

Heisenberg群上p-次Laplace方程的Liouville定理

李 贺¹, 王新敬^{1,2*}, 尤德辉¹

¹黄淮学院数学与统计学院, 河南 驻马店

²驻马店市生物医药防治与数据模型重点实验室, 河南 驻马店

收稿日期: 2025年2月14日; 录用日期: 2025年3月7日; 发布日期: 2025年3月17日

摘 要

针对Heisenberg群上p-次Laplace方程, 建立其弱解的Liouville型定理, 证明过程主要基于Moser迭代技巧和弱解的正则性结果。

关键词

p-次Laplace方程, Moser迭代技巧, Liouville定理

Liouville Theorem for p-Sub-Laplacian Equation on the Heisenberg Group

He Li¹, Xinjing Wang^{1,2*}, Dehui You¹

¹School of Mathematics and Statistics, Huanghuai University, Zhumadian Henan

²Zhumadian Key Laboratory of Biomedical Prevention and Data Modeling, Zhumadian Henan

Received: Feb. 14th, 2025; accepted: Mar. 7th, 2025; published: Mar. 17th, 2025

Abstract

In this paper, we give a Liouville type theorem for the weak solution of the p-sub-Laplacian equation on the Heisenberg group. The proof process relies on Moser iterative techniques and the regularity results of weak solutions.

*通讯作者。

文章引用: 李贺, 王新敬, 尤德辉. Heisenberg 群上 p-次 Laplace 方程的 Liouville 定理[J]. 理论数学, 2025, 15(3): 189-195. DOI: 10.12677/pm.2025.153092

Keywords

p-Sub-Laplacian Equation, Moser Iterative Techniques, Liouville Theorem

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Liouville 定理是十九世纪的法国著名数学家刘维尔给出的一个重要结果，它在复分析、微分方程中都有出现。Liouville 定理作为数学学科的重要基本定理之一，有着较为广泛的应用，它可以直接或间接的推导出很多其他结论，如代数学基本定理，复平面上最大模原理等重要定理。偏微分方程求解过程中，基于先验估计或者拓扑度理论等来证明方程解的存在性时，对应方程解的 Liouville 型定理是重要内容。此外，Liouville 定理还在物理学中也有应用，在经典统计力学和 Hamilton 力学中，类似地，它断言相空间的分布函数沿系统轨迹是恒定的。偏微分方程中经典的 Liouville 定理表述为：

若定义在整个平面上的调和函数是有界的，则它必定为一个常数。

Heisenberg 群在数学和物理学中，特别是在非交换几何和量子力学领域中，扮演着重要角色。Heisenberg 群是一个具有非平凡中心的幂零李群，其几何结构具有非欧几何的特性。经典 Laplace 方程在电磁学、热传导、波动方程等领域中有广泛应用，而 Heisenberg 群上的 p-次 Laplace 方程则更多地应用于描述非线性扩散过程、图像处理、渗流问题等领域。与经典欧氏空间场景下的线性 Laplace 方程相比，p-次 Laplace 方程具有退化非线性，这种退化非线性特性使得其解的性质更加复杂和多样。Heisenberg 群上的 Liouville 型定理的研究有助于深化对非欧几何结构的理解，也可以为量子力学中的某些粒子的运动状态和能量分布问题提供相应的数学理论支持。

Birindelli 和 Demengel 在文献[1]中研究了 Heisenberg 群上的半线性退化椭圆方程，证明该方程有界弱解的 Liouville 型定理。文献[2]-[5]还研究了欧氏空间、黎曼流形和 Heisenberg 群等不同空间中的对应调和问题的 Liouville 型定理。受文献[1]-[5]中的研究方法启发，基于文献[6][9][10]中 p-调和问题的正则性结果，本文研究 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上含 p-次 Laplace 算子的问题，建立 $\mathbb{H}^n$ 上 p-次 Laplace 方程

$$-\Delta_{p,\mathbb{H}} u = -\operatorname{div}_{\mathbb{H}} \left(|\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}} u \right) = 0 \quad (1)$$

