Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(3), 10-15
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.153071

Hans汉斯

半群$\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)$的性质

王禹佳，侯　闽，罗永贵*

贵州师范大学数学科学学院，贵州　贵阳

收稿日期：2025年1月8日；录用日期：2025年2月21日；发布日期：2025年3月6日

摘　要

设$\mathcal{S}_n$和$\mathcal{T}_n$分别是$X_n=\{1,2,\cdots,n\}$上的对称群和全变换半群。对于$1\le m\le n-1$，记$X_m=\{1,2,\cdots,m\}$且$X_{n-m}=X_n\setminus X_m$。令$\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)=\{\alpha\in\mathcal{F}_{(n,m)}:$存在$1\le j\le m<i\le n$使得$i\alpha=j\}$，则显然$\mathcal{T}_{F_m}(n)$是$\mathcal{T}_n$的子半群。本文刻画了该半群的格林关系和理想。

关键词

变换半群，格林关系，理想

Property of Semigroup $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)$

Yujia Wang, Min Hou, Yonggui Luo*

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Jan. 8th, 2025; accepted: Feb. 21st, 2025; published: Mar. 6th, 2025

Abstract

Let $\mathcal{S}_n$ and $\mathcal{T}_n$ be the symmetric group and the full transformation semigroup on $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$, respectively. For $1\le m\le n-1$, we denote by X_m the set $\{1,2,\cdots,m\}$ and by X_{n-m} the set $X_n\setminus X_m$. Put $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)=\{\alpha\in\mathcal{F}_{(n,m)}:$存在$1\le j\le m<i\le n$使得$i\alpha=j\}$, then $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)$ is a subsemigroup of $\mathcal{T}_n$. In this paper, we describe the Green relation and ideals of the semigroup $\mathcal{T}_{F_m}(n)$.

*通讯作者。

文章引用: 王禹佳, 侯闽, 罗永贵. 半群$\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)$的性质[J]. 理论数学, 2025, 15(3): 10-15.
DOI: 10.12677/pm.2025.153071

Keywords

Transformation Semigroup, Green Relation, Ideal

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言与预备知识

在数学领域中，变换半群是一种重要的代数结构。它由非空集合与自身上的一个二元变换组成，满足封闭性、结合律以及存在单位元等性质。而变换半群的研究在多个领域中具有重要应用价值。在图像处理中，我们可以将图像中的变换建模为一个变换半群，通过研究其结构性质来设计和优化图像处理算法。在密码学中，变换半群可以用于构建加密算法，通过研究其结构性质来提高密码算法的安全性。另外，变换半群的研究还在数据压缩、信号处理以及模式识别等方面有着广泛的应用。而在半群代数理论中，格林关系起着至关重要的作用。假设 S 是一个半群，$a,b\in S$。若 $S^1a=S^1b$，则称 a 与 b 是 $\mathcal{L}$ 等价的，记为 $a\mathcal{L}b$；若 $aS^1=bS^1$，则称 a 与 b 是 $\mathcal{R}$ 等价的，记为 $a\mathcal{R}b$；若 $S^1AS^1=S^1AS^1$，则称 a 与 b 是 $\mathcal{T}$ 等价的，记为 $a\mathcal{T}b$；其中 S^1 表示由 S 得到的幺半群，若 S 没有单位元，则可以添加一个单位元，否则 $S^1=S$，令 $\mathcal{H}=\mathcal{L}\cap\mathcal{R},\mathcal{D}=\mathcal{L}\cup\mathcal{R}$ 表示 $\mathcal{L}$ 关系和 $\mathcal{R}$ 关系的交和并。众所周知，$\mathcal{D}=\mathcal{L}\circ\mathcal{R}=\mathcal{R}\circ\mathcal{L}$ 且 $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{L}$，$\mathcal{R}\subseteq\mathcal{D}\subseteq\mathcal{T}$。特别地，当 S 是有限半群时，$\mathcal{D}=\mathcal{J}$。对任意的 $a\in S$，通常用 $\mathcal{R}_a,\mathcal{L}_a,\mathcal{J}_a,\mathcal{H}_a$ 分别表示 a 所在 $\mathcal{R}$-类、$\mathcal{L}$-类、$\mathcal{J}$-类、$\mathcal{H}$-类。

