受学者关注。令Γ是一个图，若图Γ既没有重边也没有自环，则称该图为简单图；如果Γ任意两个顶点之间都存在路径(路径是指一系列顶点$v_1,v_2,\cdots,v_k$，使得对于每个$i\,(1\le i<k)$，v_i和v_{i+1}之间都有一条边相连)，则该图称为连通图。下文中涉及到的图均为简单连通图。我们用V,E,A分别表示Γ的顶点集，边集和弧集。群G是Γ的自同构群的子群，若G在Γ的顶点集V，边集E和弧集A上的作用传递，则分别称图Γ是G-点传递图，G-边传递图或G-弧传递图。图的阶数是指图中顶点的个数，同时称一个图的度数为k，如果它的每个顶点都有k个点与它相连。对于非负整数s，图Γ的s弧是指s+1个有序点列$(v_0,v_1,\cdots,v_s)$满足v_{i-1}与v_i在图Γ上是相邻的$(1\le i\le s)$且$v_{i-1}\ne v_{i+1}\,(1\le i\le s)$。若$\Gamma$的自同构群$Aut\Gamma$在$\Gamma$的$s$-弧集上都是传递的，则$\Gamma$是$s$-弧传递的，如果$\Gamma$是$s$-弧传递而不是$(s+1)$-弧传递，则$\Gamma$为$s$-传递的。当$s=1$时，1-弧传递也称为弧传递的。

群作用的性质对图的结构有着深刻影响。我们称群G是拟本原的，如果G的所有非平凡正规子群都是传递的；称Γ是G-局部本原的，如果对任意的$\alpha\in V$，点稳定子G_α在α的邻域$\Gamma(\alpha)$上诱导了一个本原置换群$G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$。实际上，早在1993年，Praeger就在文章[1]中引入了拟本原置换群这一概念，并且他将本原群的O'Nan-Scott定理推广到了拟本原的情形，还给出了分类2-弧传递图的系统步骤。1997年他在文章[2]中，以此分类方法为基础，进一步把拟本原群细致地分为了8种类型，分别为：HA、HS、HC、AS、SD、CD、TW、PA，其中HA是仿射型，AS是几乎单型，TW是挠圈积型。这一系列成果为后续学者研究群与图的关系搭建了坚实的理论框架。

群与图的结合研究起源较早，在1939年Frucht证明了对于任意给定的有限群，都存在一个以这个群为自同构群的图[3]，这一开创性成果激发了众多学者将群论工具引入图论研究的热情，开启了群与图结合研究的新篇章。1947年Tutte在[4]中证明了每个有限3度图至多是5-弧传递的，这一结论为特定度数图的对称性研究划定了初步界限。基于Tutte的研究，1981年Weiss在文章[5]中进一步证明了不存在除圈外的8-弧传递图。然而，对于一般的2-弧传递图进行分类较为困难，Praeger在文章[1]中研究得出在Γ是$(G,2)$-弧传递的条件下这样的群G只有4种类型；李才恒教授在文章[6]中，针对Γ是奇数阶的$(G,2)$-弧传递图进行了研究，证明了此时G只能是几乎单群；方新贵教授和Praeger在[7] [8]研究了容许一个Ree群和Suzuki群作用上的2-弧传递图；在文章[9]中，潘江敏教授等人分类了容许交换群作用上的2-弧传递Cayley图；李才恒教授，李靖建教授和路在平教授在[10]中完成了以例外Lie型单群为基柱的几乎

单群在奇数个顶点上的 2-弧传递图的分类工作；他们还在[11]中对以交错群为基柱的几乎单群在奇数个顶点上的 2-弧传递图进行了分类。这些前期研究成果不断拓展和深化了群与图关系的研究。

对图的分类工作，我们通常是对它的阶数和度数加以限制，从而实现分类与刻画。如，郭松涛等在文章[12]中，对 7 度 (G,s) -传递图进行研究，确定了其点稳定子群的结构特征，周进鑫等在文章[13]中，确定了 5 度对称图点稳定子群的结构，同时在文章[14]中，给出了 4p 阶 4 度 s-传递图的完整分类。

