Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(3), 172-176
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.153090

一类奇数阶2倍素数度的局部本原图的构造

周蔓芝

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2025年2月10日；录用日期：2025年3月3日；发布日期：2025年3月17日

摘 要

早在1878年，A. Cayley为了解释群的生成元和定义关系提出了以他的名字命名的*Cayley*图。因为其构造的简便性和高度对称性，*Cayley*图得到了图论学者们的广泛重视。1938年，R. Frucht证明了对于任意给定的抽象群，都存在一个以这个群为自同构群的图。这项重要工作引发了一个新的研究领域——群与图，即以图的自同构群、群在图上的作用和具有各种传递性质的图作为主要的研究对象，同时也借助图来解决某些群论问题。在过去的80多年里，群与图已经发展成为代数图论的一个重要领域，先后出现了许多精彩的理论。本文是在奇数阶2倍素数度的条件下，借助于拟本原图的分类结果，通过分析图Γ的自同构群的子群及其点稳定子群的结构，利用本原群的分类结果，构造出了一类局部本原的拟本原图。

关键词

边传递图，局部本原图，拟本原置换群

Construction of a Class of Local Primitive Graphs of Odd Order and Twice Prime Valency

Manzhi Zhou

College of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Feb. 10th, 2025; accepted: Mar. 3rd, 2025; published: Mar. 17th, 2025

Abstract

As early as 1878, A. Cayley introduced the concept of the Cayley graph, named after him, to explain the generators and defining relations of groups. Due to the simplicity of its construction and high degree of symmetry, the Cayley graph has been paid significant attention from scholars in graph theory. In 1938, R. Frucht proved that for any given abstract group, there exists a graph in which

文章引用: 周蔓芝. 一类奇数阶 2 倍素数度的局部本原图的构造[J]. 理论数学, 2025, 15(3): 172-176.
DOI: 10.12677/pm.2025.153090

that group is automorphism group. This important work initiated a new research field—groups and graphs, which focuses on the automorphism groups of graphs, the actions of groups on graphs, and graphs with various transitive properties, while also utilizing graphs to solve some group theory problems. Over the past 80 years, groups and graphs have developed into a significant area of algebraic graph theory, yielding many remarkable theories. In this paper, under the condition of odd order and twice prime valency, by means of the classification results of quasi-primitive graphs, through the analysis of the structure of the subgroups of the auto-morphism group of Γ and its point stabilizer, and by using the classification results of primitive groups, we construct a class of locally primitive quasi-primitive graphs.

Keywords

Edge-Transitive Graph, Local Primitive Graph, Quasi-Primitive Permutation Group

1. 引言

本文所讨论的图均为有限简单图。

令图$\Gamma=(V,E)$，其中 V 为其顶点集，E 为其边集。对于每一条边$\{\alpha,\beta\}\in E$，其中包含了两条有序对(α,β)与(β,α)，称为图Γ的弧。称(α,β,γ)为图Γ的 2-弧，若$\alpha\neq\gamma$且(α,β)与(β,γ)均为Γ的弧。同时，我们用$\Gamma(\alpha)$表示在Γ中与顶点α相邻的点的集合，即顶点α的邻域。

称顶点集 V 上的置换 g 为图Γ的自同构，当且仅当对于所有的$\{\alpha,\beta\}\in E$，$\{\alpha^g,\beta^g\}\in E$。图$\Gamma$的所有自同构在置换乘法下组成一个群，叫做图$\Gamma$的自同构群，记作$Aut\Gamma$，显然$Aut\Gamma\leq Sym(V)$。通过适当的例子，比如说圈图$C_n$的自同构群为二面体群$D_{2n}$，完全图$K_n$的自同构群为$S_n$。利用自同构群在点集，边集或者弧集上的群作用，可进一步揭示图的传递性质，同时还可通过自同构群之间是否存在合适的对应关系来判断两个图同构；在实际判断中，可通过比较自同构群的结构、阶数、生成元等性质来辅助判断图是否同构，若两个图的自同构群不同构，那么这两个图必然不同构。通常情况下，若一个图Γ的自同构群包含一个正则子群，则图Γ同构于一个 *Cayley* 图。而 *Cayley* 图是研究群结构的有力工具，通过 *Cayley* 图的连通性、对称性等可了解群的生成元、元素间的关系等。围绕 *Cayley* 图产生了许多新的研究课题和方向，如 *Cayley* 图的自同构群、正则性、弧传递性等，促进了代数图论理论体系的完善，也为其他数学分支和计算机科学等领域提供了理论支持。

