Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(3), 196-202
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.153093

傅里叶级数及其在信号处理领域的应用

刘　帅[1*]，陈永玲[1]，王立成[2]

[1]上海理工大学理学院，上海
[2]上海电力大学自动化工程学院，上海

收稿日期：2025年2月13日；录用日期：2025年3月8日；发布日期：2025年3月17日

摘　要

傅里叶级数作为一种重要的数学工具，能够将周期函数分解为一系列正弦和余弦函数的线性组合，从而揭示信号的频域特性。本文首先介绍了傅里叶级数的数学定义及其展开形式，详细推导了傅里叶系数的计算公式，并阐述了其理论基础。随后，重点探讨了傅里叶级数在信号处理领域的应用，包括频谱分析、信号滤波和信号重构等方面。通过具体实例，展示了傅里叶级数在音频信号处理、图像处理以及通信系统中的实际应用。研究结果表明，傅里叶级数不仅是理论分析的有力工具，也在实际工程问题中具有广泛的应用价值，为信号处理技术的发展提供了重要的数学支持。

关键词

傅里叶级数，周期函数，信号处理，频域分析

Fourier Series and Its Application in Signal Processing

Shuai Liu[1*], Yongling Chen[1], Licheng Wang[2]

[1]College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
[2]College of Automation Engineering, Shanghai University of Electric Power, Shanghai

Received: Feb. 13th, 2025; accepted: Mar. 8th, 2025; published: Mar. 17th, 2025

Abstract

As an important mathematical tool, Fourier series can decompose periodic functions into a linear combination of sine and cosine functions, thereby revealing the frequency-domain characteristics of signals. This paper first introduces the mathematical definition and expansion form of Fourier series, derives the calculation formulas for Fourier coefficients in detail, and elaborates on its theoretical foundation. Subsequently, it focuses on the application of Fourier series in the field of signal

*通讯作者。

文章引用: 刘帅, 陈永玲, 王立成. 傅里叶级数及其在信号处理领域的应用[J]. 理论数学, 2025, 15(3): 196-202.
DOI: 10.12677/pm.2025.153093

processing, including spectrum analysis, signal filtering, and signal reconstruction. Through specific examples, the practical applications of Fourier series in audio signal processing, image processing, and communication systems are demonstrated. The research results show that Fourier series is not only a powerful tool for theoretical analysis but also has extensive application value in practical engineering problems, providing crucial mathematical support for the development of signal processing technologies.

Keywords

Fourier Series, Periodic Functions, Signal Processing, Frequency-Domain Analysis

1. 傅里叶级数的起源与发展

傅里叶级数的提出和发展是数学史上的一个重要里程碑，其起源可以追溯到法国数学家约瑟夫·傅里叶(Joseph Fourier)在 19 世纪初对热传导问题的研究。傅里叶在研究热传导现象时，发现这一物理过程可以通过偏微分方程来描述。在求解这一方程的过程中，他提出了一个革命性的思想：任何周期函数都可以表示为一系列正弦和余弦函数的无穷级数之和，这些正弦和余弦函数按照频率的倍数排列。傅里叶选择正弦和余弦函数作为基函数，是因为它们在数学上具有正交性，即不同频率的正弦和余弦函数相互独立，能够为周期函数的表示提供独特的贡献。1807 年，傅里叶向巴黎科学院提交了他的论文《热的传播》，首次公开了他的级数理论，并展示了如何利用这一理论求解热传导方程。尽管傅里叶的理论最初受到了一些数学家的质疑，特别是拉格朗日对其表示所有函数的能力持怀疑态度，但随着时间的推移，傅里叶级数逐渐被接受，并得到了进一步的发展和完善。

傅里叶级数最初是针对周期函数的，但后来被推广到非周期函数，形成了傅里叶变换这一重要工具。傅里叶变换不仅在数学理论上具有重要意义，还成为信号处理、图像分析、量子物理等领域的核心技术。例如，在信号处理中，傅里叶变换被用于将时域信号转换为频域信号，从而分析信号的频率成分；在图像处理中，傅里叶变换被用于图像压缩和滤波；在量子力学中，波函数的分析也依赖于傅里叶变换。此外，快速傅里叶变换(FFT)算法的提出，进一步提高了傅里叶变换的计算效率，使其在实时信号处理和现代通信技术中得以广泛应用。