在 2 倍素数度弧传递图的研究方面，学者们也做出了许多重要结果。例如，Praeger 和徐明曜教授在文章[15]中对 2 倍素数度弧传递图做了一个完整分类。奇数阶 2 倍素数度拟本原的边传递图在 2-弧传递的条件下已经被完整分为 3 类，即：(1) 完全图 K_{2r+1}；(2) 四度的 Odd 图 O_4；(3) 由 $PSL(2,q)$ 构造的 4 度和 6 度的陪集图。然而，在拟本原非 2-弧传递这一情形下，相关研究仍存在可深入挖掘的空间。从文章[16]中可知，此时 $G_{\alpha}^{\Gamma(\alpha)}$ 的基柱同构于交错群 A_4 且满足 $r=5$。在廖泓茨老师与李靖建教授和路在平教授的文章[17]中，证明了此时 G 要么是几乎单的，要么是仿射的。

在上述研究背景中，学者们限制图的顶点个数和阶数展开了一系列的研究，已经对奇数阶 2 倍素数度的弧传递图和 2-弧传递图进行了完全的分类，而此类图非 2-弧传递的情形还未分类完全。本文同样对图的顶点个数和阶数作出限制，针对奇素数幂阶 2 倍素数度图在拟本原但非 2-弧传递的情形下进行刻画与分类。我们利用拟本原群的分类，结合点稳定子群的结构特征，重点探讨 G 在几乎单情形下其基柱 $soc(G)$ 的具体结构，从而对此类图进行构造和刻画。这不仅有助于完善图论中关于特殊度数和传递性图的分类体系，还可能为解决其他相关的图论和群论问题提供新的思路和方法。本文的主要结论如下：

定理 1.1 设 $\Gamma=(V,E)$ 是 p^k 阶 2 倍素数度的简单连通图，其中 p 为奇素数，令 $G\le Aut\Gamma$ 且 Γ 是 G-边传递但不是 $(G,2)$-弧传递的。若 G 为几乎单群且作用在 V 上是拟本原的，则 Γ 要么是完全图 K_7 或 K_{11}，要么同构于一个 27 阶 10 度图。

2. 预备知识

在图论与群论结合的研究中，诸多基础结论为复杂问题的攻克提供了关键支撑。本节将阐述一些重要的定义和引理，它们是后续证明本文主要结论的基石。

群作用是研究图传递性的重要工具。通过群的作用，可以判断图是否具有某种传递性(如点传递、边传递、弧传递等)，并进一步研究图的对称性。群的性质(如拟本原、几乎单、本原等)对图的传递性有显著影响，不同的群作用可能导致不同的传递性结果。因此，群作用不仅揭示了图的对称性，还为图的分类和结构研究提供了重要的理论基础。下面我们就给出群作用及其传递性的定义。

定义 2.1 (1) 设 G 是一个群，X 是一个集合。群 G 在 X 上的作用是一个映射 $\phi:G\times X\to X$，满足以下条件：

i) 对于任意 $x\in X$，有 $\phi(e,x)=x$，其中 e 是群 G 的单位元；

ii) 对于任意 $g,h\in G$ 和 $x\in X$，有 $\phi(g\cdot h,x)=\phi(g,\phi(h,x))$。

(2) 群作用的传递性：称群 G 作用在集合 X 上是传递的，如果对于任意两个点 $u,v\in V$，存在 $g\in G$，使得 $\phi(g,u)=v$。

在代数图论中，我们进一步引入图的自同构群的概念，给出图的自同构群的定义。

定义 2.2 图的自同构群：图 Γ 的所有自同构映射构成一个群，该群称为图 Γ 的自同构群，记作 $Aut(\Gamma)$。

由定义 2.1 的传递性可知，若 G 在 Γ 的顶点集 V，边集 E 和弧集 A 上的作用传递，则分别称图 Γ 是 G-点传递图，G-边传递图或 G-弧传递图。

鉴于群作用与图传递性之间存在如此紧密且复杂的关联，结合有限单群分类这一强大的数学工具，能够为我们揭示更多关于图结构和性质的奥秘。根据有限单群的分类结果，我们有下面的重要结

