

奇数阶2倍素数度的局部本原图的刻画

谢柯忻

西华大学理学院, 四川 成都

收稿日期: 2025年2月11日; 录用日期: 2025年3月4日; 发布日期: 2025年3月17日

摘要

局部本原图是图论与群论交叉研究的重要对象, 在图的结构和对称性研究中意义重大。本文在已有研究基础上, 针对奇数阶2倍素数度的局部本原但非拟本原图展开深入研究。研究证明, 此类图是某一商图的正规覆盖。并进一步研究了其自同构群关于极大非传递正规子群的商群, 要么是几乎单的, 要么其基柱同构于 Z_p^k , 其中 p 是素数, $k \leq r$ 。

关键词

局部本原图, 拟本原图, 商图, 正规覆盖

Characterization of Locally Primitive Graphs of Odd Order with Twice Prime Valency

Kexin Xie

College of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Feb. 11th, 2025; accepted: Mar. 4th, 2025; published: Mar. 17th, 2025

Abstract

Locally primitive graphs are important objects in the intersection of graph theory and group theory, and they are of great significance in the study of the structure and symmetry of graphs. Based on previous research, this paper conducts an in-depth study on locally primitive but non-quasiprimitive graphs with odd order and twice prime valency. The research proves that such graphs are normal covers of a certain quotient graphs. Furthermore, it is investigated that the quotient group of the automorphism group of these graphs with respect to a maximal non-transitive normal subgroup is either almost simple or has a socle isomorphic to Z_p^k , where p is a prime number, $k \leq r$.

Keywords

Locally Primitive Graphs, Quasiprimitive Graphs, Quotient Graphs, Normal Covers

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

令 Γ 是一个图, 若图 Γ 既没有重边也没有自环, 则称该图为简单图; 如果 Γ 任意两个顶点之间都存在路径(路径是指一系列顶点 $v_1, v_2, \dots, v_k$, 使得对于每个 $i (1 \leq i < k)$, v_i 和 v_{i+1} 之间都有一条边相连), 则该图称为连通图。下文中涉及到的图均为简单连通图。我们用 V, E, A 分别表示 Γ 的顶点集、边集和弧集。图 Γ 的所有自同构映射构成一个群, 称为图 Γ 的自同构群, 记为 $\text{Aut}\Gamma$ 。设群 $G \leq \text{Aut}\Gamma$, 若 G 在 Γ 的顶点集 V (边集 E 或弧集 A) 上作用传递, 则称图 Γ 是 G -点传递的(相应地, G -边传递的或 G -弧传递的)。对于非负整数 s , 图 Γ 的 s 弧是指 $s+1$ 个有序点列 $(v_0, v_1, \dots, v_s)$ 满足 v_{i-1} 与 v_i 在图 Γ 上是相邻的, 且 $v_{i-1} \neq v_{i+1}$ (其中 $1 \leq i \leq s$)。若 $\text{Aut}\Gamma$ 在 Γ 的 s -弧集上都是传递的, 则 Γ 是 s -弧传递的, 如果 Γ 是 s -弧传递而不是 $(s+1)$ -弧传递, 则 Γ 为 s -传递的。当 $s=1$ 时, 1-弧传递也称为弧传递的。

进一步地, 自同构群的性质不仅影响图的传递性, 还与群的结构密切相关。我们称群 G 是拟本原的, 如果 G 的所有非平凡正规子群都是传递的; 称 Γ 是 G -局部本原的, 如果对任意的 $\alpha \in V$, 点稳定子群 G_α 在 α 的邻域 $\Gamma(\alpha)$ 上诱导了一个本原置换群 $G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$ 。研究局部本原图的重要性在于它深刻揭示了图的自同构群在局部顶点集上的本原性作用, 有助于理解图的结构, 为对称图分类和代数图论提供了关键工具。

