Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(3), 177-188
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.153091

Hans汉斯

伪欧式空间中的拉格朗日平均曲率流研究

李姗姗

广西师范大学数学与统计学院，广西 桂林

收稿日期：2025年1月27日；录用日期：2025年3月3日；发布日期：2025年3月17日

摘 要

该文讨论在伪欧氏空间中，带有以下初始条件的拉格朗日平均曲率流方程$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}Y(x,t)}{\mathrm{d}t}=H\\ Y(x,0)=Y_0(x)\end{cases}$。其中，该方程等价于特殊拉格朗日抛物方程$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=F_\tau\left(D^2u\right), & t>0, x\in\mathbb{R}^n\\ u=u_0(x), & t=0, x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$。通过构造函数，将证明若$0<\tau<\dfrac{\pi}{4}$或$\dfrac{\pi}{4}<\tau<\dfrac{\pi}{2}$，该抛物方程存在唯一光滑解$u(x,t)$，且存在更高阶导数的衰减估计。另一方面，应用Arzelà-Ascoli定理来获得$u(x,t)$收敛到拉格朗日平均曲率流方程的自膨胀解。

关键词

平均曲率流，特殊拉格朗日抛物方程，光滑解，一致收敛，Arzelà-Ascoli定理

Research on the Lagrangian Mean Curvature Flow in Pseudo-Euclidean

Shanshan Li

School of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin Guangxi

Received: Jan. 27th, 2025; accepted: Mar. 3rd, 2025; published: Mar. 17th, 2025

Abstract

In this paper, we consider the Lagrangian mean curvature flow equation in pseudo-Euclidean space

文章引用: 李姗姗. 伪欧式空间中的拉格朗日平均曲率流研究[J]. 理论数学, 2025, 15(3): 177-188.
DOI: 10.12677/pm.2025.153091

with the initial value: $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y(x,t)}{\mathrm{d}t} = H \\ Y(x,0) = Y_0(x) \end{cases}$. This equation is equivalent to the special Lagrangian parabolic equation $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = F_\tau(D^2 u), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u = u_0(x), & t = 0, x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$. By constructing a suitable function, it is proven that if $0 < \tau < \frac{\pi}{4}$ or $\frac{\pi}{4} < \tau < \frac{\pi}{2}$, the parabolic equation has a unique smooth solution $u(x,t)$ and decay estimates for higher-order derivatives exist. On the other hand, the Arzelà-Ascoli theorem is applied to obtain the convergence of $u(x,t)$ to the self-expanding solution of the Lagrangian mean curvature flow equation.

Keywords

The Mean Curvature Flow, The Special Lagrangian Parabolic Equation, Smooth Solution, Uniform Convergence, Arzelà-Ascoli Theorem

1. 引言

近年来，关于平均曲率流问题的研究引起了广泛的关注，得到了大量的研究结果。陈竞一和李嘉禹[1]首次研究了拉格朗日平均曲率流切线圆锥的奇点，随后 André Neves [2]研究了在四维紧 Calabi-Yau 流形中的拉格朗日平均曲率流的有限时间奇点。此外，一些作者研究了平均曲率流的长期存在性和收敛性。王慕道[3]证明了在任意维数情况下，图形平均曲率流的长期存在性和收敛性，在[4] [5]中，Kunt Smoczyk 和 Smoczyk-Wang 分别在一定的凸性条件下，建立了李群平均曲率流收敛到平坦空间的长期存在性和收敛性。Albert Chau 等[6]已经证明了具有利普希茨连续初始数据的平均曲率流具有长期存在性和收敛性。受文献[7] [8]的启发，本文将通过变换法研究在以下两种情形：$0 < \tau < \frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{4} < \tau < \frac{\pi}{2}$ 下，特殊拉格朗日抛物方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = F_\tau(D^2 u), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u = u_0(x), & t = 0, x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.1}$$

解的存在唯一性和收敛性。

本文主要定理如下：

定理 1.1 设 $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为满足条件 E 的连续可微函数，考虑以下方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = F_\tau(D^2 u), & t > 0, x \in R^n \\ u = u_0(x), & t = 0, x \in R^n \end{cases} \tag{1.2}$$