弱解的 Liouville 定理。

2. 准备知识

Heisenberg 群以及 Heisenberg 群上的次 Laplace 算子和 p-次 Laplace 算子的有关内容。

Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^{2n+1}$ ($n \geq 1$) 赋予群作用 $\circ$ 的分层幂零 Lie 群，定义其群作用 $\circ$ 为

$$\xi_0 \circ \xi = \left(x + x_0, y + y_0, t + t_0 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i y_{i_0} - y_i x_{i_0}) \right),$$

其中 $\xi = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) := (x, y, t)$ 和 $\xi_0 = (x_0, y_0, t_0)$ 。

$\mathbb{H}^n$ 上的左不变向量场的 Lie 代数的定义形式为：

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$T = \frac{\partial}{\partial t}.$$

任意函数 u 对应的 Heisenberg 梯度为,

$$\nabla_{\mathbb{H}} u = (X_i u, Y_i u), \quad i = 1, \dots, n,$$

为了方便有时也记 $(Y_1, \dots, Y_n) = (X_{n+1}, \dots, X_{2n})$, 其相应的散度的定义为,

$$\operatorname{div}_{\mathbb{H}}(V_1, \dots, V_{2n}) = X_1 V_1 + \dots + X_n V_n + X_{n+1} V_{n+1} + \dots + X_{2n} V_{2n}.$$

$\mathbb{H}^n$ 上的次 Laplace 算子 $\Delta_{\mathbb{H}}$ 其定义式表示为,

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^n X_i^2 + Y_i^2.$$

同样地, $\mathbb{H}^n$ 上的 p -次 Laplace 定义形式为,

$$-\Delta_{p, \mathbb{H}} u = -\operatorname{div}_{\mathbb{H}}(|\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}} u).$$

上述左不变向量场 X_i 和 Y_i 满足 Lie 括号, 即有

$$[X_i, Y_j] = -4T\delta_{ij}, [X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = 0, (i, j \in 1, \dots, n).$$

文献[8]中提到 Hörmander 条件[7]对于左不变向量场 $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\}$ 是成立的, 这就表明算子 $\Delta_{\mathbb{H}}$ 是退化椭圆算子, 同样 p -次 Laplace 算子也具有退化性。

记常数 $Q = 2n + 2$ 是 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 的齐次维数, 文献[8]中记 $|\xi|_{\mathbb{H}}$ 为任意点 ξ 到坐标原点的距离为, 定义为

$$\rho = |\xi|_{\mathbb{H}} = \left(\sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) + t^2 \right)^{\frac{1}{4}},$$

则, $\mathbb{H}^n$ 上任意两点 ξ 和 η 之间的距离, 可记为

$$d_{\mathbb{H}}(\xi, \eta) = |\eta^{-1} \circ \xi|_{\mathbb{H}}.$$

以某点 ξ_0 为中心, $R > 0$ 为半径的 Heisenberg 球可表示为,

$$B_{\mathbb{H}}(\xi_0, R) = \{\eta \in \mathbb{H}^n \mid d_{\mathbb{H}}(\eta, \xi_0) < R\}.$$

由幂零 Lie 群上的群伸缩 $\delta_\lambda(\xi) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 t)$, 易知 $\xi \rightarrow |\xi|_{\mathbb{H}}$ 是一次齐次的, 则有

$$|B_{\mathbb{H}}(\xi_0, R)| = |B_{\mathbb{H}}(0, 1)| R^Q,$$

这里 $|\cdot|$ 是欧氏空间中常规的 Lebesgue 测度。

3. 主要结果和证明

首先, 引进证明主要定理过程中使用的迭代公式(可见参考文献[1][5]). 说明: 不同的常数 C 在不同的引理和定理中相互独立。

引理 1 若给定序列 ϕ_n 满足不等式 $\phi_n \leq C^n \phi_{n-1}^k$, 则有 $\phi_n^{k^{-n}} \leq C^{\frac{k}{(k-1)^2}} \phi_0$, 其中 $C > 0$, $k > 0$ 为常数。

证明: 根据序列 ϕ_n 的假设条件, 作如下迭代

$$\phi_n \leq C^n \phi_{n-1}^k \leq C^{n+k(n-1)} \phi_{n-2}^{k^2} \leq \dots \leq C^{\sum_{p=0}^{n-1} (n-p)k^p} \phi_0^{k^n},$$