令$G\leq Aut\Gamma$，若 G 作用在图Γ的顶点集、边集、弧集、2-弧集上是传递的，则称图Γ是 G-点传递、G-边传递、G-弧传递、$(G,2)$-弧传递的；进一步，若$Aut\Gamma$在顶点集、边集、弧集、2-弧集上是传递的，则相应地称图Γ是点传递、边传递、弧传递、2-弧传递的。前面所说的圈图C_n和完全图K_n均是点传递，边传递的。

设图$\Gamma=(V,E)$，$G\leq Aut\Gamma$，称 G 作用在 V 上是拟本原的，若 G 的每一个非平凡正规子群作用在 V 上是传递的，根据 Praeger [1]的分类结果，我们知道群 G 是八种拟本原群中的一种。Praeger 的工作促进了对称图理论的快速发展，人们将 Praeger 的理论应用和拓展到了对称图的分类与刻画、自同构群的结构性质、点拟本原图、边拟本原图、局部拟本原图以及局部 s-弧传递图等的研究中，得到了诸多重要的结论。Praeger 的工作开创了对称图研究中的一种有效模式，同时也凸显了下面一类问题的重要性，即刻画

基本图的对称性、局部结构及其自同构群，并研究限定条件下的分类问题。特别是研究拟本原图的对称性及其自同构群。事实上，当我们对图的顶点数或者度数进行限制时，这样的群 G 只有八类中的少数几类，例如，当 Γ 是 $(G,2)$-弧传递时，Praeger [2]证明了 G 只能是八类中的四类；进一步，如果 Γ 还具有奇数个顶点，李才恒教授[3]证明了 G 只能是几乎单的。

令 $G \le Aut\Gamma$，若对任意的点 α，G_α 作用在 $\Gamma(\alpha)$ 上是本原的，则称图 Γ 是 G-局部本原图。关于局部本原图的分类工作已经有许多很好的结果，例如 Giudici 等人[4]建立了一个关于局部本原二部图的定理，并应用到文献[5]中，成功刻画了素数幂阶的局部本原图。

此外还有一些其他关于 *Cayley* 图的有趣结果，比如在文献[6]中，李才恒教授等人研究了在局部本原的条件下的交换群的 *Cayley* 图，并对其进行了完整的分类；方新贵教授等人在文献[7]中对于非交换单群下的局部本原 *Cayley* 图进行了详细的研究，他们证明了当图的度数满足一定条件时，此类图是存在的；对于二面体群的局部本原 *Cayley* 图，潘江敏教授在文献[8]中对于此类图进行了完整的刻画与分类。此外，对于特定度数的局部本原图的研究一直是学者们研究的热点，比如在文献[9]中，韩华教授等人对于度数为 $18p$ (p 为素数)的局部本原图进行了研究，他们证明了在非弧传递的条件下，图 Γ 要么同构于一个 *Gray* 图，要么同构于一个 *Benson* 图。

对于奇数阶 2 倍素数度的图 Γ，路在平教授等人在文献[11]中证明当 Γ 是 G-边传递且 G-拟本原时，G 要么是几乎单群，要么是仿射型本原群。基于此，本文的主要结论是刻画一类在某些限制条件下的局部本原的拟本原图。

定理 1.1 设 $\Gamma=(V,E)$ 是一个奇数阶 $2r$ 度(r 为素数)的连通图，$G \le Aut\Gamma$，若 Γ 是 G-边传递的，则存在一个 G-局部本原的拟本原图，其中 $soc(G) \cong Z_{11}^2$，$G_\alpha \cong PSL(2,11)$。

2. 预备知识

在本节中，我们令 $\Gamma=(V,E)$ 是一个奇数阶 2 倍素数度的连通图，$G \le Aut\Gamma$，G 在边集 E 上传递，因为 Γ 是奇数阶的非二部图，故 G 在顶点集 V 上也传递。