$0 < \tau < \frac{\pi}{4}$ 时，方程(1.2)存在唯一的解，该解满足

$$u(x,t)\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)\right)\cap C\left(\mathbb{R}^n\times[0,+\infty)\right) \tag{1.3}$$

其中$u(x,t)$满足条件 E。此外，存在一个仅依赖于$n,a,b,\mu,\Lambda,\frac{1}{\varepsilon_0}$的常数 C，使得

$$\sup_{x\in R^n}\left|D^3u(\cdot,t)\right|\le\frac{C}{t},\quad \forall t\in(\varepsilon_0,+\infty), \tag{1.4}$$

更一般地，对于所有$l=\{3,4,5,\cdots\}$，都有

$$\sup_{x\in R^n}\left|D^lu(\cdot,t)\right|\le\frac{C}{t^{l-2}},\quad \forall t\in(\varepsilon_0,+\infty), \tag{1.5}$$

定理 1.2 设$u_0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为满足条件 L 的$C^2$函数，考虑以下方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=F_\tau\left(D^2u\right), & t>0,x\in\mathbb{R}^n\\ u=u_0(x), & t=0,x\in\mathbb{R}^n\end{cases} \tag{1.6}$$

当$\frac{\pi}{4}<\tau<\frac{\pi}{2}$时，方程(1.6)存在唯一的解，该解满足

$$u(x,t)\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)\right)\cap C\left(\mathbb{R}^n\times[0,+\infty)\right) \tag{1.7}$$

其中$u(x,t)$满足条件 L。此外，存在一个仅依赖于$n,l,\eta=\eta(n),\frac{1}{\varepsilon_0}$的常数 C，使得

$$\sup_{x\in R^n}\left|D^3u(\cdot,t)\right|\le\frac{C}{t},\quad \forall t\in(\varepsilon_0,+\infty), \tag{1.8}$$

更一般地，对于所有$l=\{3,4,5,\cdots\}$，都有

$$\sup_{x\in R^n}\left|D^lu(\cdot,t)\right|\le\frac{C}{t^{l-2}},\quad \forall t\in(\varepsilon_0,+\infty), \tag{1.9}$$

以下定理表明，通过(1.1)式我们可以获得自膨胀解。

定理 1.3 设$u_0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是一个$C^2$函数，并且其 Hessian 矩阵满足条件 E，考虑方程(1.2)，假设满足以下条件：

$$\lim_{r\to\infty}r^{-2}u_0(rx)=U_0(x)$$

其中$U_0(x)\in C^2\left(\mathbb{R}^n\right)$，令$u(x,t)$和$U(x,t)$分别是满足方程(1.2)的解，则我们可以得到它们的初始值分别为$u_0(x)$和$U_0(x)$，则有

$$\lim_{t\to\infty}t^{-1}u\left(\sqrt{t}x,t\right)=U(x,1)$$

该收敛在$\mathbb{R}^n$中的任意紧支集上一致且光滑，并且$U(x,1)$是方程(2.3)的一个光滑的自膨胀解。

定理 1.4 设$u_0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是一个$C^2$函数，并且其 Hessian 矩阵满足条件 L，考虑方程(1.6)，假设满足以下条件：

$$\lim_{r\to\infty}r^{-2}u_0(rx)=U_0(x)$$

其中$U_0(x)\in C^2\left(R^n\right)$，令$u(x,t)$和$U(x,t)$分别是满足方程(6)的解，它们的初始值分别为$u_0(x)$和$U_0(x)$，则有

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}u\left(\sqrt{t}x,t\right)=U\left(x,1\right)$$

该收敛在 $\mathbb{R}^n$ 中的任意紧支集上一致且光滑，并且 $U\left(x,1\right)$ 是方程(2.3)的一个光滑的自膨胀解。

注：当 $\tau=\frac{\pi}{4}$ 时，特殊拉格朗日方程解的存在唯一性可用连续性方法和有限估计进一步证明，其解的收敛性可以采用 Arzelà-Ascoli 定理来证明，本文主要讨论 $0<\tau<\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{4}<\tau<\frac{\pi}{2}$ 情况下，特殊拉格朗日抛物方程解的存在唯一性和收敛性，对 $\tau=\frac{\pi}{4}$ 的情况暂时先不做讨论，读者感兴趣可以自证。

