

一类奇数阶4度非2-弧传递图的构造

周蔓芝

西华大学理学院, 四川 成都

收稿日期: 2025年2月10日; 录用日期: 2025年3月3日; 发布日期: 2025年3月17日

摘要

本文是在图的阶为奇数, 度数为4的条件下, 通过分析图 Γ 的自同构群的子群及其点稳定子群的结构, 特别是弧传递图的相关理论和基本性质, 利用特定顶点和度数的群的作用和图的对称性等相关理论, 进一步探讨了这类图的存在性和结构特征, 给出了一类奇数阶4度非2-弧传递图的构造。

关键词

本原置换群, 几乎单群, 弧传递图

A Construction of an Odd Order 4-Valent Non-2-Arc-Transitive Graph

Manzhi Zhou

College of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Feb. 10th, 2025; accepted: Mar. 3rd, 2025; published: Mar. 17th, 2025

Abstract

In this paper, under the condition of odd order and degree 4. By analyzing the structure of subgroups of the automorphism group of the graph and its point-stabilizer subgroups, especially relying on the relevant theories and basic properties of arc-transitive graphs, and making use of the group actions on specific vertices and degrees, as well as the theories related to the symmetry of the graph, the existence and structural characteristics of such graphs are further explored. A construction method for a class of odd-order 4-degree non-2-arc-transitive graphs is presented.

Keywords

Primitive Permutation Group, Almost Simple Group, Arc-Transitive Graph



1. 引言

本文所讨论的图均为有限简单图。

令 G 是在顶点集 V 上的一个置换群, 对于 $\forall \alpha \in V$, 使得 $G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$, 则称 G_α 为点稳定子群。点稳定子群有助于研究图的局部性质和自同构群的结构, 通过点稳定子群可分析图在某个点附近的对称性和不变性质。并且, 它可以应用在网络分析中, 研究特定节点周围的网络结构稳定性; 在化学中研究分子结构时, 点稳定子群能帮助分析特定原子周围化学键和基团的对称性。

令图 $\Gamma = (V, E)$, 其中 V 为其顶点集, E 为其边集。对于每一条边 $\{\alpha, \beta\} \in E$, 其中包含了两条有序对 (α, β) 与 (β, α) , 称为图 Γ 的弧。称 (α, β, γ) 为图 Γ 的 2-弧, 若 $\alpha \neq \gamma$ 且 (α, β) 与 (β, γ) 均为 Γ 的弧。同时, 我们用 $\Gamma(\alpha)$ 表示在 Γ 中与顶点 α 相邻的点的集合, 即顶点 α 的邻域, 图的度数为 $|\Gamma(\alpha)|$ 。本文中所研究的 4 度图是指每个顶点的度数都为 4。

设图 $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ 和图 $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$, 如果存在一个双射 $g: V_1 \rightarrow V_2$, 使得对于任意的 $\alpha, \beta \in V_1$, $\{\alpha, \beta\} \in E_1$ 有 $\{\alpha^g, \beta^g\} \in E_2$, 则称图 Γ_1 和图 Γ_2 同构; 称顶点集 V 上的一个置换 m 为图 Γ 的自同构, 当且仅当对于所有的 $\{\alpha, \beta\} \in E$, 存在 $\{\alpha^m, \beta^m\} \in E$ 。图 Γ 的所有自同构在置换乘法下组成一个群, 叫做图 Γ 的自同构群, 记作 $\text{Aut}\Gamma$ 。令 G 是 $\text{Aut}\Gamma$ 的一个子群, 若 G 作用在图 Γ 的顶点集 V 、边集 E 、弧集 A 上是传递的, 则称图 Γ 是 G -点传递、 G -边传递、 G -弧传递; 同理, 若 $\text{Aut}\Gamma$ 在顶点集 V 、边集 E 、弧集 A 上是传递的, 则相应地称图 Γ 是点传递、边传递、弧传递的。因此图的自同构群反映了图的对称性, 可用于对图进行分类, 相同自同构群结构的图可能具有相似的性质和特征。在网络结构中, 可通过分析网络的自同构群了解网络对称性, 帮助优化网络布局和资源分配; 在密码学中, 基于图自同构问题的困难性可构造公钥密码体制。