傅里叶的工作不仅是数学理论的创新，更是数学与实际问题相结合的典范。他从热传导问题中抽象出数学模型，提出了傅里叶级数，这一过程展示了数学理论如何从实际问题中诞生并推动科学进步。傅里叶级数的提出，特别是对不连续函数的表示，促使数学家重新审视函数的概念，推动了函数空间和收敛性质的研究，为泛函分析和拓扑学的发展奠定了基础。此外，傅里叶级数的收敛性问题也与集合论的诞生密切相关，特别是在处理无穷集合和无穷级数时的严谨性问题上，傅里叶的理论为现代数学分析提供了重要的启示。

在中国，程民德教授等学者对多元三角级数和多元傅里叶级数的研究，进一步扩展了傅里叶级数的应用范围，并在数学上证明了一些重要定理，为这一领域的发展作出了重要贡献。傅里叶级数和傅里叶变换不仅在数学理论中占据重要地位，还在现代科学技术中发挥着不可替代的作用。从信号处理到图像分析，从量子物理到通信工程，傅里叶的理论展示了数学在解决实际问题中的巨大潜力。他的工作不仅

推动了数学本身的发展[1] [2]，也为物理学、工程学等多个学科领域提供了强有力的工具，深刻影响了现代科学技术的进步[3] [4]。傅里叶级数的历史背景和应用发展，充分体现了数学理论与实际问题的紧密联系，以及数学在科学探索和技术创新中的核心价值。

2. 傅里叶系数与傅里叶级数

问题 1：若周期为 2π 的函数可以表示为形式

$$f\left(x\right)=A+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \tag{1}$$

如何确定系数 a_n 和 b_n？

(1) 证明正交性

定理：三角函数系 $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上正交，即其中任意不同的两个函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于零。

证明：$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\mathrm{d}x=0\left(n=1,2,\cdots\right)$，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left(k+n\right)x\cdot\cos\left(k-n\right)x\right]\mathrm{d}x=0\ \left(k\neq n\right).$$

同理可证，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\sin nx\mathrm{d}x=0\ \left(k\neq n\right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\sin nx\mathrm{d}x=0\ \left(k\neq n\right).$$

但是在三角函数系中两个相同的函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分不为 0，且有

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2\mathrm{d}x=2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\mathrm{d}x=\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x=\pi.$$

(2) 系数的确定

对(1)式左右两侧同时在区间 $[-\pi,\pi]$ 上取积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}A\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\right]\mathrm{d}x$$

得到

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

同理，在式(1)的左右两侧同时乘以 $\cos nx$，并在区间 $[-\pi,\pi]$ 上取积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x=a_n\pi$$

所以

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x\ \left(n=0,1,2,\cdots\right)$$

当 $n=0$ 时，得

$$A=\frac{a_0}{2}.$$

同理可得 b_n。因此有

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\ \ (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\ \ (n=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{2}$$

由式(2)确定的系数称为 $f(x)$ 的傅里叶系数，称由傅里叶系数写出的如下级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为傅里叶级数。

问题 2：以上结论推广至周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

其傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\ \ (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\ \ (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

问题 3： $f(x)$ 的傅里叶级数是否一定收敛？如果它收敛，它是否一定收敛于 $f(x)$？

定理(收敛定理，狄利克雷(Dirichlet)充分条件)设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

(1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，

(2) 在一个周期内至多有有限个极值点，

那么 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$；

当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right]$；

例：将周期为 2π 的函数 $f(x)=x^2, x\in[-\pi,\pi]$ 展开成傅里叶级数，并给出其和函数。

解：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{n}\mathrm{d}\sin nx=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

由对称性知， $b_n=0$。所以

$$f(x)=\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx.$$

例：设 $f(x)=-x, x\in[-\pi,\pi)$，且 $f(x)$ 以 2π 为周期，将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数。

解：因为 $f(x)=-x$ 为奇函数，所以 $a_n=0$ 且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n}(-1)^n$$

因此有当 $x\neq(2k+1)\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^n\sin nx.$$

当 $x=(2k+1)\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，级数收敛于 $\frac{-\pi+\pi}{2}=0$。

3. 傅里叶变换在信号处理领域的应用

傅里叶变换是信号处理领域中最核心的数学工具之一，它通过将信号从时域转换到频域，为分析和处理信号提供了全新的视角。无论是在通信、音频处理、图像处理，还是在雷达、医学信号分析等领域[5] [6]，傅里叶变换都发挥着不可替代的作用，图 1 为傅里叶变换在信号处理领域的应用。接下来将详细叙述傅里叶变换在信号处理中的主要应用。