引理 2.1. ([10]，定理 4.2A) 设 N 为交换群，并且 N 在 V 上传递，则 N 在 V 上正则。

定义 2.2. 设 G 是有限群，S 是 G 的不含单位元的子集，并且 $S=S^{-1}=\{s^{-1} \mid s \in S\}$，以 G 的元素为顶点定义一个图，记作 $Cay(G,S)$，其边的关系如下：$\{g,h\}$ 为一条边当且仅当 $hg^{-1} \in S$，称 $Cay(G,S)$ 为 G 关于子集 S 的 *Cayley* 图。特别地，$Cay(G,S)$ 是点传递图。

下面的命题给出了 *Cayley* 图的两个基本事实，参见文献[11]第 XIV 章第 4 节。

命题 2.3. 1) *Cayley* 图 $Cay(G,S)$ 是连通的，当且仅当 $\langle S\rangle = G$；

2) 一个图同构于 *Cayley* 图 $Cay(G,S)$ 的充要条件是该图的自同构群含有与 G 同构的正则子群。

令 $Aut(G,S)=\{\sigma \in Aut(G) \mid S^\sigma = S\}$，于是得到下面的引理：

引理 2.4. [12] $N_{Aut(Cay(G,S))}(R(G)) = R(G):Aut(G,S)$；特别地，当 $Cay(G,S)$ 连通时，$Aut(G,S)$ 在 S 上的作用是忠实的。

引理 2.5 [13] *PSL* (2, 11)包含一个同构于 A_5 的子群。

最后我们以有限群论的一个重要结果来结束本节：

定理 2.6. [14] (Frattini 论断)设 G 作用在 V 上，并且包含一个子群 N，它在 V 上的作用是传递的，则 $G=G_\alpha N$，$\forall \alpha \in V$。

3. 定理 1.1 的证明

在本节中，我们设图 $\Gamma=(V,E)$ 满足定理 1.1 中的条件，且不妨设 Γ 是 G-拟本原，G-局部本原的。由

于奇数阶的拟本原 2-弧传递图已被分类，因此我们只需要考虑局部本原的非 2-弧传递图的情形。

引理 3.1. $soc\left(G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}\right)=A_5$ 或 S_5，且 $r=5$。

证明：由于 Γ 是 G-局部本原的，可知 G_α 在 $\Gamma(\alpha)$ 上的作用是本原的；并且 Γ 是非(G,2)-弧传递的，即群 G 在 Γ 的所有 2-弧集合上不是传递的。而 $G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}\le G_\alpha$，故 $G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$ 是 $2r$ 次本原置换群但非 2-传递的，于是由文献[15]可知，$soc\left(G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}\right)=A_5$ 或 S_5，且 $r=5$，因此 Γ 是 10 度图。

引理 3.2. 设 N 为 G 在 V 上传递的极小正规子群，则 N 具有唯一性。

证明：我们不妨假设 M 是群 G 的极小正规子群，且满足 $M\ne N$，则此时成立 $M\cap N=1$，因此可得 $N\le C_G(M)=\{g\in G|mg=gm,\forall m\in M\}$。于是 M 作用在 V 上是半正则的，且 $|M|$ 是 $|V|$ 的一个因子，因此我们可知 $|M|$ 是奇数。又根据子群 M 的选择并结合文献[16]可知，M 是特征单群，于是有 $M=T_1\times T_2\times\cdots\times T_i$，其中这些 T_i 是彼此同构的单群。结合前面分析可知，T_i 是奇数阶单群，则由文献[15]可知 T_i 一定是素数阶循环群，因此 M 是交换群；如果 M 在 V 上传递，则 $M=C_G(M)$，导致 $N\le C_G(M)=M$，与假设矛盾。于是 M 不是 G 的一个传递子群，故 N 为 G 在 V 上传递的唯一极小正规子群，引理得证。

有了前面这些结论，最后我们来证明定理 1.1。

因为图 Γ 是 G-拟本原的，不妨设 N 为 G 的传递的极小正规子群，由文献[16]可知，此时，G 要么是几乎单群，要么是仿射型群。不妨设 $N=Z_p^k$，于是由引理 2.1 和引理 3.2 可知 $soc(G)=N$ 且 N 作用在 V 上是正则的，于是可得 $|V|=|N|=p^k$。同时，基于 N 的正则性并且结合命题 2.2，此时我们可以将图 Γ 看作是 N 上的 10 度正规 *Cayley* 图，即 $\Gamma=Cay(N,S)$，其中 $\langle S\rangle=N$。由于 N 为 G 的正规子群，因而 $G_\alpha\le Aut(N,S)$。由引理 2.3 可知 G_α 作用在 $\Gamma(\alpha)$ 上是忠实的，同时结合文献[17]可知 $G_\alpha\le S_2\wr S_5$。故由前面的引理 3.1 可知 $G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}=A_5$ 或 S_5，同时 $G_\alpha\le GL(k,p)$。