易知,

$$\sum_{p=0}^{n-1} (n-p)k^p = \frac{k^{n+1} - nk - k - n}{(k-1)^2},$$

则,

$$\phi_n^{k^{-n}} \leq C^{\frac{k^{n+1}}{(k+1)^2 k^n}} \phi_0 \leq C^{\frac{k}{(k-1)^2}} \phi_0.$$

其次, 建立 p -次 Laplace 方程弱解的估计。

引理 2 如果 u 为方程(1)的弱解, 则对所有的正常数 $\lambda \geq 1$, R 和 σ , 存在正常数 C 使得

$$\int_{B_R(0)} \left| \nabla_{\mathbb{H}} \left(|\nabla_{\mathbb{H}} u|^{\frac{p+\lambda}{2}} \right) \right|^2 d\xi \leq \frac{C}{\sigma^2} \int_{B_{R+\sigma}(0)} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p+\lambda} d\xi.$$

特别地, 对所有的正整数 k, n , 有

$$\int_{B_R(0)} \left| \nabla_{\mathbb{H}} \left(|\nabla_{\mathbb{H}} u|^{\frac{pk^{n-1}}{2}} \right) \right|^2 d\xi \leq \frac{C}{\sigma^2} \int_{B_{R+\sigma}(0)} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{pk^{n-1}} d\xi.$$

证明: 取球 $B_{R+\sigma}(0)$ 上的光滑截断函数 $0 \leq \zeta \leq 1$, ζ 在球 $B_R(0)$ 内取值为 1, 在球 $B_{R+\sigma}(0)$ 外取值为零, 且满足 $|\nabla_{\mathbb{H}} \zeta| \leq \frac{C}{\sigma}$ 。

首先, 把左不变向量场 X_k 作用在方程(1)上; 然后, 乘以试验函数 $|X_k u|^{\lambda} X_k u \zeta^2$ ($j, k = 1, 2, \dots, 2n$); 最后, 对其在有界区域 $B_{R+\sigma}$ 上做积分, 可得

$$\begin{aligned} & \int_{B_{R+\sigma}} X_k \left(|\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p-2} X_j u \right) X_j \left(|X_k u|^{\lambda} X_k u \zeta^2 \right) d\xi \\ &= (\lambda+1) \int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p-2} \left(X_k (X_j u) \right)^2 |X_k u|^{\lambda} \zeta^2 d\xi \\ &+ (p-2)(\lambda+1) \int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p-4} \left(\nabla_{\mathbb{H}} u \cdot \nabla_{\mathbb{H}} (X_k u) \right)^2 |X_k u|^{\lambda} \zeta^2 d\xi \\ &+ \int_{B_{R+\sigma}} 2 |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p-2} X_k u X_j (X_k u) |X_k u|^{\lambda} \zeta X_j \zeta d\xi \\ &+ (p-2) \int_{B_{R+\sigma}} 2 |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p-4} \left(\nabla_{\mathbb{H}} u \cdot \nabla_{\mathbb{H}} (X_k u) \right) |X_k u|^{\lambda} X_k u X_j u \zeta X_j \zeta d\xi. \end{aligned}$$

由于 $p > 1$, 下面对于指标 k 来求和, 借助于 Schwarz 和 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned} & (\lambda+1)(p-1) \int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p+\lambda-2} |\nabla_{\mathbb{H}} (\nabla_{\mathbb{H}} u)|^2 \zeta^2 d\xi \\ &= 2(p-1) \int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p+\lambda-1} |\nabla_{\mathbb{H}} (\nabla_{\mathbb{H}} u)| \zeta |\nabla_{\mathbb{H}} \zeta| d\xi \\ &\leq \frac{(\lambda+1)(p-1)}{2} \int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p+\lambda-2} |\nabla_{\mathbb{H}} (\nabla_{\mathbb{H}} u)|^2 \zeta^2 d\xi \\ &+ \frac{C}{\lambda+1} \int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p+\lambda} |\nabla_{\mathbb{H}} \zeta|^2 d\xi. \end{aligned} \tag{2}$$

由(2)式, 进而可以得到

$$\begin{aligned}
& \int_{B_R} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p+\lambda-2} |\nabla_{\mathbb{H}} (\nabla_{\mathbb{H}} u)|^2 d\xi \\
& \leq \int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p+\lambda-2} |\nabla_{\mathbb{H}} (\nabla_{\mathbb{H}} u)|^2 \zeta^2 d\xi \\
& \leq \frac{C}{(\lambda+1)^2 \sigma^2} \int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p+\lambda} d\xi.
\end{aligned}$$