论。

引理 2.3 [18] 设 G 是非交换单群，$H \le G$ 且满足 $|G:H| = p^k$，其中 p 为素数，则下列情形之一成立：

(1) $G = A_n$ 且 $H \cong A_{n-1}$， $n = p^k$；

(2) $G = PSL_d(q)$，$|G:H| = (q^d - 1)/(q-1) = p^k$，$d$ 为素数；

(3) $G = PSL_2(11)$ 且 $H \cong A_5$；

(4) $G = M_{23}$ 且 $H \cong M_{22}$ 或当 $G = M_{11}$ 且 $H \cong M_{10}$；

(5) $G = PSU_4(2)$ 且 $H \cong Z_2^4 : A_5$， $p^n = 27$。

下面的引理说明了传递的极小正规子群存在的唯一性，它在传递置换群的研究中具有关键作用。

引理 2.4 [17] 令 G 是点集 V 上的传递置换群。若 $|V|$ 是奇数且 N 是 G 的传递极小正规子群，则这样的极小正规子群是唯一存在的。

由引理 2.4，我们可以得到若 G 作用在 V 上是拟本原的，则 G 的每一个正规子群 N 作用在 V 上都是传递的，结合 $|V|$ 是奇数，可知 G 的极小正规子群有且仅有一个，而 G 的基柱 $soc(G)$ 由它的所有极小正规子群生成，于是 $soc(G) = N$。

我们知道本原置换群一定是拟本原的，反之则不成立。但是下面的引理表明，对于特殊的素数幂阶拟本原置换群，结论是成立的。

引理 2.5 [19] 设 G 是集合 V 上的拟本原置换群，其中 $|V| = p^n$，p 为素数。则 G 一定是本原群。

设置换群 G 在 V 上传递。对 $\alpha \in V$，如果点稳定子群 G_α 在 V 上恰有 r 条轨道，则称 G 是秩 r 的。显然，秩 2 的置换群是本原的。进一步，我们有下面的结论：

引理 2.6 [20] 设 $|V| = n$，G 是 V 上秩为 3 的传递置换群，对 $\alpha \in V$，G_α 的轨道长度为 $|\Delta_0| = 1$，$|\Delta_1| = k$，$|\Delta_2| = l$。如果 $1 + k \nmid n$， $1 + l \nmid n$，则 G 在 V 上本原。

这一引理为判断特定秩的置换群是否为本原提供了有效的方法，在后续证明中通过分析轨道长度之间的整除关系，能够便捷地判断群的本原性。

3. 定理 1.1 的证明

设 $\Gamma = (V, E)$ 是 p^k 阶 $2r$ 度连通图，其中 p, r 均为素数。令 $G \le Aut\Gamma$ 且 Γ 是 G-边传递图，但不是 $(G,2)$-弧传递的。

证明：因为 G 作用在 V 上是拟本原的，根据拟本原群的定义，G 的所有非平凡正规子群在顶点集 V 上都传递。令 N 为 G 的传递极小正规子群，则由引理 2.4 可知，当 $|V|$ 是奇数且 G 在 V 上的作用传递时，这样的极小正规子群是唯一存在的，所以 N 唯一，故 $soc(G) = N$。又因为 G 为几乎单群，根据几乎单群的结构，其基柱 $soc(G)$ 是非交换单群，所以 N 为非交换单群。注意到 N 在 V 上传递，根据群作用的性质，$|N:N_\alpha| = |V| = p^k$，其中 $\alpha \in V$。于是我们可知点稳定子 N_α 在群 N 中的指数是 p^k，结合 N 为单群，利用文献[18]中此类群的分类结果可知，要么 $N \cong PSU_4(2)$ 且 N_α 在 V 上恰有 3 个轨道，长度分别为 1，10 和 16；要么 N 作用在 V 上是 2-传递的。