实际上, 局部本原图和拟本原群存在着密切的联系。我们知道, 本原置换群一定是拟本原的, 所以在研究图的局部本原性时, 可以借助拟本原图的分类结果来进行讨论。早在 1993 年, Praeger 就在文章 [1] 中引入了拟本原置换群, 他将本原群的 O’Nan-Scott 定理推广到了拟本原的情形, 并给出了分类 2-弧传递图的系统步骤。1997 年他在文献 [2] 中, 以此分类方法为基础, 把拟本原群分为了 8 种类型, 分别为: HA、HS、HC、AS、SD、CD、TW、PA, 其中 HA 是仿射型, AS 是几乎单型, TW 是挠圈积型。这一分类不仅为拟本原群的研究提供了清晰的框架, 也为局部本原图的研究奠定了重要的理论基础。

拟本原群的研究成果为群与图的结合提供了新的视角。事实上, 群与图的研究有着悠久的历史。早在 1939 年, Frucht 证明了对任意给定的有限群, 都存在一个以这个群为自同构群的图 [3], 这一成果促使学者们将群与图紧密结合, 开启了众多深入的研究。局部本原图作为图论与群论交叉研究中的重要研究对象, 有着丰富的研究历史。早期, 数学家们在研究图的对称性时, 逐渐引入了局部本原的概念, 即局部本原图的自同构群在某个顶点的邻域上诱导出本原置换群。这一概念的引入, 为深入研究图的结构和对称性提供了有力工具。

上世纪 60 年代, Tutte 在文章 [4] 研究 3 度对称图时, 就涉及到了局部本原图的相关性质, 其研究成果为后续工作奠定了坚实的基础, 吸引了众多学者们开始关注局部本原图的分类、结构特征以及与群的内在联系等问题。随后, 在上世纪 70~80 年代, 不少学者进一步探索了不同类型的局部本原图的结构, 以及它们与群的关系等 [5] [6]。这些早期的研究成果, 为后来局部本原图的研究积累了宝贵的理论基础, 推动了局部本原图研究在后续的蓬勃发展。

在群论与图论的研究中, 局部本原图一直是一个热门的研究方向, 它的研究起源于对称群在图上的作用。Praeger 在其开创性工作中系统地研究了局部本原图的性质, 证明了局部本原图的分类与本原

作用密切相关,并给出了局部本原图的结构定理[7]。这一结果为后续对称图的研究奠定了基础。李才恒在文章[8]对局部本原图进行了系统的分类,他证明了在某些条件下,局部本原图可以完全由它们的自同构群和局部结构决定。Giudici 和李才恒在文章[9]中,研究了局部本原图的弧传递性质,提出了一种基于自同构群作用的分类方法,并对一些重要的弧传递图进行了分类。在文章[10]中, Praeger 和 Schneider 提出了一种新的分类框架,来研究局部本原图的边传递性质,并给出了具体的分类结果。此外,李才恒,潘江敏和姜本功还在文章[11]中,结合交换群的特殊性质和 Cayley 图的构造特点,给出了有限局部本原交换 Cayley 图的具体形式和相关性质;徐尚进,刘贵贤和李靖建在文章[12]中给出了一些群的局部本原图的结构特征,并完全分类了当阶为 p^2qr 时的局部本原图。

基于上述的研究背景,我们发现对于非拟本原的局部本原边传递图还有可以深入研究的空间。我们通过分析图的局部结构、自同构群的正规结构以及商图的传递性质等,实现由图到商图的归约,利用群扩张理论以及稳定子群的结构特征,再借助商图技巧,对奇数阶 2 倍素数度局部本原图的非拟本原情形进行刻画和完全分类。这一工作有助于进一步完善奇数阶 2 倍素数度局部本原图的分类。本文的主要研究结论如下:

定理 1.1 设 $\Gamma=(V,E)$ 是奇数阶 $2r$ 度的连通图, r 为素数, $G \leq \text{Aut} \Gamma$, G 在边集 E 上传递。若 Γ 是 G -局部本原但非 G -拟本原的,则 Γ 是某一商图的正规覆盖。进一步,若 M 是 G 的极大非传递正规子群,则 G/M 要么是几乎单的,要么 $\text{soc}(G/M) \cong Z_p^k$, p 是奇素数, $k \leq r$ 。

2. 预备知识

本节主要是给出一些重要的定义和图例。

拟本原群和局部本原图在图论中有着十分重要的作用,它们是研究图的对称性和结构的关键工具,为对称图的分类和构造提供了理论基础。下面我们就给出拟本原群和局部本原图的定义。