容易知道,

$$\frac{4}{(p+\lambda)^2} \int_{B_R} \left| \nabla_{\mathbb{H}} \left(|\nabla_{\mathbb{H}} u|^{\frac{p+\lambda}{2}} \right) \right|^2 d\xi \leq \frac{C}{(\lambda+1)^2 \sigma^2} \int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p+\lambda} d\xi. \quad (3)$$

特别的, 若在(3)中取 $\lambda = pk^{n-1} - p$, 对所有的正整数 k, n , 则有

$$\int_{B_R(0)} \left| \nabla_{\mathbb{H}} \left(|\nabla_{\mathbb{H}} u|^{\frac{pk^{n-1}}{2}} \right) \right|^2 d\xi \leq \frac{C}{\sigma^2} \int_{B_{R+\sigma}(0)} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{pk^{n-1}} d\xi.$$

最后, 证明本文的主要定理。

定理 3 若 u 为 $\mathbb{H}^n$ 上方程(1)的有界弱解, 则 u 必定为常数。

证明: 当指标 $k \leq \frac{Q}{Q-p}$ 时, 借助于 Sobolev 嵌入定理和 Poincaré 不等式, 可以知道, 存在仅依赖于常数 Q 和 p 的正常数 C , 使得对任意的 R 和 $w \in H_{loc}^1(\mathbb{H}^n)$, 有

$$\left(\frac{1}{R^Q} \int_{B_R} |w|^{2k} d\xi \right)^{\frac{1}{k}} \leq C \left(\frac{1}{R^{Q-2}} \int_{B_R} |\nabla_{\mathbb{H}} w|^2 d\xi + \frac{1}{R^Q} \int_{B_R} |w|^2 d\xi \right).$$

特别的, 令 $w = |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{\frac{pk^n}{2}}$ 代入上式, 由引理 2, 知道

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{R^Q} \int_{B_R} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{pk^n} d\xi \right)^{\frac{1}{k}} \\
& \leq C \left(\frac{1}{R^{Q-2}} \int_{B_R} \left| \nabla_{\mathbb{H}} \left(|\nabla_{\mathbb{H}} u|^{\frac{pk^{n-1}}{2}} \right) \right|^2 d\xi + \frac{1}{R^Q} \int_{B_R} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{pk^{n-1}} d\xi \right) \\
& \leq C \frac{1}{R^Q} \left(1 + \frac{R^2}{\sigma^2} \right) \int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{pk^{n-1}} d\xi \\
& \leq C \left(1 + \frac{R^2}{\sigma^2} \right) \left(\frac{R+\sigma}{R} \right)^Q \int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{pk^{n-1}} d\xi.
\end{aligned} \quad (4)$$

取序列 $\rho_m = r \left(1 + \frac{1}{2^m} \right)$, 则其满足 $\rho_{m-1} \leq 2\rho_m$ 。定义序列 $\phi_m = \left(\frac{1}{\rho_m^Q} \int_{B_{\rho_m}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{pk^n} d\xi \right)^{\frac{1}{k}}$, 在不等式(4)中取

$R = \rho_m$, $\sigma = \rho_{m-1} - \rho_m$, 则有

$$\phi_m \leq C \left(1 + \left(\frac{\rho_m}{\rho_{m-1} - \rho_m} \right)^2 \right) \phi_{m-1}^k.$$

由不等式 $1 + \left(\frac{\rho_m}{\rho_{m-1} - \rho_m} \right)^2 = 1 + (2^m + 1)^2 \leq 5^m$, 得到

$$\phi_m \leq C 5^m \phi_{m-1}^k. \quad (5)$$

由(4)和(5), 结合引理 1, 可以看出

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \phi_m^{\frac{1}{k^m}} \leq C \phi_0 \leq C \frac{1}{(2r)^n} \int_{B_{2r}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^p d\xi. \quad (6)$$