2. 预备知识

特殊拉格朗日抛物方程为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=F_\tau\left(D^2u\right), & t>0,x\in\mathbb{R}^n\\ u=u_0\left(x\right), & t=0,x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

其中 $\tau\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\lambda\left(D^2u\right)=\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right)$ 是 D^2u 的特征值。

$$F_\tau\left(\lambda\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n\ln\lambda_i, & \tau=0,\\ \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2b}\sum\limits_{i=1}^n\ln\dfrac{\lambda_i+a-b}{\lambda_i+a+b}, & 0<\tau<\dfrac{\pi}{4},\\ -\sqrt{2}\sum\limits_{i=1}^n\ln\dfrac{1}{1+\lambda_i}, & \tau=\dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{b}\sum\limits_{i=1}^n\arctan\dfrac{\lambda_i+a-b}{\lambda_i+a+b}, & \dfrac{\pi}{4}<\tau<\dfrac{\pi}{2},\\ \sum\limits_{i=1}^n\arctan\lambda_i, & \tau=\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

并令 $a=\cot\tau$， $b=\sqrt{\left|\cot^2\tau-1\right|}$ 。

定义 $\left(x^1,\cdots,x^n;y^1,\cdots,y^n\right)$ 为 $\mathbb{R}_n^{2n}$ 中的零坐标。令 $g_\tau=\sin\tau\delta_0+\cos\tau g_0$ 为标准欧式度量 $\delta_0=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_i+\sum_{i=1}^n\mathrm{d}y_i\otimes\mathrm{d}y_i$ 和伪欧式空间度量 $g_0=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}y_i+\sum_{i=1}^n\mathrm{d}y_i\otimes\mathrm{d}x_i$ 的线性组合。

在以下内容中，我们将采用爱因斯坦求和约定，即对重复的指标求和来证明命题 2.1。(参见[9])

我们定义一个光滑函数 u，其满足：

$$u_i=\frac{\partial u}{\partial x_i},\quad u_{ij}=\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j},\quad u_{ijk}=\frac{\partial^3u}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k},\cdots$$

命题 2.1 如果方程(1.1)在 $\mathbb{R}^n\times\left(0,T\right)$ 上有一个可容许解 $u\left(x,t\right)$ 则存在一族同胚映射 $Y\left(x,t\right)=\left(\varphi\left(x,t\right),\nabla u\left(x,t\right)\right)$ 是方程(2.3)的解，其中 $Y\left(x,t\right)\in\left(\mathbb{R}^{2n},g_\tau\right)$ 。

证明 我们取 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的第 i 个坐标向量为 $e_i=\left(0,\cdots,1,\cdots,0\right)$，其中 $i=1,2,\cdots,2n$ 。记 $\left(\mathbb{R}^{2n},g_\tau\right)$ 的内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\tau$ 。 $M_t=\left\{\left(x,Du\left(x,t\right)\right)\mid x\in\mathbb{R}^n\right\}$ 的切向量场由以下向量生成：

$$E_i=e_i+u_{ij}e_{n+j},\quad i=1,\cdots,n$$

M_t 上的诱导度量 g 为

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \left\langle E_i, E_j \right\rangle_\tau \\ &= \left\langle e_i + u_{ik} e_{n+k}, e_j + u_{jl} e_{n+l} \right\rangle_\tau \\ &= \sin\tau \left(\delta_{ij} + u_{ik} u_{kj} \right) + 2\cos\tau u_{ij} \end{aligned} \tag{2.1}$$