定义 2.1 我们设 $\Gamma=(V,E)$ 是一个图,令群 G 是 Γ 的自同构群的子群,即 $G \leq \text{Aut} \Gamma$ 。对任意 $\alpha \in V$, 点 α 的点稳定子群 $G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$, 与点 α 邻接的点集称为 α 的邻域,记为 $\Gamma(\alpha)$ 。即 $\Gamma(\alpha) = \{\beta \in V \mid (\alpha, \beta) \in E\}$ 。

(1) 称群 G 是拟本原的,如果 G 的所有非平凡正规子群都是传递的;

(2) 称图 Γ 是 G -局部本原的,如果对任意的 $\alpha \in V$, 点稳定子群 G_α 在 α 的邻域 $\Gamma(\alpha)$ 上诱导了一个本原置换群 $G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$ 。

根据定义 2.1, 局部本原图实际上就是指图的自同构群在每个顶点的邻域上作用是本原的。我们又知道,本原置换群一定是拟本原的,因此局部本原图和拟本原群的联系是密切相关的。根据 Praeger 将本原群的 O’Nan-Scott 定理推广到拟本原情形,并把拟本原群分为了八类[2],我们可以借助他对拟本原群的分类结果,对局部本原图的结构性质进行刻画与分类。

在代数图论中,轨道与群作用密切相关,它描述了群作用在某个集合上时,集合中元素的等价类。以下是轨道的定义:

定义 2.2 设 G 是一个群, X 是一个集合,对任意 $i \in X$, $g \in G$, i 在 g 下的像记为 i^g 。 i 在 G 作用下的轨道就是指所有 i 的像的集合,即: $\text{Orb}_G(i) = \{i^g \mid g \in G\}$ 。

通常,我们称群 G 为集合 X 上的传递群,如果 G 在 X 上只有一个轨道;称群 G 为集合 X 上的非传递群,如果 G 在 X 上的轨道个数大于等于 2。

设 Γ 是 G -弧传递图,并设 N 是 G 的极大非传递正规子群(极大正规子群是指 N 是 G 的真正规子群中最大的,即 $N \trianglelefteq G$, 且不存在 G 的其他正规子群 M 使得 $N \subsetneq M \subseteq G$)。又设 $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 表示 N 在 V 上轨道的集合,即 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 都是 N 在 V 上的轨道。

根据轨道的定义和群传递的性质,我们可以给出商图的定义和相关性质,它是我们后续研究的基础。

定义 2.3 ([13]) 如下规定的图 Γ_N 称为 Γ 关于 N 的商图: 称 $\Gamma_N = (V(\Gamma_N), E(\Gamma_N))$ 为商图, 即 Γ_N 是一个由顶点集 $V(\Gamma_N) = B$ 和边集 $E(\Gamma_N) = \{\{B_i, B_j\} | \exists \mu_i \in B_i, \mu_j \in B_j, \text{st. } \{\mu_i, \mu_j\} \in E\}$ 构成的图。

商图通过压缩图的顶点集, 既简化了图的结构, 又保留了自同构群的对称性。本质上, 商图体现了自同构群对图的作用。自同构群通过对图顶点、边或弧的不同作用, 直接影响图的传递性。通过分析自同构群作用对图传递性的影响, 能够对图进行分类。例如, 点传递图、边传递图和弧传递图等的分类。

根据商图的定义, 我们有下面关于商图性质的引理:

引理 2.4 (1) 商图 Γ_N 也是 G -弧传递的;

(2) 商图 Γ_N 也是连通的;

(3) 对于任意的 N -轨道 $B \in B$, B 中不含图 Γ 的边。

由上面引理易得要么 $\Gamma_N \cong K_2$, 要么图 Γ 和商图 Γ_N 有相同的度数。如果图 Γ 和商图 Γ_N 的度数相同, 我们就称 Γ 是 Γ_N 的正规覆盖。

在代数图论中, 商图作为一种重要的工具, 广泛应用于图的结构分析和对称性研究等。例如: Praeger 在文章[7]中研究了边传递图的商图构造方法, 证明了通过正规子群可以构造边传递图的商图, 并利用这一方法对边传递图进行了分类; Godsil 和 Royle 证明了商图可以反映原图的自同构群结构, 并对对称图进行了分类[14]; Gross 和 Tucker 对商图与覆盖图之间的关系进行了研究, 证明了商图可以用于描述覆盖图的结构和对称性[15]。以上研究结果展示了商图在代数图论中的广泛应用, 这些结果为边传递图的研究提供了重要的理论基础和方法支持。