利用文献[9] [10]中的 p -次调和方程解的正则性结果, 容易知道, 方程(1)的弱解 $u \in C^1(\mathbb{H}^n)$, 且当 $p < 2$ 时, $u \in W_{loc}^{2,p}$; 当 $p \geq 2$ 时, $u \in W_{loc}^{2,2}$. 方程(1)两边乘以试验函数 $u\zeta^p$, 在有界区域 $B_{R+\sigma}$ 上做积分, 得到

$$\begin{aligned} & - \int_{B_{R+\sigma}} \operatorname{div}_{\mathbb{H}} (|\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}} u) u \zeta^p d\xi \\ &= \int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p-2} \nabla_{\mathbb{H}} u \cdot (\nabla_{\mathbb{H}} u \zeta^p + p u \zeta^{p-1} \nabla_{\mathbb{H}} \zeta) d\xi \\ &= 0, \end{aligned}$$

这里 ζ 是上述引理 2 中引入的截断函数。利用 Hölder 不等式, 即有

$$\begin{aligned} & \int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^p \zeta^p d\xi \\ &= -p \int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^{p-2} u \zeta^{p-1} \nabla_{\mathbb{H}} u \cdot \nabla_{\mathbb{H}} \zeta d\xi \\ &\leq p \left(\int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^p \zeta^p d\xi \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B_{R+\sigma}} u^p |\nabla_{\mathbb{H}} \zeta|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

因此, 证得

$$\int_{B_R} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^p d\xi \leq \int_{B_{R+\sigma}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^p \zeta^p d\xi \leq \frac{C}{\sigma^p} \int_{B_{R+\sigma}} |u|^p d\xi$$

由于 u 是有界函数, 当 ξ 足够大时, 由(6)和上式知, $\nabla_{\mathbb{H}} u = 0$, 也即, u 必定为常数。

4. 结语

本文利用 Moser 迭代技巧, 建立了 Heisenberg 群上 p -次 Laplace 方程的有界弱解的 Liouville 型定理, 该结果是对经典的欧式空间中 p -Laplace 方程 Liouville 定理的推广, 这对于解决更广泛的空间(如 Carnot 群, 向量场等)上该类型问题具有一定的借鉴意义。

致 谢

感谢黄淮学院第五批青年骨干教师的资助。

参考文献

- [1] Birindelli, I., Capuzzo Dolcetta, I. and Cutrì, A. (1997) Liouville Theorems for Semilinear Equations on the Heisenberg Group. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **14**, 295-308. [https://doi.org/10.1016/s0294-1449\(97\)80138-2](https://doi.org/10.1016/s0294-1449(97)80138-2)
- [2] 周俞洁, 张泽宇, 王林峰. 黎曼流形上 p -Laplace 算子的 Liouville 定理[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(10): 62-68.
- [3] Birindelli, I. and Demengel, F. (2002) Some Liouville Theorems for the p -Laplacian. *Electronic Journal of Differential Equations*, **8**, 35-46. <http://ejde.math.unt.edu>
- [4] 王新敬. p -调和方程在次线性增长下的 Liouville 定理[J]. 西安工业大学学报, 2018, 38(3): 189-191.
- [5] 王新敬, 张姗姗. Heisenberg 群上次 Laplace 方程在次线性增长下的 Liouville 定理[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(8): 97-101.

-
- [6] Liu, H. and Niu P. (2007) Growth Estimates to Subelliptic-Laplace Equations on Heisenberg Group. *Journal of University of Chinese Academy of Sciences*, **24**, 18-24. <https://doi.org/10.7523/j.issn.2095-6134.2007.1.003>
 - [7] Hörmander, L. (1967) Hypoelliptic Second Order Differential Equations. *Acta Mathematica*, **119**, 147-171. <https://doi.org/10.1007/bf02392081>
 - [8] Folland, G.B. (1973) A Fundamental Solution for a Subelliptic Operator. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **79**, 373-376. <https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1973-13171-4>
 - [9] Domokos, A. (2004) On the Regularity of P-Harmonic Functions in the Heisenberg Group. Doctoral Dissertation, University of Pittsburgh. <https://d-scholarship.pitt.edu/id/eprint/7962>
 - [10] Zheng, S. and Feng, Z. (2015) Regularity of Subelliptic P-Harmonic Systems with Subcritical Growth in Carnot Group. *Journal of Differential Equations*, **258**, 2471-2494. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.12.020>