对半群研究格林关系具有重要的意义，1995 年，Green [1]首次在半群上定义了格林关系，即五类等价关系。1955 年，Doss [2]给出了全变换半群上 Green 关系的等价刻画。1995 年，Howie [3]系统地总结了半群上的格林关系的系列结果。2010 年，郭聿琦[4]等对格林关系的提出及推广脉络进行了详细阐述。2022 年，李德标[5]主要研究了保向扩张全变换半群 $\mathcal{OPE}_n$ 和保向扩张部分单变换半群 $\mathcal{POPEI}_n$ 的格林关系。2023 年，陈辉[6]研究等价关系的变换半群 $\mathcal{TE}(X)$ 和 $\mathcal{TE}^*(X)$ 的格林关系。

设 $\mathcal{S}_n$ 和 $\mathcal{T}_n$ 分别是 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的对称群和全变换半群。对于 $1\le m\le n-1$，记 $X_m=\{1,2,\cdots,m\}$。令

$$\mathcal{F}_{(n,m)}=\{\alpha\in\mathcal{T}_n:x\alpha=x,x\in X_m\},$$

$$\mathcal{G}_{(n,m)}=\{\alpha\in\mathcal{F}_{(n,m)}:X_{n-m}\alpha=X_{n-m}\},$$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)=\{\alpha\in\mathcal{F}_{(n,m)}:\text{存在}1\le j\le m<i\le n\text{ 使得 }i\alpha=j\},$$

则易证得 $\mathcal{F}_{(n,m)}$，$\mathcal{G}_{(n,m)}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)$ 都是全变换半群 $\mathcal{T}_n$ 的子半群且 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)\subseteq\mathcal{F}_{(n,m)}$。显然 $\mathcal{G}_{(n,m)}=\mathcal{F}_{(n,m)}\cap\mathcal{S}_n$ 且 $\mathcal{G}_{(n,m)}\cong\{1_m\}\times\mathcal{S}_{n\setminus m}$，其中 1_m 是 X_m 上的恒等变换且 $\mathcal{S}_{n\setminus m}$ 是 $X_n\setminus X_m$ 上的对称群。2013 年，Honyam 和 Sanwong 在文献[7]中刻画了半群 $\mathcal{F}_{(n,m)}$ 的格林关系，并研究了它的秩。2022 年，Ronnason Chinram 在文献[8]中研究了 $\mathcal{F}_{(n,m)}$ 的正则性质。

本文将考虑半群 $\mathcal{T}_{F_m}(n)$，刻画了它的格林关系以及该半群的理想形式。

2. 主要结果及其证明

设 $\alpha\in\mathcal{T}_n$，通常用 $im(\alpha)$ 表示集合 $\{x\alpha:\alpha\in X_n\}$，称 $im(\alpha)$ 为 α 的像，记

$$ker(\alpha)=\{(x,y)\in X_n\times X_n : x\alpha=y\alpha\},$$

则 $ker(\alpha)$ 是 X_n 上的等价关系，称 $ker(\alpha)$ 为 α 的核。

假设 $1\le m\le n-1$，任取 $\alpha\in\mathcal{T}_{F_m}(n)$ 且 $|im(\alpha)|=k$，则 α 有如下标准表示：

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_m\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix},k=m$$

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_m & A_{m+1} & \cdots & A_k\\ 1 & 2 & \cdots & m & a_{m+1} & \cdots & a_k\end{pmatrix},k\ge m+1$$

其中 $i\in A_i$，$1\le i\le m$，$|A_1\cup\cdots\cup A_m|\ge m+1$，且 $a_j\in X_{n-m},m+1\le j\le k$。

定理 1 设 $1\le m\le n-1$ 且 $\alpha,\beta\in\mathcal{T}_{F_m}(n)$，则 $\alpha\mathcal{L}\beta$ 当且仅当 $im(\alpha)=im(\beta)$。

证明：

假设 $\alpha\mathcal{L}\beta$，则存在 $\gamma,\delta\in\mathcal{T}_{F_m}(n)$，有 $\alpha=\gamma\beta$，$\beta=\delta\alpha$。于是 $im(\alpha)=im(\gamma\beta)\subseteq im(\beta)$，$im(\beta)=im(\delta\alpha)\subseteq im(\alpha)$，所以 $im(\alpha)=im(\beta)$。

反之，设 $im(\alpha)=im(\beta)$，则 $|im(\alpha)|=|im(\beta)|=k$。以下分两种情形讨论：

情形 1：$k=m$，显然 α 和 β 有如下标准形式：

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_m\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix}$$

$$\beta=\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_m\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix}$$

其中 $i\in A_i\cap B_i$，$1\le i\le m$，于是 $\alpha=\alpha\beta$ 且 $\beta=\beta\alpha$，从而 $\alpha\mathcal{L}\beta$。