基于引理 2.4 对商图性质的描述, 我们有下面的引理, 这在我们后续的讨论中非常重要。

引理 2.5 ([1]) 设 Γ 是 G -局部本原的 G -弧传递图。若存在 $M \trianglelefteq G$ 在 V 上至少有 3 个轨道, 则 Γ_M 是 G/M -拟本原的 G/M -局部本原图的一个正规覆盖。

从引理 2.5 不难看出, 决定拟本原的局部本原图是最基本的步骤, 相关研究也主要集中在以几乎单的拟本原群为自同构群的 2-弧传递图的分类上, 相关文献可参考[16][17]。

最后我们以下的引理结束本节。

引理 2.6 ([18][19]) 设 $\Gamma = (V, E)$ 是奇数阶 $2r$ 度的连通图, r 为素数。令 $G \leq \text{Aut} \Gamma$, 若 Γ 是 G -拟本原的且 G 在 E 上传递, 那么下列情形之一成立:

(1) Γ 是 $(G, 2)$ -弧传递的;

(2) G 是几乎单群;

(3) G 是仿射型本原群, $\text{soc}(G) \cong Z_p^k$, 其中 p 是素数且 $1 \leq k \leq r$ 。

3. 定理 1.1 的证明

设 $\Gamma = (V, E)$ 是奇数阶 $2r$ 度的连通图, 其中 r 是素数, $G \leq \text{Aut} \Gamma$, G 在边集 E 上传递, 且 Γ 是 G -局部本原但非 G -拟本原的。我们首先证明:

引理 3.1 Γ 是 G -弧传递图。

证明: 我们首先证明 Γ 是 G -点传递的。否则 Γ 是二部图, 不妨令 $V = U \cup W$, 其中 U, W 是不相交的两部分。设 $|U| = x$, $|W| = y$ 。因为 Γ 的度数为 $2r$, 所以 $x \cdot 2r = y \cdot 2r$, 得出 $x = y$, 导致 $|V| = 2x$ 为偶数, 与条件 Γ 是奇数阶矛盾。因此 Γ 是 G -点传递的。又因 Γ 是 G -局部本原的, 即 G_α 在 α 的邻域 $\Gamma(\alpha)$ 上的作用是本原的, 因此 Γ 是 G -弧传递的。

由于 G 在 V 上作用不是拟本原的, 因此 G 在 V 上存在不传递的正规子群, 不妨设 M 是 G 的极大的非传递的正规子群。因为 $|V|$ 是奇数, 所以 M 在 V 上至少有 3 个轨道, 记这些轨道分别为 $B_1, B_2, \dots, B_n$, ($n \geq 3$), 它们所组成的集合为 $\text{orb}(M) = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 。根据商图的定义, 我们可以构造一个顶点集为

$V(\Gamma_M) = \text{orb}(M)$, 边集为 $E(\Gamma_M) = \left\{ \{B_i, B_j\} \mid \exists \mu_i \in B_i, \mu_j \in B_j, \text{st. } \{\mu_i, \mu_j\} \in E \right\}$ 的商图 Γ_M , 它是 Γ 关于 G 和 M 的正规商图。再由引理 2.4 中商图的性质可知, Γ_M 也是 G -弧传递图。

引理 3.2 M 作用在 V 上是半正则的, 即对任意的 $\alpha \in V$, $M_\alpha = 1$ 。

证明: 对于 α 的邻域 $\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\alpha)^{M_\alpha} = \Gamma(\alpha)$, 即 M_α 固定 $\Gamma(\alpha)$, 因此 M_α 也固定所有的 M -轨道。

不妨设 B 和 C 是 Γ_M 中相邻的轨道, 且 $\alpha \in B$ 。由于 M_α 固定 $\Gamma(\alpha)$ 和 C , 所以 M_α 固定 $M_\alpha \cap C$ 。结合 G 在 V 上的局部本原性以及 $|\text{orb}(M)| \geq 3$, 我们有 $|\Gamma(\alpha) \cap C| = 1$, 再由 C 的任意性可知 M_α 固定 $\Gamma(\alpha)$ 中的每一个顶点, 最后由 Γ 的连通性可知, $M_\alpha = 1$, 即 M 作用在 V 上是半正则的。