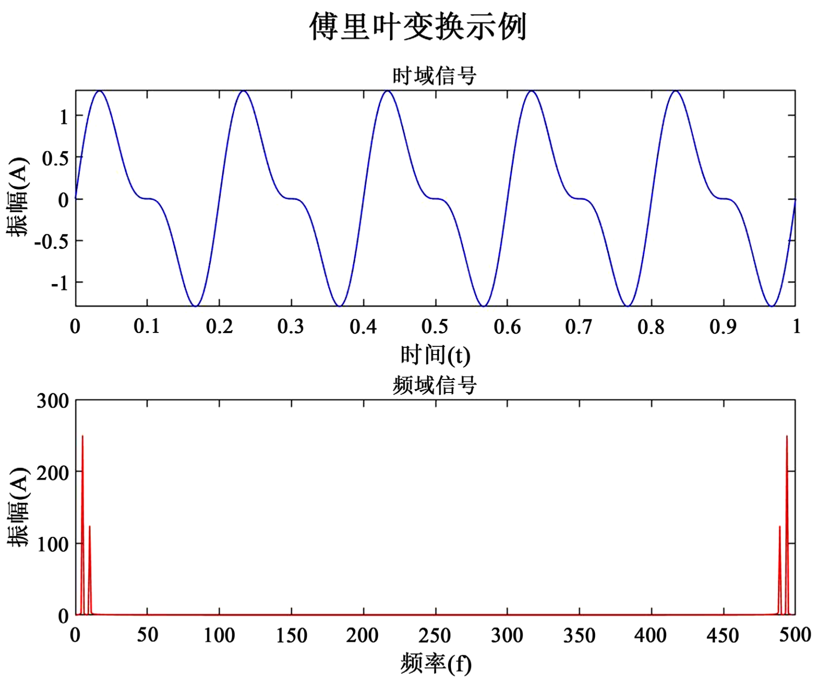

Figure 1. The application of Fourier transform in the field of signal processing
图 1. 傅里叶变化在信号处理领域的应用

1) 频谱分析

频谱分析是傅里叶变换最直接的应用之一。许多信号在时域中可能显得杂乱无章，但通过傅里叶变换，可以将其分解为不同频率的正弦波分量，从而清晰地观察到信号的频率成分。例如，在音频处理中，一段音乐信号可以通过傅里叶变换分解为不同频率的音调，帮助我们分析其频谱特性。在通信领域，频谱分析用于检测信号的带宽和频率分布，确保信号能够高效传输。在信号处理中，傅里叶级数被广泛用于分析周期性信号的频率成分。例如，假设我们有一个周期为 T 的音频信号 $f(t)$，我们希望了解该信号中包含哪些频率成分。应用步骤：

a) 信号表示：将音频信号 $f(t)$ 表示为傅里叶级数：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right)$$

b) 计算系数：通过傅里叶系数公式计算 a_n 和 b_n：

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t$$

c) 频谱分析：通过系数 a_n 和 b_n，可以得到信号中各个频率成分的幅值。例如，频率为 $\frac{n}{T}$ 的成分的幅值为 $\sqrt{a_n^2+b_n^2}$。

2) 图像处理中的频域滤波

滤波是信号处理中的一项基本操作，目的是去除信号中的噪声或不需要的频率成分。傅里叶变换将信号从时域转换到频域后，可以方便地设计滤波器。例如，低通滤波器可以保留低频成分而去除高频噪声，高通滤波器则相反。在图像处理中，傅里叶变换可以用于设计频域滤波器，去除图像中的噪声或增强某些特征。在图像处理中，傅里叶变换(傅里叶级数的推广)被用于频域滤波。例如，我们可以通过傅里叶变换将图像从空间域转换到频域，进行滤波后再转换回空间域。频域滤波可以用于图像去噪、边缘增强等任务。例如，低通滤波器可以平滑图像，而高通滤波器可以突出图像的边缘。应用步骤：

a) 傅里叶变换：对图像 $f(x,y)$ 进行二维傅里叶变换，得到频域表示 $F(u,v)$：

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{e}^{-ax(ux+n)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

b) 频域滤波：在频域中设计滤波器 $H(u,v)$，例如低通滤波器(保留低频成分)或高通滤波器(保留高频成分)。

c) 逆傅里叶变换：将滤波后的频域信号 $G(u,v)=F(u,v)H(u,v)$ 转换回空间域

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(u,v)\mathrm{e}^{2x(ux+rv)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