记 $\left(g_{ij}\right)^{-1}$ 为 g^{ij}，通过计算，我们得到

$$g^{ij} = \frac{\partial F_\tau\left(D^2 u\right)}{\partial u_{il}}$$

令 $\bar{\nabla}$ 表示 g_τ 的 Levi-Civita 联络，则有 $\bar{\nabla}_{E_i} E_j = u_{ijk} e_{n+k}$， M_t 的平均曲率计算如下：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= g^{ij} \left(\bar{\nabla}_{E_i} E_j \right)^\perp \\ &= \left(g^{ij} u_{ijk} e_{n+k} \right)^\perp \\ &= \left(\partial_k F_\tau \left(D^2 u \right) e_{n+k} \right)^\perp \end{aligned} \tag{2.2}$$

根据方程(1.1)关于 u 的演化

$$\boldsymbol{H} = \left(u_{tk} e_{n+k} \right)^\perp = \left(0, Du_t \right)^\perp$$

取一族同胚映射 $\varphi_t : \mathbb{R}^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^n$，该映射满足

$$\left(I_n, D^2 u\left(\varphi_t, t\right) \right) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi_t}{\mathrm{d}t} = -\left(0, Du_t\left(\varphi_t, t\right) \right)$$

其中 $\cdot$ 表示矩阵乘积，$\perp$ 表示投影到 M_t 的切空间。令 $Y = \left(\varphi_t, Du\left(\varphi_t, t\right)\right)$，则有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_t}{\mathrm{d}t}, Du_t\left(\varphi_t, t\right) + D^2 u\left(\varphi_t, t\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi_t}{\mathrm{d}t} \right) \\ &= \left(0, Du_t\left(\varphi_t, t\right) \right)^\perp \\ &= \boldsymbol{H}(Y) \end{aligned}$$

因此，命题 2.1 得证。

根据命题 2.1，存在一族同胚映射

$$\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

使得

$$Y(x,t) = \left(\varphi_t, Du\left(\varphi_t, t\right) \right) \subset \mathbb{R}_n^{2n}$$

是伪欧式空间中的平均曲率流解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y(x,t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{H} \\ Y(x,0) = Y_0(x) \end{cases} \tag{2.3}$$

在这里，$\boldsymbol{H}$ 是空间子流形 $Y(x,t) \subset \left(\mathbb{R}_n^{2n}, g_\tau\right)$ 的平均曲率向量，且

$$Y_0(x) = \left(x, Du_0(x) \right)$$

为了证明本文定理，给出以下条件：

定义 2.1 假设 $u_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$，我们称 $u_0(x)$ 满足以下条件之一：

条件 A：如果对所有 $R > 0$ 有

$$u_0(x) = \frac{u_0(Rx)}{R^2}$$

条件 E：如果对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$(b\mu - a)I \le D^2 u_0(x) \le (b\Lambda - a)I$$

其中 $a = \cot\tau$，$b = \sqrt{\left|\cot^2\tau - 1\right|}$，$0 < \tau < \frac{\pi}{4}$，$\mu, \Lambda$ 是正常数，$\mu < \Lambda$，I 是单位矩阵；

条件 E：如果对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$-(b + b\eta + a)I \le D^2 u_0(x) \le (b + b\eta - a)I$$

其中 $\eta = \eta(n)$ 是正维度的常数，$a = \cot\tau$，$b = \sqrt{\left|\cot^2\tau - 1\right|}$，$\frac{\pi}{4} < \tau < \frac{\pi}{2}$，$I$ 是单位矩阵。

考虑以下方程：

$$F_\tau(D^2 u) = u - \frac{1}{2}\langle x, Du\rangle \tag{2.4}$$

其中 $\langle \cdot,\cdot \rangle$ 表示在 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积。

根据文献[9]中的定义，我们可以证明(2.4)式的全局解是伪欧氏空间中拉格朗日平均曲率流方程的自膨胀解。

定义 2.2 我们称 $u(x,t)$ 是方程(1.1)的自膨胀解，如果 $u(x,t)$ 是满足以下条件的解：

$$u(x,t) = tu\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right), \quad \forall t > 0 \tag{2.5}$$