因此, 基于以上的知识可知, 若通过群的作用能将图中任意两个顶点连接起来, 那么这个图是连通的; 从群作用的角度分析顶点之间的关系, 有助于判断图的连通性以及理解连通分支的结构。而图的对称性由自同构群来刻画, 若存在自同构使得某个子图映射到自身, 则这个子图是一个不变子图; 通过寻找图的不变子图, 可以将图分解为具有特定对称性的子结构, 有助于分析图的整体结构。

对于 $s \geq 1$, 定义了图 Γ 上的 s -弧, 即是一个 $(s+1)$ -元序列 $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$, 其中 $\alpha_i \in V$, 满足 $\{\alpha_i, \alpha_{i+1}\} \in E$ 和 $\alpha_i \neq \alpha_{i+2}$, $1 \leq i \leq s$; 进一步, 如果 G 在 s -弧集上传递, 但在 $(s+1)$ -弧集上不传递, 则称 Γ 是 (G, s) -传递图。R. Weiss 在文献[1]中证明了不存在 6 传递图和 8 以上的 s -传递图, 即 $s = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ 。

在过去的 80 多年里, 群与图已经发展成为代数图论的一个重要领域, 并且针对刻画某一类特征的图先后出现了许多精彩的理论。事实上, 当对图进行分类时, 通常是对它的顶点数或者度数进行限制, 比如 Conder 在文献[2]中主要研究了度数 ≥ 4 时的弧传递图和 2-弧传递图的阶数问题, 为 4 度图的深入研究提供了参考; 还有当图的顶点数为奇数时, 李才恒教授等人在文献[3]中对 4 度边传递 Cayley 图进行了完全的分类; 其中, 弧传递图作为一类具有高度对称性的图, 一直是研究热点之一。例如 Tutte 在文献[4], 证明了所有 3 度弧传递图都是 s -弧传递图, 其中 $s \leq 5$; 在文献[5]中, 李才恒教授等人对在局部本原的条件下度数为 5, 6, 7 的弧传递图进行了详细的研究; 以上都为弧传递图的分类奠定了基础, 比如, 李才恒教授等人在文献[6]中对弧传递图及其自同构群进行了完整的刻画。因此可以体现出弧传递图在图论研究中是重要的研究对象。因为其结构和性质相对较为规则, 所以可作为构建其他复杂图结构的基础;

在通信网络中, 弧传递图可用于设计高效的路由算法和网络拓扑结构; 在多主体系统中, 可用于建模主体间具有对称交互关系的系统。

称 Γ 是点本原的, 如果 G 在顶点集 V 上的作用是本原的, 即不存在非平凡的不变划分。点本原图是一类具有特殊性质的图, 其研究对于理解图的对称性、结构性质以及群与图之间的相互作用有着重要意义, 所以点本原图在代数图论中成为研究的重点对象之一, 比如 Praeger 在文献[7]中对所有 kp 阶的点本原、边传递图进行了分类(其中 k, p 为素数); 在文献[8]中, 李才恒教授对 $s \geq 4$ 的点本原图进行了完全的分类。

基于此, 本文的主要目的是刻画一类在某些限制条件下的点本原非 2-弧传递图。

定理 1.1 设 $\Gamma = (V, E)$ 是一个 pq 阶 4 度的非 2-弧传递连通图, 其中 p, q 均为素数。令 $G \leq \text{Aut} \Gamma$, 且 G 是几乎单群, 作用在顶点集 V 上是本原的。进一步, 若 Γ 是 G -边传递的, 则图 Γ 在同构意义下是唯一存在的, 且 $\Gamma = \text{Cos}(G, H, HxH)$, 其中 $G = \text{PGL}_2(7)$, $H \cong D_{16}$ 。

2. 预备知识

引理 2.1. [9] 设 N 为 G 在 V 上传递的极小正规子群, 则 N 具有唯一性。

引理 2.2. 如果一个图 Γ 是 G -弧传递的, 则 G_α 在 $\Gamma(\alpha)$ 上传递。

证明: 令 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots, \beta_j \in \Gamma(\alpha)$, 则 $(\alpha, \beta_1), (\alpha, \beta_2), \dots, (\alpha, \beta_i), \dots, (\alpha, \beta_j)$ 为 Γ 的弧; 由于 Γ 是 G -弧传递的, 所以存在 $g \in G$, 使得 $(\alpha, \beta_1)^g = (\alpha^g, \beta_1^g) = (\alpha, \beta_2)$, 则有 $\alpha^g = \alpha$, $\beta_1^g = \beta_2$; 同理 $\alpha^g = \alpha$, $\beta_1^g = \beta_2$; $\dots$; $\alpha^g = \alpha$, $\beta_i^g = \beta_j$ 。于是可知 g 固定 α , 故可得到 $g \in G_\alpha$; 再根据 i, j 的任意性, 可知 G_α 在 $\Gamma(\alpha)$ 上是传递的。