情形 2：$k\ge m+1$，显然 α 和 β 有如下标准形式：

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_m & A_{m+1} & \cdots & A_k\\ 1 & 2 & \cdots & m & a_{m+1} & \cdots & a_k\end{pmatrix}$$

$$\beta=\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_m & B_{m+1} & \cdots & B_k\\ 1 & 2 & \cdots & m & a_{m+1} & \cdots & a_k\end{pmatrix}$$

其中 $i\in A_i\cap B_i$，$1\le i\le m$，$\left|\bigcup_{k=1}^{m}A_k\right|\ge m+1$，$\left|\bigcup_{k=1}^{m}B_k\right|\ge m+1$，且 $a_j\in X_{n-m},m+1\le j\le k$。令

$$\gamma=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_m & A_{m+1} & \cdots & A_k\\ 1 & 2 & \cdots & m & \min B_{m+1} & \cdots & \min B_k\end{pmatrix}$$

$$\delta=\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_m & B_{m+1} & \cdots & B_k\\ 1 & 2 & \cdots & m & \min A_{m+1} & \cdots & \min A_k\end{pmatrix}$$

则 $\alpha=\gamma\beta$ 且 $\beta=\delta\alpha$，从而 $\alpha\mathcal{L}\beta$。

定理 2 设 $1\le m\le n-1$ 且 $\alpha,\beta\in\mathcal{T}_{F_m}(n)$，则 $\alpha\mathcal{R}\beta$ 当且仅当 $ker(\alpha)=ker(\beta)$。

证明：假设 $\alpha\mathcal{R}\beta$，则有 $\gamma,\delta\in\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)$，使得 $\alpha=\beta\gamma$，$\beta=\alpha\delta$。任取 $(x,y)\in ker(\alpha)$，则 $x\alpha=y\beta$。于是 $x\beta=x\alpha\delta=y\alpha\delta=y\beta$，所以 $ker(\alpha)\subseteq ker(\beta)$。同理可证 $ker(\beta)\subseteq ker(\alpha)$。因此，$ker(\beta)=ker(\alpha)$。

反之，假设 $ker(\alpha)=ker(\beta)$，则 $dom(\alpha)=dom(\beta)=k$。

$$|im(\alpha)|=|dom(\alpha)/ker(\alpha)|=|dom(\beta)/ker(\beta)|=k$$

以下分两种情形讨论：

情形 1：$k=m$。显然 $\alpha=\beta$，从而 $\alpha\mathcal{R}\beta$。

情形 2：$k\geq m+1$，显然 α 和 β 有如下标准形式：

$$\alpha=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m & A_{m+1} & \cdots & A_k \\ 1 & 2 & \cdots & m & a_{m+1} & \cdots & a_k \end{pmatrix}$$

$$\beta=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m & A_{m+1} & \cdots & A_k \\ 1 & 2 & \cdots & m & b_{m+1} & \cdots & b_k \end{pmatrix}$$

其中 $i\in A_i$，$1\leq i\leq m$，$\left|\bigcup_{k=1}^{m}A_k\right|\geq m+1$，且 $a_j,b_j\in X_{n-m}, m+1\leq j\leq k$。注意到 $\left|im(\beta)\right|=k\leq n-1$ 令

$$\gamma=\begin{pmatrix} \left[X_n\setminus im(\beta)\right]\cup\{1\} & 2 & \cdots & m & b_{m+1} & \cdots & b_k \\ 1 & 2 & \cdots & m & a_{m+1} & \cdots & a_k \end{pmatrix}$$

$$\delta=\begin{pmatrix} \left[X_n\setminus im(\alpha)\right]\cup\{1\} & 2 & \cdots & m & a_{m+1} & \cdots & a_k \\ 1 & 2 & \cdots & m & b_{m+1} & \cdots & b_k \end{pmatrix}$$

则 $\gamma,\delta\in\mathcal{T}_{F_m}(n)$，$\alpha=\beta\gamma$ 且 $\beta=\alpha\delta$，从而 $\alpha\mathcal{R}\beta$。

定理 3 设 $1\leq m\leq n-1$ 且 $\alpha,\beta\in\mathcal{T}_{F_m}(n)$，则 $\alpha\mathcal{J}\beta$ 当且仅当 $\left|im(\alpha)\right|=\left|im(\beta)\right|$。