命题 2.2 如果 $u(x,t)$ 是方程(1.1)的自膨胀解，那么 $u(x,1)$ 满足方程(2.4)。

证明 根据(1.1)和(2.5)，可以很容易地验证

$$\begin{aligned} F_\tau\left(D^2 u(x,t)\right) &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \\ &= u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) - \frac{1}{2}\left\langle Du\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right), \frac{x}{\sqrt{t}}\right\rangle \end{aligned} \tag{2.6}$$

取 $t = 1$，我们发现 $u(x,1)$ 满足方程(2.4)。

3. 定理 1.1 和 1.3 的证明

在本节中，我们将通过变换法证明定理 1.1 和 1.3。我们知道，当 $0 < \tau < \frac{\pi}{4}$ 时，

$$F_\tau(\lambda) = \frac{\sqrt{a^2+1}}{2b}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{\lambda_i + a - b}{\lambda_i + a + b} \tag{3.1}$$

接下来，通过构造函数，将方程(3.1)进行化简变形。我们考虑函数 $\psi(x)$，令

$$\psi(x) = \frac{b}{\sqrt{a^2+1}}u\left(\frac{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}{b}x\right) + \frac{a}{2b}\left|x^2\right| \tag{3.2}$$

函数$\psi(x)$对t求导，得

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}\frac{\partial}{\partial t}u\left(\frac{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}{b}x\right)+0=\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}F_\tau\left(D^2u\left(\frac{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}{b}x\right)\right)$$

函数$\psi(x)$对x求二阶导数，我们有

$$D^2\psi(x)=\frac{1}{b}D^2u\left(\frac{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}{b}x\right)+\frac{a}{b}I$$

记$\nu=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n)$是$D^2\psi$的特征值。

因为λ_i是D^2u的特征值，所以ν_i满足$\nu_i=\frac{\lambda_i+a}{b}$。

则函数ψ满足以下方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{\nu_i-1}{\nu_i+1}, & t>0,x\in\mathbb{R}^n\\ \psi=\psi_0(x), & t=0,x\in\mathbb{R}^n\end{cases}\tag{3.3}$$

且满足

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{\nu_i-1}{\nu_i+1}=\psi-\frac{1}{2}\langle x,D\psi\rangle\tag{3.4}$$

另一方面，根据(3.2)我们得到函数ψ的初值函数：

$$\psi_0(x)=\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}u_0\left(\frac{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}{b}x\right)+\frac{a}{2b}\left|x^2\right|$$

从而

$$D^2\psi_0(x)=\frac{1}{b}D^2u_0\left(\frac{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}{b}x\right)+\frac{a}{b}I$$

又因为

$$(b\mu-a)I\le D^2u_0\le(b\Lambda-a)I$$

从而得

$$\left(\mu-\frac{a}{b}\right)I\le\frac{1}{b}D^2u_0\left(\frac{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}{b}x\right)\le\left(\Lambda-\frac{a}{b}\right)I$$

于是有

$$\mu I\le D^2\psi_0(x)\le\Lambda I$$

接下来，我们利用 lewy-yuan 变换将方程(3.5)转换为蒙日安培方程。

我们记

$$\begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - D\psi), \\ \hat{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + D\psi). \end{cases} \tag{3.5}$$

因为 $\mathbb{R}^n$ 是单连通的，根据拉格朗日条件(在 $\frac{\pi}{4}$ 旋转下保持不变)，$\hat{y}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上某个全纯函数的梯度，我们记该函数为 $\hat{\psi}$，根据[10]，函数 $\hat{\psi}$ 可以写为：

$$\hat{\psi}(\hat{x}) = \psi(x) - \frac{1}{2}x \cdot D\psi(x) + \frac{|x|^2}{4} + \frac{|D\psi(x)|^2}{4} \tag{3.6}$$

则 $\hat{\psi}$ 对 x 求导得到

$$D\hat{\psi} = D\psi - \frac{1}{2}xD^2\psi - \frac{1}{2}D\psi(x) + \frac{|x|}{2} - \frac{1}{2}D^2\psi(x) \cdot D\psi(x)$$