对于第一种情况，即 $N \cong PSU_4(2)$，$|PSU_4(2)| = \dfrac{|SU_4(2)|}{(n, q+1)} = 25920 = |N|$，此时 $N_\alpha \cong Z_2^4 : A_5$，$|N_\alpha| = |Z_2^4| \cdot |A_5| = 2^4 \times 60 = 960$，于是 $|V| = |N:N_\alpha| = 27$。根据 N_α 在 V 上的轨道个数为 3，长度分别为 1，10 和 16，结合引理 2.6 可知，N 在 V 上本原，并且此时 Γ 的度数要么是 10 度，要么是 16 度。结合条件，Γ 是 2 倍素数度的，所以此时的 Γ 是 27 阶 10 度图，简单计算可知此时图 Γ 有 135 条边。进一步我们可知此图是一类经典图——Schläfli 图的补图，其中 Schläfli 图如下图 1 所示。它有 27 个顶点，216 条边，它的度数是 16。

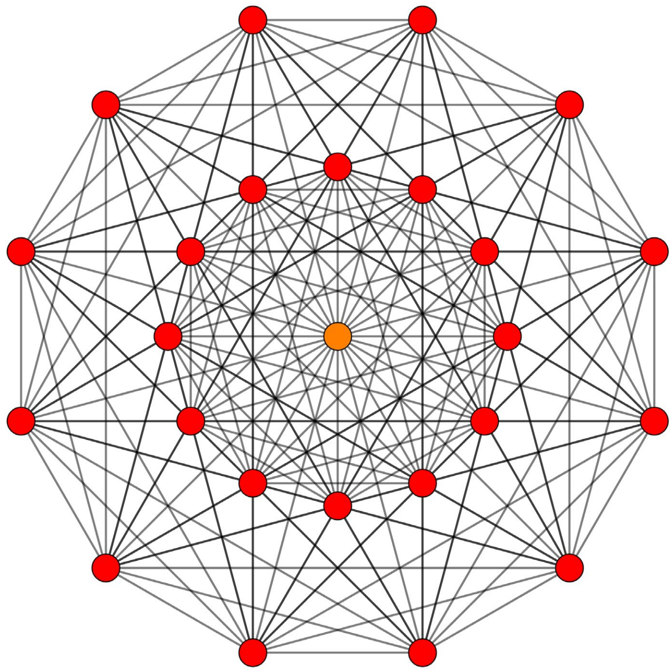

Figure 1. Schläfli graph
图 1. Schläfli 图

对于第二种情况，即 N 作用在 V 上是 2-传递的，则此时 $\Gamma = K_{p^k}$，且 Γ 是 N-弧传递图，由于 Γ 不是 $(G,2)$-弧传递图，因此 N 在 V 上不是 3-传递的。通过逐一检验引理 2.3 中的(1)~(4)，我们发现要么 $N \cong PSL_2(11)$ 且 $|V| = 11$；要么 $N \cong PSL_d(q)$ 且 $|V| = (q^d - 1)/(q-1) = p^k$，其中 d 为素数。

若 $N \cong PSL_2(11)$，$|V| = 11$，则此时 $\Gamma = K_{11}$；因此我们不妨设 $N \cong PSL_d(q)$，$p^k = |V| = (q^d - 1)/(q-1)$。此时 $\Gamma = K_{p^k}$，故 Γ 的度数为

$$2r = p^k - 1 = (q^d - 1)/(q-1) - 1 = (q^d - q)/(q-1) = q \cdot (q^{d-1} - 1)/(q-1)$$

注意到 r 和 d 均为素数，于是有 $(d,q) = (2,4)$ 或 $(d,q) = (3,2)$，相应地有 $r = 2$ 或 3。若 $(d,q) = (2,4)$，此时我们有 $N \cong PSL_2(4)$，$|V| = 5$。然而经计算可知，此时 N 在 V 上是 3-传递的，与条件矛盾。因此 $(d,q) = (3,2)$，相应地 $r = 3$，$|V| = 7$，则此时 $\Gamma = K_7$。