证明：假设 $\alpha\mathcal{J}\beta$，则有 $\gamma\in\mathcal{T}_{F_m}(n)$，使得 $\alpha\mathcal{R}\gamma$ 且 $\gamma\mathcal{L}\beta$。由定理 1 和定理 2 可知，$im(\alpha)=im(\beta)$ 且 $ker(\beta)=ker(\gamma)$。所以

$$\left|im(\alpha)\right|=\left|im(\gamma)\right|=\left|dom(\gamma)/ker(\gamma)\right|=\left|dom(\beta)/ker(\beta)\right|=\left|im(\beta)\right|$$

反之，假设 $\left|im(\alpha)\right|=\left|im(\beta)\right|=k$，以下分两种情形讨论：

情形 1：$k=m$，显然 α 和 β 有如下标准形式：

$$\alpha=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$$

$$\beta=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$$

令 $\gamma=\alpha$，则由定理 1 和定理 2 可知，$\alpha\mathcal{R}\gamma\mathcal{L}\beta$，所以 $\alpha\mathcal{J}\beta$。

情形 2：$k\geq m+1$，显然 α 和 β 有如下标准形式：

$$\alpha=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m & A_{m+1} & \cdots & A_k \\ 1 & 2 & \cdots & m & a_{m+1} & \cdots & a_k \end{pmatrix}$$

$$\beta=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_m & B_{m+1} & \cdots & B_k \\ 1 & 2 & \cdots & m & b_{m+1} & \cdots & b_k \end{pmatrix}$$

其中 $i\in A_i$，$i\in B_i$，$1\leq i\leq m$，$\left|\bigcup_{k=1}^{m}A_k\right|\geq m+1$，$\left|\bigcup_{k=1}^{m}B_k\right|\geq m+1$ 且 $a_j,b_j\in X_{n-m}, m+1\leq j\leq k$。令

$$\gamma=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m & A_{m+1} & \cdots & A_k \\ 1 & 2 & \cdots & m & b_{m+1} & \cdots & b_k \end{pmatrix}$$

则由定理 1 和定理 2 可知，$\alpha\mathcal{R}\gamma\mathcal{L}\beta$，从而 $\alpha\mathcal{J}\beta$。

设 S 是一个半群，且 $a\in S$，若 $a^2=a$，则称 a 是 S 中的一个幂等元；若存在 $b\in S$，使得 $aba=a$，则称 a 为正则元；若存在 $b\in S$，使得 $aba=a$，$bab=a$，则称 b 为 a 的一个逆元。若半群 S 的每个元都是正则元，则称 S 是正则半群。设 $\mathcal{I}$ 是半群 S 的非空子集，若 $\mathcal{I}S,S\mathcal{I}\subseteq S$，则称 $\mathcal{I}$ 是半群 S 的理想。

假设 $m \le r \le n$，令

$$\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n,r)=\left\{\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n):\left|im(\alpha)\right| \le r\right\}.$$

则称 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n,r)$ 是 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)$ 理想。

定理 4 设 $1 \le m \le n-1$，则半群 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)$ 的理想仅仅如下形式：

$$\mathcal{T}_{\mathcal{F}_{(m)}}(n,r),\ m \le r \le n$$

证明：假设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)$ 的理想，令

$$r=\max\left\{\left|im(\alpha)\right|:\alpha \in \mathcal{I}\right\}$$

显然，$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n,r)$。由 $\mathcal{I}$ 的定义知，存在 $\alpha \in \mathcal{I}$，使得 $\left|im(\alpha)\right|=r$。任意取 $\beta \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n,r)$，使得 $\left|im(\beta)\right|=k \le r$。我们将证明：$\beta \in \mathcal{I}$，以下分两种情形讨论：

情形 1：$r=m$，显然 $\beta\alpha=\alpha$，从而由 $\alpha \in \mathcal{I}$ 及 $\mathcal{I}$ 是半群 $\mathcal{T}_{F_m}(n)$ 的理想可得，$\beta=\beta\alpha \in \mathcal{I}$。

情形 2：$r \ge m+1$。显然 α 有如下标准形式：

$$\alpha=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m & A_{m+1} & \cdots & A_r \\ 1 & 2 & \cdots & m & a_{m+1} & \cdots & r \end{pmatrix}$$

其中 $i \in A_i$，$1 \le i \le m$，$\left|\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right| \ge m+1$，且 $a_j \in X_{n-m}, m+1 \le j \le k$。以下分成两种子情形讨论：

情形 2.1：$k=m$，显然 β 有如下标准形式：

$$\beta=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$$

其中 $i \in B_i$，$1 \le i \le m$。易验证 $\beta=\beta\alpha$，从而由 $\alpha \in \mathcal{I}$ 及 $\mathcal{I}$ 是半群 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)$ 的理想可得，$\beta=\beta\alpha \in \mathcal{I}$。