因此，通过计算，我们有

$$D^2\hat{\psi}_0(\hat{x}) = (D^2\psi_0 - I)(D^2\psi_0 + I)^{-1} > 0$$

且满足

$$\hat{\psi} - \frac{1}{2}\langle \hat{x}, D\hat{\psi} \rangle = \psi - \frac{1}{2}\langle x, D\psi \rangle$$

因此，$\hat{\psi}$ 满足

$$\frac{1}{2}\ln\det D^2\hat{\psi} = \hat{\psi} - \frac{1}{2}\langle \hat{x}, D\hat{\psi} \rangle \tag{3.7}$$

所以 $\hat{\psi}$ 满足蒙日安培方程。

因此，根据文献[7]中的定理 1.1 和文献[11]中的定理 1.3，方程(3.9)具有长时间光滑解 $\hat{\psi}(\hat{x},t)$，且 $\hat{\psi}(\hat{x},t)$ 有高阶导数的衰减估计：$\sup_{x\to R^n}\left|D^l\hat{\psi}(\hat{x},t)\right| \le \frac{C_l}{t^{l-2}}$，其中 $l = \{3,4,5,\cdots\}$，对于 ψ 和 u 也是如此。进一步，定理 1.1 得以证明。同样地，根据文献[7]的结论，我们得出 u 满足：

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}u(\sqrt{t}x,t) = U(x,1)$$

其中 $U(x,1)$ 是方程(2.3)的光滑自膨胀解，这完成了定理 1.3 的证明。

4. 定理 1.2 和 1.4 的证明

在本节，我们通过变换法来证明定理 1.2 和定理 1.4，使得我们能够利用已知的结果。我们渴望将 $F_\tau(\lambda) = \frac{\sqrt{a^2+1}}{b}\sum_{i=1}^{n}\arctan\frac{\lambda_i + a - b}{\lambda_i + a + b}$ 转化为 $F_\tau(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\arctan\lambda_i$ 。

定理 1.2 证明 对于 $\frac{\pi}{4} < \tau < \frac{\pi}{2}$，Hessian 矩阵满足 $-(b + b\eta + a)I \le D^2u_0(x) \le (b + b\eta - a)I$，根据正切函数的差角公式，我们有

$$\arctan\frac{\lambda_i+a-b}{\lambda_i+a+b}=\arctan\frac{\lambda_i+a}{b}-\frac{\pi}{4} \tag{4.1}$$

令

$$\hat{u}(x)=\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}u\left(\frac{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}{b}x\right)+\frac{a}{2b}\left|x^2\right|-\frac{n\pi}{4} \tag{4.2}$$

随后，记 $\xi=\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right)$ 是 $D^2\hat{u}$ 的特征值，对 $\hat{u}$ 求关于 x 的二阶导数得到

$$D^2\hat{u}=\frac{1}{b}D^2u\left(\frac{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}{b}x\right)+\frac{a}{b}I$$

又因为 λ_i 是 D^2u 的特征值，所以 ξ_i 满足 $\xi_i=\frac{\lambda_i+a}{b}$。

根据参考文献[9]的结果，我们得到 $\hat{u}$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n}\arctan\xi_i=\hat{u}-\frac{1}{2}\langle x,D\hat{u}\rangle \tag{4.3}$$

又因为

$$F_\tau\left(D^2\hat{u}\right)=\hat{u}-\frac{1}{2}\langle x,D\hat{u}\rangle$$

所以，我们得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{u}}{\partial t}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\arctan\xi_i, & t>0,x\in\mathbb{R}^n\\ \hat{u}=\hat{u}_0(x), & t=0,x\in\mathbb{R}^n\end{cases} \tag{4.4}$$

方程(4.2)意味着

$$\hat{u}_0(x)=\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}u_0\left(\frac{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}{b}x\right)+\frac{a}{2b}\left|x^2\right|-\frac{n\pi}{4}$$

因此

$$D^2\hat{u}_0(x)=\frac{1}{b}D^2u_0\left(\frac{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}{b}x\right)+\frac{a}{b}I$$