故综上所述，满足条件的图 Γ 只能是完全图 K_7，K_{11} 或者同构于一个 27 阶 10 度图。

参考文献

[1] Praeger, C.E. (1993) An O'Nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **2**, 227-239. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227

[2] Praeger, C.E. (1997) Finite Quasiprimitive Graphs. In: Bailey, R.A., Ed., *Surveys in Combinatorics*, Cambridge University Press, 65-86. https://doi.org/10.1017/cbo9780511662119.005

[3] Frucht, R. (1939) Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe. *Compositio Mathematica*, **6**, 239-250.

[4] Tutte, W.T. (1947) A Family of Cubical Graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **43**, 459-474. https://doi.org/10.1017/s0305004100023720

[5] Weiss, R. (1981) The Nonexistence of 8-Transitive Graphs. *Combinatorica*, **1**, 309-311. https://doi.org/10.1007/bf02579337

[6] Li, C.H. (2001) On Finite S-Transitive Graphs of Odd Order. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **81**, 307-317. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.2012

[7] Gui Fang, X. and Praeger, C.E. (1999) Finite Two-Are Transitive Graphs Admitting a REE Simple Group. *Communications in Algebra*, **27**, 3755-3769. https://doi.org/10.1080/00927879908826660

[8] Gui Fang, X. and Preager, C.E. (1999) Fintte Two-Arc Transitive Graphs Admitting a Suzuki Simple Group. *Communications in Algebra*, **27**, 3727-3754. https://doi.org/10.1080/00927879908826659

[9] Li, C.H. and Pan, J. (2008) Finite 2-Arc-Transitive Abelian Cayley Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **29**, 148-158. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2006.12.001

[10] Li, C.H., Li, J.J. and Lu, Z.P. (2023) Two-Arc-Transitive Graphs of Odd Order: I. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **57**, 1253-1264. https://doi.org/10.1007/s10801-023-01224-8

[11] Li, C.H., Li, J.J. and Lu, Z.P. (2021) Two-Arc-Transitive Graphs of Odd Order—II. *European Journal of Combinatorics*, **96**, Article ID: 103354. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2021.103354

[12] Guo, S., Li, Y. and Hua, X. (2016) (G, S)-Transitive Graphs of Valency 7. *Algebra Colloquium*, **23**, 493-500. https://doi.org/10.1142/s100538671600047x

[13] Zhou, J. and Feng, Y. (2010) On Symmetric Graphs of Valency Five. *Discrete Mathematics*, **310**, 1725-1732. https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.11.019

[14] Zhou, J. (2009) Tetravalent s-Transitive Graphs of Order 4p. *Discrete Mathematics*, **309**, 6081-6086. https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.05.014

[15] Praeger, C.E. and Xu, M. (1989) A Characterization of a Class of Symmetric Graphs of Twice Prime Valency. *European Journal of Combinatorics*, **10**, 91-102. https://doi.org/10.1016/s0195-6698(89)80037-x

[16] Gorenstein, D. (1982) Finite Simple Groups. Plenum Press.

[17] Liao, H.C., Li, J.J. and Lu, Z.P. (2020) On Quasiprimitive Edge-Transitive Graphs of Odd Order and Twice Prime Valency. *Journal of Group Theory*, **23**, 1017-1037. https://doi.org/10.1515/jgth-2019-0091

[18] Guralnick, R.M. (1983) Subgroups of Prime Power Index in a Simple Group. *Journal of Algebra*, **81**, 304-311. https://doi.org/10.1016/0021-8693(83)90190-4

[19] Li, C.H., Pan, J. and Ma, L. (2009) Locally Primitive Graphs of Prime-Power Order. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **86**, 111-122. https://doi.org/10.1017/s144678870800089x

[20] 王杰. 典型群引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2015.