情形 2.2：$k \ge m+1$，显然 β 有如下标准形式：

$$\alpha=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_m & B_{m+1} & \cdots & B_k \\ 1 & 2 & \cdots & m & b_{m+1} & \cdots & b_k \end{pmatrix}$$

其中 $i \in B_i$，$1 \le i \le m$，$\left|\bigcup_{k=1}^{m} B_k\right| \ge m+1$，且 $b_j \in X_{n-m}, m+1 \le j \le k$。注意到 $\left|im(\beta)\right|=k \le n-1$。

$$\gamma=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_m & B_{m+1} & \cdots & B_k \\ 1 & 2 & \cdots & m & \min A_{m+1} & \cdots & \min A_k \end{pmatrix}$$

$$\delta=\begin{pmatrix} \left[X_n \setminus im(\alpha)\right] \cup \{1\} & 2 & \cdots & m & a_{m+1} & \cdots & a_k \\ 1 & 2 & \cdots & m & b_{m+1} & \cdots & b_k \end{pmatrix}$$

则 $\beta=\gamma\alpha\delta \in \mathcal{I}$，从而由 $\alpha \in \mathcal{I}$ 及 $\mathcal{I}$ 是半群 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)$ 的理想可得，$\beta \in \mathcal{I}$。

由 β 的任意性可得，$\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n,r) \subseteq \mathcal{I}$。因此，$\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n,r)=\mathcal{I}$。

定理 5 设 $1 \le m \le r \le n$，则 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n,r)$ 是正则半群。

证明：任取 $\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n,r)$，则 $m \le \left|im(\alpha)\right|=k \le r$。以下分两种情形讨论：

情形 1：$k=m$，显然 α 有如下标准形式：

$$\alpha=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$$

其中 $i \in A_i$，$1 \le i \le m$。显然 $\alpha=\alpha^2$，即 α 是幂等元，从而 α 是正则元。

情形 2：$m+1 \le k \le r$，显然 α 有如下标准表示：

$$\alpha=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m & A_{m+1} & \cdots & A_k \\ 1 & 2 & \cdots & m & a_{m+1} & \cdots & a_k \end{pmatrix}$$

其中 $i\in A_i$，$1\le i\le m$，$\left|\bigcup_{k=1}^{m}A_k\right|\ge m+1$，且 $a_j\in X_{n-m}, m+1\le j\le k$。令

$$\beta=\begin{pmatrix} \left[X_n\setminus im(\alpha)\right]\cup\{1\} & 2 & \cdots & m & a_{m+1} & \cdots & a_k \\ 1 & & 2 & \cdots & m & \min A_{m+1} & \cdots & \min A_k \end{pmatrix}$$

则 $\alpha=\alpha\beta\alpha$，从而 α 是正则元。

由 α 的任意性可知，从而 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n,r)$ 是正则半群。

3. 总结及展望

本文介绍了半群 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)$ 的基本性质，刻画了该半群上的格林关系，给出该半群的理想及其正则性。本文通过相关理论以及其它学科相关知识对一类部分变换半群进行了研究，希望我的研究结果能对该理论或者相关的学科提供一些有意义的信息。但本文没有深入研究半群 $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_m}(n)$ 的相关秩以及极大正则子半群，因此在今后的学习研究当中，会继续对这一部分进行完善。

基金项目

国家自然科学基金项目(12261022)。

参考文献

[1] Green, J.A. (1951) The Structure of Semigroups. *Annals of Mathematics*, **54**, 163-172. https://doi.org/10.2307/1969317

[2] Doss, C. (1995) Certain Equivalence Relations in Transformation Semigroups. University of Tennessee.

[3] Howie, J.M. (1995) Fundamentals of Semigroup Sheory. Algebra Colloquium. Clarendon Press.

[4] 郭聿琦, 宫春梅, 任学明. 关于半群上格林关系的一个来龙去脉的综述(英文) [J]. 山东大学学报(理学版), 2010, 45(8): 1-18.

[5] 李德标. 几类变换半群结构性质的研究[D]: [博士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2022.

[6] 陈辉. 关于保持等价关系的变换半群的若干研究[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2023.

[7] Honyam, P. and Sanwong, J. (2013) Semigroups of Transformations with Fixed Sets. *Quaestiones Mathematicae*, **36**, 79-92. https://doi.org/10.2989/16073606.2013.779958

[8] Chinram, R. (2020) Regularity of the Semigroups of Transformations with a Fixed Point Set. *Thai Journal of Mathematics*, **18**, 1261-1268.