由于

$$-\left(b+b\eta+a\right)I\le D^2u_0\le\left(b+b\eta-a\right)I$$

我们得出结论

$$-\left(1+\eta+\frac{a}{b}\right)I\le\frac{1}{b}D^2u_0\left(\frac{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}{b}x\right)\le\left(1+\eta-\frac{a}{b}\right)I$$

因此

$$-(1+\eta)I \le D^2\hat{u}_0 \le (1+\eta)I$$

根据文献[8]的定理 1.1，方程(4.4)有唯一的长时间光滑解 $\hat{u}(x,t)$，它满足衰减估计 $\sup_{x\to R^n}\left|D^l\hat{u}(x,t)\right| \le \frac{C_l}{t^{l-2}}$，其中 $t\in(\varepsilon_0,+\infty), l=\{3,4,5,\cdots\}$，同样地，$u$ 也满足，因此定理 1.2 得证。

为了得到定理 1.4，我们需要引入以下引理。

引理 4.1 假设 u_0 满足条件 A 和 L，那么 $u(x,t)$ 是方程(2.4)的光滑解。

证明 如果 u_0 满足条件 L，则由定理 1.2，当 $t>0$ 时，存在方程(1.6)唯一的光滑解 $u(x,t)$，其初始值为 u_0，显然得到

$$u_R(x,t) := R^{-2}u\left(Rx, R^2t\right)$$

是方程(1.6)的解，其初始值为 $u_R(x,0)$，根据条件 A，得

$$u_R(x,0) := R^{-2}u_0(Rx) = u_0(x)$$

由于 $u_R(x,0)=u_0$，定理 1.2 中的唯一性结果表明

$$u(x,t) = u_R(x,t)$$

对于任何 $R>0$ 成立。因此 $u(x,t)$ 满足(2.5)，因此 $u(x,1)$ 是方程(2.4)的解。即 $u(x,1)$ 是一个光滑的自膨胀解。

现在我们给出定理 1.4 的证明。

定理 1.4 证明 设

$$U_0(x) = \lim_{R\to\infty} R^{-2}u_0(Rx)$$

显然，$U(x,0)$ 满足条件 L。进一步地，我们得到

$$U_0(x) = \lim_{R\to\infty} R^{-2}u_0(Rx) = \lim_{R\to\infty} R^{-2}l^{-2}u_0(Rlx) = l^{-2}U_0(lx)$$

即 $U_0(x)$ 满足条件 A。根据引理 4.1，我们得到 $U(x,1)$ 是一个自膨胀解。

定义

$$u_R(x,t) := R^{-2}u\left(Rx, R^2t\right)$$

则 $u_R(x,t)$ 是方程(1.6)的解，其初始值为 $u_R(x,0)=R^{-2}u_0(Rx)$，满足条件 L。对于任意序列 $R_i\to+\infty$，我们考虑 $u_{R_i}(x,t)$ 的极限。对于 $t>0$，有

$$D^2u_{R_i}(x,t) = D^2u\left(R_ix, R_i^2t\right)$$

利用定理 1.2，我们得到

$$-(b+b\eta+a)I \le D^2u_{R_i}(x,t) \le (b+b\eta-a)I$$

对于所有 x 和 $t>0$ 成立。此外，根据定理 1.2 中的(1.9)，我们得到

$$\sup_{x\to R^n}\left|D^lu_{R_i}(\cdot,t)\right| \le C_l\sqrt{t}^{2-l}, \quad t\in(\varepsilon_0,+\infty), l=3,4,5,\cdots$$

对于任意 $m\ge1, l\ge0$，利用(1.6)，存在一个常数 $C(m,l,a,b,\eta)$，使得

$$\sup_{x\to R^n}\left|\frac{\partial^m}{\partial t^m}D^l u_{R_i}\right|\le C_l\sqrt{t}^{2-l-2m},\quad t\in(\varepsilon_0,+\infty),l=3,4,5,\cdots$$