于是我们可以构造出一类满足定理条件的图，不妨令 N 是 G 的极小正规子群且 $N=Z_{11}^2$，点稳定子群 $G_\alpha=PSL(2,11)$。因为 Γ 是 G-拟本原的，即 G 的每一个非平凡正规子群在 V 上都是传递的，结合此正规子群的唯一性可知 $N=soc(G)$ 在 V 上传递，于是由定理 2.5 可知 $G=G_\alpha N$。又由 N 在 V 上正则，所以图 Γ 的阶与群 N 的阶相等；故 $|V|=|N|=2^{11}$=121。再根据条件图 Γ 是 G-局部本原非(G,2)-弧传递的，于是 G_α 在点 α 的邻域 $\Gamma(\alpha)$ 上诱导了一个 2r 次非 2-传递的本原置换群 $G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$，结合前面讨论可知，$G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}=A_5$ 或 S_5，它是点稳定子 G_α 的子群，则通过引理 2.4 可知 $A_5\le PSL(2,11)$，满足条件。因此，此时图 Γ 是一个 121 阶的 10 度图，并且 $G\le Aut\Gamma$，满足 $soc(G)\cong Z_{11}^2$，$G_\alpha\cong PSL(2,11)$。

参考文献

[1] Praeger, C.E. (1997) Finite Quasiprimitive Graphs. In: *Surveys in Combinatorics*, Cambridge University Press, 65-86. https://doi.org/10.1017/cbo9780511662119.005

[2] Praeger, C.E. (1993) An O'nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **2**, 227-239. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227

[3] Li, C.H. (2001) On Finite S-Transitive Graphs of Odd Order. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **81**, 307-317. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.2012

[4] Giudici, M., Li, C. and Praeger, C. (2003) Analysing Finite Locally *s*-Arc Transitive Graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, **356**, 291-317. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-03-03361-0

[5] Li, C.H., Pan, J. And Ma, L. (2009) Locally Primitive Graphs of Prime-Power Order. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **86**, 111-122. https://doi.org/10.1017/s144678870800089x

[6] Li, C., Lou, B. and Pan, J. (2011) Finite Locally Primitive Abelian Cayley Graphs. *Science China Mathematics*, **54**, 845-854. https://doi.org/10.1007/s11425-010-4134-0

[7] Fang, X., Ma, X. and Wang, J. (2011) On Locally Primitive Cayley Graphs of Finite Simple Groups. *Journal of*

Combinatorial Theory, *Series A*, **118**, 1039-1051. https://doi.org/10.1016/j.jcta.2010.10.008

[8] Pan, J. (2014) Locally Primitive Cayley Graphs of Dihedral Groups. *European Journal of Combinatorics*, **36**, 39-52. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2013.06.041

[9] Han, H. and Lu, Z. (2015) On Locally Primitive Graphs of Order 18p. *Chinese Annals of Mathematics*, *Series B*, **36**, 919-936. https://doi.org/10.1007/s11401-015-0928-2

[10] Dixon, J.D. and Mortimer, B. (1996) Permutation Groups. Springer-Verlag.

[11] 徐明曜. 有限群导引(下册)[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[12] Godsil, C.D. (1981) On the Full Automorphism Group of a Graph. *Combinatorica*, **1**, 243-256. https://doi.org/10.1007/bf02579330

[13] Conway, J.H., Curtis, R.T., Noton, S.P., Parker, R.A. and Wilson, R.A. (1985) Atlas of Finite Groups. Clarendon Press.

[14] 徐明曜. 有限群导引(上册)[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[15] Gorenstein, D. (1982) Finite Simple Groups. Pleunum Press.

[16] Huppert, B. (1967) Endliche Gruppen I. Springer-Verlag.

[17] Liao, H.C., Li, J.J. and Lu, Z.P. (2020) On Quasiprimitive Edge-Transitive Graphs of Odd Order and Twice Prime Valency. *Journal of Group Theory*, **23**, 1017-1037. https://doi.org/10.1515/jgth-2019-0091