接下来, 我们考虑有向图 $\Delta = (V, A)$, 其中 A 为弧集。在此情形下, Δ 是一个无向图, 当且仅当 $A = A^*$, 其中 $A^* = \{(\alpha, \beta) | (\beta, \alpha) \in A\}$ 。

我们设 $\Delta = (V, A)$ 是一个有向图, 且 $G \leq \text{Aut} \Delta$, 令 $\Delta(\alpha) = \{\beta \in V | (\alpha, \beta) \in A\}$ 表示顶点 α 的邻域。于是, 对于 G 的每一个正规子群 N , 点稳定子群 N_α 在 $\Delta(\alpha)$ 上诱导了一个置换群, 记为 $N_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ 。同时, 我们用 $N_\alpha^{[1]}$ 来表示 N_α 作用在 $\Delta(\alpha)$ 上的核, 于是我们有下面的简单结论:

(1) $N_\alpha^{\Delta(\alpha)} \cong N_\alpha / N_\alpha^{[1]}$, $N_{\alpha^g} = (N_\alpha)^g$, $N_{\alpha^g}^{[1]} = (N_\alpha^{[1]})^g$, $\Delta(\alpha^g) = \Delta(\alpha)^g$, $\forall g \in G$ 。

对于有限群 H , 我们用 $\pi(H)$ 来表示 $|H|$ 中全体素因子的集合。下面的引理告诉我们当 Δ 是连通的、 G -点传递图时, $\pi(N_\alpha) = \pi(N_\alpha^{\Delta(\alpha)})$ 。

引理 2.3. [9] 设 $\Delta = (V, A)$ 为有向连通图, 令 $G \leq \text{Aut} \Delta$, N 是 G 的正规子群, 若 G 作用在 V 上传递, 则 $\pi(N_\alpha) = \pi(N_\alpha^{\Delta(\alpha)})$, 并且要么 $\pi(G_\alpha^{[1]}) \subseteq \pi(N_\alpha)$, 要么 N 作用在 V 上不传递。

对于群的 Cayley 图, 我们知道 Cayley 图一定是点传递图, 但点传递图不一定是 Cayley 图。Sabidussi 在 1964 年给出了另一种用群来构造点传递图的方法, 叫做陪集图。与 Cayley 图不同的是, 每个点传递图都可以经过适当的构造变成陪集图。首先我们给出陪集图的定义。

定义 2.4. [10] 设 G 是有限群, H 是 G 的一个子群, 设 S 是若干个形如 HgH 的双陪集的并集, 其中 $g \notin H$, 则 G 关于 H 和 S 的陪集图 $\Gamma = \text{Cos}(G, H, S)$ 定义如下:

顶点集 $V(\Gamma) = [G:H]$ (H 在 G 中的所有左陪集的集合)

边集 $E(\Gamma) = \{\{Hx, Hy\} | yx^{-1} \in S\}$,

由此定义易知, 当 $H = 1$ 时, 此时的陪集图即为 Cayley 图。关于陪集图, 下面的命题是基本的。

命题 2.5. [11] [12] 设 $\Gamma = \text{Cos}(G, H, S)$ 是 G 关于 H 和 S 的陪集图, 则有

(1) Γ 是连通图, 当且仅当 $\langle S \rangle = G$;

(2) Γ 是 G -边传递的, 当且仅当存在 $x \in G \setminus H$, 使得 $S = H\{x, x^{-1}\}H$;

(3) Γ 是 G -弧传递的, 当且仅当存在 $x \in G \setminus H$, 使得 $S = HxH$ 且 $x^2 \in H$ 。

最后我们给出 4 度点本原图的分类结果。

引理 2.6. [13] 若图 Γ 是 n 阶 4 度点本原 s -传递图, 那么 Γ 同构于下列若干情形之一, 其中 s, n 和 $Aut\Gamma$ 如表 1 所示。