我们注意到

$$u_{R_i}=R_i^{-2}u_0$$

$$D^2u_{R_i}(0,0)=R_i^{-1}Du_0(0)$$

都是有界的。因此$u_{R_i}(0,t)$和$Du_{R_i}(0,t)$对任何固定的t都有界。根据 Arzelà-Ascoli 定理，存在一个子序列$\{R_{k_i}\}$，使得$u_{R_{k_i}}(x,t)$在$\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$的任何紧支集上一致收敛到方程(1.6)的解$\tilde{U}(x,t)$，并且$\tilde{U}(x,t)$满足定理 1.2 中的估计。由于$\frac{\partial\tilde{U}}{\partial t}$对任何$t>0$都是一致有界的，当$t\to 0$时，$\tilde{U}(x,t)$收敛到函数$\tilde{U}_0(x)$接下来，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{U}_0(x)&=\lim_{t\to 0}\tilde{U}(x,t)\\&=\lim_{t\to 0}\lim_{i\to+\infty}R_i^{-2}u\left(R_ix,R_i^2t\right)\\&=\lim_{i\to+\infty}\lim_{t\to 0}R_i^{-2}u\left(R_ix,R_i^2t\right)\\&=\lim_{i\to+\infty}R_i^{-2}u_0(R_ix)\\&=U_0(x)\end{aligned}$$

根据唯一性结果，上述极限与子序列$\{R_i\}$的选择无关，并且

$$\tilde{U}(x,t)=U(x,t)$$

特别地，令$R=\sqrt{t}$，我们得到当$t\to+\infty$时，$t^{-1}u\left(\sqrt{t}x,t\right)$在$\mathbb{R}^n$的任何紧支集上光滑且一致收敛$U(x,1)$。

基金项目

国家自然科学基金(No. 11771103)。

参考文献

[1] Chen, J.Y. and Li, J.Y. (2004) Singularity of Mean Curvature Flow of Lagrangian Submanifolds. *Inventiones Mathematicae*, **156**, 25-51. https://doi.org/10.1007/s00222-003-0332-5

[2] Neves, A. (2013) Finite Time Singularities for Lagrangian Mean Curvature Flow. *Annals of Mathematics*, **177**, 1029-1076. https://doi.org/10.4007/annals.2013.177.3.5

[3] Wang, M.T. (2002) Long-Time Existence and Convergence of Graphic Mean Curvature Flow in Arbitrary Codimension. *Inventiones Mathematicae*, **48**, 525-543. https://doi.org/10.1007/s002220100201

[4] Smoczyk, K. and Wang, M.T. (2002) Mean Curvature Flows of Lagrangian Submanifolds with Convex Potentials. *Journal of Differential Geometry*, **62**, 243-257. https://doi.org/10.4310/jdg/1090950193

[5] Smoczyk, K. (2004) Longtime Existence of the Lagrangian Mean Curvature Flow. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **20**, 25-46. https://doi.org/10.1007/s00526-003-0226-9

[6] Chau, A., Chen, J.Y. and He, W.L. (2009) Entire Self-Similar Solutions to Lagrangian Mean Curvature Flow. arXiv: 0905.3869.

[7] Huang, R.L. (2011) Lagrangian Mean Curvature Flow in Pseudo-Euclidean Space. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, **32**, 187-200. https://doi.org/10.1007/s11401-011-0639-2

[8] Chau, A., Chen, J.Y. and Yuan. Y. (2013) Lagrangian Mean Curvature Flow for Entire Lipschitz Graphs. *Mathematische Annalen*, **357**, 165-183. https://doi.org/10.1007/s00208-013-0897-2

[9] Huang, R.L., Ou, Q.Z. and Wang, W.L. (2022) On the Entire Self-Shrinking Solutions to Lagrangian Mean Curvature Flow II. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **61**, Article No. 225.

https://doi.org/10.1007/s00526-022-02333-1

[10] Warren, M. (2016) A Liouville Property for Gradient Graphs and a Bernstein Problem for Hamiltonian Stationary Equations. *Manuscripta Mathematica*, **150**, 151-157. https://doi.org/10.1007/s00229-015-0801-3

[11] Huang, R.L. and Wang, Z.Z. (2011) On the Entire Self-Shrinking Solutions to Lagrangian Mean Curvature Flow. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **41**, 321-339. https://doi.org/10.1007/s00526-010-0364-9