3) 信号调制与解调

在通信系统中，傅里叶变换在信号调制和解调中扮演着重要角色。调制是将低频信号(如语音或数据)加载到高频载波上以便传输的过程，而解调则是从接收到的信号中提取原始信息。傅里叶变换帮助分析调制信号的频谱特性，确保信号能够高效传输并减少干扰。例如，在调幅(AM)和调频(FM)广播中，傅里叶变换用于分析载波和调制信号的频率关系。

4) 信号压缩

信号压缩是减少数据量的重要技术，傅里叶变换在其中起到了关键作用。通过傅里叶变换，信号可以表示为频域中的少数主要频率成分，从而忽略不重要的高频细节。例如，JPEG 图像压缩利用离散余弦变换(DCT，傅里叶变换的一种变体)将图像从空间域转换到频域，保留主要频率成分并去除冗余信息。类似地，MP3 音频压缩也利用傅里叶变换去除人耳不敏感的频率成分，从而大幅减少数据量。

5) 信号恢复与去噪

在实际应用中，信号常常受到噪声的干扰。傅里叶变换可以帮助我们从噪声中恢复原始信号。通过将信号转换到频域，可以清晰地识别噪声的频率成分，并通过滤波将其去除。例如，在医学图像处理中，

傅里叶变换用于去除 CT 或 MRI 图像中的噪声，从而提高图像质量。在音频处理中，傅里叶变换也被广泛用于去除录音中的背景噪声。

6) 卷积与相关运算

卷积和相关运算是信号处理中的基本操作，用于描述信号与系统之间的关系。傅里叶变换的一个重要性质是，时域中的卷积运算对应于频域中的乘法运算。这一性质大大简化了计算复杂度。例如，在图像处理中，卷积用于实现模糊、锐化等效果，而通过傅里叶变换，这些操作可以在频域中高效完成。

7) 信号检测与识别

傅里叶变换在信号检测和识别中也有重要应用。通过分析信号的频域特性，可以检测到特定的频率成分或模式。例如，在雷达信号处理中，傅里叶变换用于检测目标的频率特征。在语音识别中，傅里叶变换用于提取语音信号的频率特征，从而识别不同的语音内容。

8) 时频分析

对于非平稳信号(即频率随时间变化的信号)，传统的傅里叶变换可能无法提供足够的信息。为此，短时傅里叶变换(STFT)被引入。STFT 通过将信号分成短时段并对每一段进行傅里叶变换，从而同时提供时间和频率信息。这种方法广泛应用于语音信号处理、音乐分析和振动信号分析等领域。

9) 信号合成

傅里叶逆变换可以将频域信号转换回时域，从而实现信号合成。例如，在音频合成中，可以通过设计特定的频率成分来生成各种音效。在通信系统中，傅里叶逆变换用于从频域信号生成时域信号，以便传输。

4. 教学实践

傅里叶变换是信号处理领域的核心工具，但其抽象性使得学生在学习过程中面临较大挑战。通过结合实际案例、可视化教学和实验教学，可以帮助学生深入理解傅里叶变换的原理与应用。同时，知识拓展(如 STFT、小波变换等)能够进一步提升学生的理论水平和实践能力。

5. 结语

傅里叶变换在信号处理中的应用几乎无处不在。它通过将信号从时域转换到频域，为我们提供了一种全新的分析和处理信号的方式[5] [6]。无论是频谱分析、滤波、调制解调，还是信号压缩、去噪、系统分析，傅里叶变换都展现出了其强大的能力。随着技术的发展，傅里叶变换的变体(如短时傅里叶变换、小波变换等)也在不断扩展其应用范围，为信号处理领域带来了更多的可能性。可以说，傅里叶变换是现代信号处理的基石，其重要性不言而喻。未来教学中，应更加注重理论与实践的结合，培养学生的创新能力和解决实际问题的能力。

参考文献

[1] 同济大学数学科学学院. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.

[2] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[3] 史加荣, 王丹, 尚凡华, 张鹤. 随机梯度下降算法研究进展[J]. 自动化学报, 2021(9): 2103-2119.

[4] 邱松强. 特征值与梯度下降算法[J]. 高等数学研究, 2023(3): 36-39.

[5] Oppenheim, A.V. and Schafer, R.W. (2010) Discrete-Time Signal Processing. Pearson.

[6] Brigham, E.O. (1988) The Fast Fourier Transform and Its Applications. Prentice-Hall.