Table 1. 4-Valent vertex primitive arc-transitive Graph
表 1. 4 度点本原弧传递图

$Aut\Gamma$	Vertex-stabiliser	s
$Z_p : Z_4$	Z_4	1
$Z_p^2 : D_8$	D_8	1
$PSL_2(p)$	S_4	2
$PSL_2(p)$	A_4	2
$PGL_2(p)$	S_4	2
$PGL_2(7)$	D_{16}	1
$Aut(A_6)$	$[2^5]$	1
$PSL_2(17)$	D_{16}	1
S_7	$S_4 \times S_3$	3
$PSL_3(7)$	$(A_4 : Z_3) : Z_2$	3

3. 定理 1.1 的证明

在本节中, 我们设 $\Gamma = (V, E)$ 是一个 pq 阶的 4 度连通图, p, q 均为素数并且图 Γ 是非 2-弧传递的。令 $G \leq Aut\Gamma$, G 是几乎单群且满足 G 作用在边集 E 上是传递的, 作用在顶点集 V 上是本原的。由于 $|V|$ 是奇数, 于是根据文献[14]对于奇数阶本原群的分类结果, 我们可以确定群 G 的结构。

由文献[13]可知, Γ 是弧传递的, 结合 Γ 是非 2-弧传递的, 所以可知 Γ 是 1-传递图, 即对应表 1 中 $s=1$ 的情况。因此结合引理 2.6 可知图 Γ 的结构可能有 5 种情形。进一步, 我们假设 G 是几乎单群, 令 N 为 G 的极小正规子群, 结合 G 的本原性, 于是 N 为非交换单群且 N 作用在 V 上是传递的。根据引理 2.1 可知, N 是 G 的唯一极小正规子群, 于是 $N = soc(G)$ 。又因为 $|V|$ 是奇数, 点稳定子群 $N_\alpha \neq 1$, 故由引理 2.3 可知 $N_\alpha^{\Gamma(\alpha)} \neq 1$ 。

注意到 Γ 是 1-传递的, 因此由表 1 可知 $Aut\Gamma \cong PGL_2(7)$, $Aut(A_6)$ 或者 $PSL_2(17)$ 。进一步, 由文献[9]可知, G 和 $Aut\Gamma$ 的极小正规子群相同, 即 $N = soc(G) = soc(Aut\Gamma)$ 。下面我们逐一分析其可能性。若

$G \cong Aut(A_6)$, 注意到 $Aut(A_6) \cong P\Gamma L_2(9)$, 结合 $G_\alpha \cong [2^5]$ 可知
 $|V| = |G|/G_\alpha = |P\Gamma L_2(9)|/[2^5] = \frac{1440}{32} = 45 = 3^2 \times 5$, 与条件 $|V| = pq$ 矛盾; 若 $G \cong PSL_2(17)$, 则此时 $G_\alpha \cong D_{16}$,
于是 $|V| = |G|/G_\alpha = |PSL_2(17)|/[D_{16}] = \frac{2448}{16} = 153 = 3^2 \times 17$, 与条件 $|V| = pq$ 矛盾; 若 $G = PGL_2(7)$, $G_\alpha \cong D_{16}$,
于是 $|V| = |G|/G_\alpha = |PGL_2(7)|/[D_{16}] = \frac{336}{16} = 21 = 3 \times 7$, 满足条件。

于是接下来, 我们将以 $G = Aut\Gamma \cong PGL_2(7)$ 来构造满足条件的图。我们先来计算满足条件所需的群

的构造。

令 $G = PGL_2(7)$ ，则此时 $N = soc(G) = PSL_2(7)$ ，同时令 $H \cong D_{16} = G_\alpha \leq G$ ，再令 $K \cong Z_2^2$ ，由于 $Z_2^2 \leq S_4 \leq PSL_2(7)$ 且 $Z_2^2 \leq D_{16}$ ，于是 $K \leq H \cap N$ 。由于 $H \cong D_{16}$ ，于是我们可设

$H = \langle r, s \mid r^8 = s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle$ ，且 $K = \langle r^4 \rangle \times \langle r^4 \rangle$ ，于是 $N_H(K) = \langle r^2, s \rangle$ ，其结构满足 D_8 的定义即 $\langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$ ，所以 $N_H(K) \cong D_8$ ；并且利用 MAGMA 计算可知 $N_G(K) = N_N(K) \cong S_4$ 。