接下来, 我们设 X 为 G 在 Γ_M 上诱导的群, 则 $X \cong G/M$ 。利用 M 的极大性可知, X 在 $\text{orb}(M)$ 上作用是忠实的。由定理 2.5 可立即得出, Γ_M 是 X -拟本原的 X -局部本原弧传递图, 其阶显然也是奇数, 其度数也为 $2r$ 。因为此时图 Γ 和商图 Γ_M 的度数相同, 均为 $2r$, 所以 Γ 是 Γ_M 的正规覆盖, 并且由定理 2.6 可知, 要么 X 是几乎单群, 要么 $\text{soc}(X) \cong Z_p^k$, 其中 p 为素数, $k \leq r$ 。由此定理 1.1 得证。

参考文献

- [1] Praeger, C.E. (1993) An O’Nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **2**, 227-239. <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227>
- [2] Praeger, C.E. (1997) Finite Quasiprimitive Graphs. In: Bailey, R.A., Ed., *Surveys in Combinatorics, 1997*, Cambridge University Press, 65-86. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511662119.005>
- [3] Frucht, R. (1939) Herstellung von Graphen mit Vorgegebener abstrakter Gruppe. *Compositio Mathematica*, **6**, 239-250.
- [4] Tutte, W.T. (1947) A Family of Cubical Graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **43**, 459-474. <https://doi.org/10.1017/s0305004100023720>
- [5] Gardiner, A.D. (1974) Vertex—Transitive Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **16**, 237-248.
- [6] Weiss, R. (1981) The Nonexistence of 8-Transitive Graphs. *Combinatorica*, **1**, 309-311. <https://doi.org/10.1007/bf02579337>
- [7] Praeger, C.E. (1999) Finite Normal Edge-Transitive Cayley Graphs. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **60**, 207-220. <https://doi.org/10.1017/s0004972700036340>
- [8] Li, C.H. (1996) On Finite Groups with Given Maximal Subgroups. *Journal of Algebra*, **184**, 199-218.
- [9] Giudici, M. and Li, C.H. (2009) On Finite Locally Primitive Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **99**, 863-880.
- [10] Praeger, C.E., and Schneider, C. (2012) Locally Primitive Graphs and Distance-Transitive Graphs. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **35**, 429-453.
- [11] Li, C., Lou, B. and Pan, J. (2011) Finite Locally Primitive Abelian Cayley Graphs. *Science China Mathematics*, **54**, 845-854. <https://doi.org/10.1007/s11425-010-4134-0>
- [12] 徐尚进, 刘贵贤, 李靖建. 阶为 $p2qr$ 群的局部本原图[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2012, 37(2): 412-415.
- [13] 徐明曜. 有限群导引(上册)[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [14] Godsil, C.D. and Royle, G.F. (2001) *Algebraic Graph Theory*. Springer-Verlag.
- [15] Gross, J.L. and Tucker, T.W. (1987) *Topological Graph Theory*. Wiley.
- [16] Gui Fang, X. and Praeger, C.E. (1999) Finite Two-Arc Transitive Graphs Admitting a Ree Simple Group. *Communications in Algebra*, **27**, 3755-3769. <https://doi.org/10.1080/00927879908826660>
- [17] Gui Fang, X. and Preager, C.E. (1999) Finite Two-Arc Transitive Graphs Admitting a Suzuki Simple Group. *Communications in Algebra*, **27**, 3727-3754. <https://doi.org/10.1080/00927879908826659>
- [18] Li, C.H. (2001) On Finite S-Transitive Graphs of Odd Order. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **81**, 307-317. <https://doi.org/10.1006/jctb.2000.2012>
- [19] Liao, H.C., Li, J.J. and Lu, Z.P. (2020) On Quasiprimitive Edge-Transitive Graphs of Odd Order and Twice Prime Valency. *Journal of Group Theory*, **23**, 1017-1037. <https://doi.org/10.1515/jgth-2019-0091>