最后，我们来构造满足条件的陪集图。

取一个对合 $x \in N_N(K) \setminus H$ ，即在 $N_N(K) \setminus H$ 中，满足 $x^2 = e$ ，其中 e 是单位元。于是我们可令 $\Gamma = \text{Cos}(G, H, HxH)$ ，顶点集为 G 中 H 的右陪集的集合，即 $V\Gamma = \{Hg \mid g \in G\}$ ；边集由形如 $\{Hg_1, Hg_2\}$ 的无序对组成，其中 $g_1^{-1}g_2 \in HxH$ ；利用 MAGMA 计算可知 $\langle H, x \rangle = G$ ，因此由命题 2.5 可知 Γ 是连通图。

由已知可得 $|G| = |PGL_2(7)| = (7^2 - 1) \times 7 = 336$ ， $|H| = |D_{16}| = 16$ ， $|HxH| = \frac{|H| \times |H|}{|H \cap x^{-1}Hx|} = \frac{16 \times 16}{4} = 64$ 则其顶点

数为 $|V\Gamma| = |G:H| = \frac{|G|}{|H|} = 21$ ，即顶点数为奇数，度数为 $|HxH:H| = \frac{|HxH|}{|H|} = 4$ 。再结合 $x^2 = 1 \in H$ 可知 Γ 是

一个连通的 21 阶、4 度的弧传递图。

根据 H 的取法可知 H 是 G 的极大子群，由本原性的判别法则可知 G 是本原的，因此上述的陪集图 Γ 是点本原的。故由前面分析可知，存在唯一的一个 21 阶、4 度点本原弧传递图满足我们的条件。

至此我们就完成了主要定理的证明。

参考文献

- [1] Weiss, R. (1981) The Nonexistence of 8-Transitive Graphs. *Combinatorica*, **1**, 309-311. <https://doi.org/10.1007/bf02579337>
- [2] Conder, M.D.E., Li, C.H. and Potočník, P. (2015) On the Orders of Arc-Transitive Graphs. *Journal of Algebra*, **421**, 167-186. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.08.025>
- [3] Li, C.H., Lu, Z.P. and Zhang, H. (2006) Tetravalent Edge-Transitive Cayley Graphs with Odd Number of Vertices. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **96**, 164-181. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2005.07.003>
- [4] Tutte, W.T. (1947) A Family of Cubical Graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **43**, 459-474. <https://doi.org/10.1017/s0305004100023720>
- [5] Li, C.H., Lu, Z.P. and Wang, G. (2016) Arc-Transitive Graphs of Square-Free Order and Small Valency. *Discrete Mathematics*, **339**, 2907-2918. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.06.002>
- [6] Li, C.H., Xia, B. and Zhou, S. (2021) An Explicit Characterization of Arc-Transitive Circulants. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **150**, 1-16. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2021.02.004>
- [7] Praeger, C.E. and Xu, M.Y. (1993) Vertex-Primitive Graphs of Order a Product of Two Distinct Primes. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **59**, 245-266. <https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1068>
- [8] Li, C.H. (2001) The Finite Vertex-Primitive and Vertex-Biprimitive s-Transitive Graphs for $s \geq 4$. *Transactions of the American Mathematical Society*, **353**, 3511-3529. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-01-02768-4>
- [9] Liao, H.C., Li, J.J. and Lu, Z.P. (2020) On Quasiprimitive Edge-Transitive Graphs of Odd Order and Twice Prime Valency. *Journal of Group Theory*, **23**, 1017-1037. <https://doi.org/10.1515/jgth-2019-0091>
- [10] Sabidussi, G. (1959) On the Minimum Order of Graphs with Given Automorphism Group. *Monatshefte für Mathematik*, **63**, 124-127. <https://doi.org/10.1007/bf01299094>
- [11] 徐明曜. 有限群导引(下册) [M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [12] Gui Fang, X. and Praeger, C.E. (1999) Finite Two-Are Transitive Graphs Admitting a Ree Simple Group. *Communications in Algebra*, **27**, 3755-3769. <https://doi.org/10.1080/00927879908826660>
- [13] Li, C.H., Lu, Z.P. and Marušič, D. (2004) On Primitive Permutation Groups with Small Suborbits and Their Orbital Graphs. *Journal of Algebra*, **279**, 749-770. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2004.03.005>
- [14] Liebeck, M.W. and Saxl, J. (1985) The Primitive Permutation Groups of Odd Degree. *Journal of the London Mathematical Society*, **2**, 250-264. <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-31.2.250>