Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(3), 219-224
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.153095

在两个群的直积上对有限群特征标余次数的推广

何满意

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南 昆明

收稿日期：2025年2月17日；录用日期：2025年3月10日；发布日期：2025年3月19日

摘 要

本文旨在推广钱国华老师的特征标余次数。设 G_1 和 G_2 是两个有限群，χ_ξ,χ_ζ 分别是 G_1 和 G_2 的任意不可约特征标，复合得到的特征标 $\chi_{\xi\#\zeta}$ 是 $G_1\times G_2$ 的不可约特征标。我们探讨了 $G_1\times G_2$ 的特征标余次数 $cod\left(\chi_{\xi\#\zeta}\right)$ 与 G_1 的特征标余次数 $cod\left(\chi_\xi\right)$ 及 G_2 的特征标余次数 $cod\left(\chi_\zeta\right)$ 之间的数量关系，并在此基础上对原有特征标余次数的相关性质进行了推广和拓展。

关键词

有限群，特征标，群直积，特征标余次数

Generalization of the Co-Degree of Characters for Finite Groups on the Direct Product of Two Groups

Manyi He

School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: Feb. 17th, 2025; accepted: Mar. 10th, 2025; published: Mar. 19th, 2025

Abstract

This paper aims to extend the definition of character codegrees as presented by Professor Qian Guohua. Let G_1 and G_2 be two finite groups, with χ_ξ and χ_ζ being arbitrary irreducible characters of G_1 and G_2, respectively. The combined character $\chi_{\xi\#\zeta}$ is an irreducible character of

文章引用: 何满意. 在两个群的直积上对有限群特征标余次数的推广[J]. 理论数学, 2025, 15(3): 219-224.
DOI: 10.12677/pm.2025.153095

$G_1 \times G_2$. We explore the quantitative relationship between the character codegree $cod\left(\chi_{\xi\#\zeta}\right)$ of $G_1 \times G_2$, the character codegrees $cod\left(\chi_\xi\right)$ of G_1, and $cod\left(\chi_\zeta\right)$ of G_2. Based on this relationship, we extend and expand the properties of the original character codegrees.

Keywords

Finite Groups, Characters, Direct Product of Groups, Character Codegrees

1. 引言

在[1]文献中常熟理工学院的钱国华老师定义了特征标余次数，假设 G 是有限群，$\chi \in Irr(G)$，称：$cod(\chi):=\dfrac{|G:\ker\chi|}{\chi(1)}$，为不可约特征标 χ 的余次数，[2]中广西师范大学卢加宽老师从余次数的算术条件对有限群结构的影响、余次数与其他算术量之间的联系等方面综述该领域的相关研究成果，也叙述了特征标余次数定义的由来，在此简述一下子，Chillag 等学者在[3] [4]中定义了 $cod(\chi):=\dfrac{|G|}{\chi(1)}$ 定义为 χ 对应的不可约特征标次数的商，并且还刻画了每个非线性不可约特征标次数的商均很小时的性质，如果群 G 的正规子 N 群含于 $\ker\chi$ 时，χ 也可以当作 G/N 的不可约特征标，在上面的 Chillag 等学者在[3] [4]中定义的不可约特征标的商与 N 的选择有关，不太方便使用归纳法，所以钱国华老师就定义了特征标的余次数，并展开相当的工作，发表在[5]-[7]中，本文主要的内容是基于邱维声老师的著作[8]第四章中的一些群直积表示和张量积基本知识对特征标余次数的基本定义和简单结论进行基础推广，G_1 和 G_2 是两个有限群，在复表示的前提下，现在有 χ_ξ,χ_ζ 分别是 G_1 和 G_2 的不可约特征标，且具有任意性，在说明两个的不可约特征标的复合得到的 $\chi_{\xi\#\zeta}$ 是 $G_1 \times G_2$ 的不可约特征标，因而合乎特征标余次数定义的必要先决条件，此时把有限群特征标余次数的这一经典概念推广到 G_1 和 G_2 的直积 $G_1 \times G_2$ 上，探究 $G_1 \times G_2$ 的特征标余次数 $cod\left(\chi_{\xi\#\zeta}\right)$ 与群 G_1 的特征标余次数 $cod\left(\chi_\xi\right)$ 和群 G_2 的特征标余次 $cod\left(\chi_\zeta\right)$ 数三者之间存在的数量联系，并根据此数量关系对原有的特征标余次数的相关性质进行基础的推广与拓展。

2. 预备知识

引理 2.1 [9]：设 $\chi \in Irr(G)$ （G 的不可约特征标），我们定义 χ 的余次数为：

$$cod(\chi):=\frac{|G:\ker\chi|}{\chi(1)} \tag{1}$$

并记 G 的不可约特征标的余次数的集合为 $cod(G)$。

引理 2.2 [10]：假设 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s$ 是有限群 G 的所有不可约且相互不等价的复表示，它们提供的特征标分别是 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 则对于群 G 的任意复表示 β，由表示 (G,β) 提供的特征标记为 χ，此不可约复表示在群 G 所有的不可约且不等价的复表示 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s$ 的直和分解中任意 σ_i 的系数等于 (χ,χ_i)。

引理 2.3 [8]：有限群 G_1，G_2 其时 Φ 是 G_1 的不可约矩阵表示，Ψ 是 G_2 的不可约矩阵表示，规定

$G=G_1\times G_2$ 的乘法运算：$(x_1,x_2)(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_2)$，$\forall x_1,y_1\in G_1$，$\forall x_2,y_2\in G_2$。

V 为表示 (G_1,Φ) 表示的空间，W 为表示 (G_2,Ψ) 表示的空间，V 和 W 是有限维的，满足下列关系：

$$(\Phi\#\Psi)(g_1,g_2)=\Phi(g_1)\otimes\Psi(g_2)\ \forall g_1\in G_1,g_2\in G_2$$

相对应的特征标满足：$\chi_{\Phi\#\Psi}(g_1,g_2)=\chi_\Phi(g_1)\chi_\Psi(g_2)\ \forall g_1\in G_1,g_2\in G_2$

引理 2.4 [8]：有限群 G_1，G_2，其中 κ 是 G_1 的不可约表示，λ 是 G_2 的不可约表示，则 $\kappa\#\lambda$ 是群 $G=G_1\times G_2$ 的不可约复表示。

引理 2.5 [8]：在复表示的前提下，若 G_1，G_2 是有限群，其中 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_r$ 是 G_1 的所有不等价的不可约的表示，而 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_s$ 是 G_2 的所有不等价的不可约的表示，则：

$\{\omega_i\#\theta_j\,|\,i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s\}$ 是 $G=G_1\times G_2$ 的所有不等价的不可约复表示。

引理 2.6 [1]：素数 p 是 G 的某个不可约特征标余次数的因子的充分必要条件是 $p\in\pi(G)$，即 p 是群阶 $|G|$ 的素因子。

引理 2.7 [11] [12]：群的直积定义(外直积)：设有限群 G_1，G_2，我们构造的笛卡尔积：

$$G=G_1\times G_2=\{(g_1,g_2)\,|\,g_1\in G_1,g_2\in G_2\}$$

群的直并定义 G 的乘法运算：$(a_1,a_2)(b_1,b_2)=(a_1b_1,a_2b_2)\ (a_1,a_2),(b_1,b_2)\in G$；

则 G 关于上述定义的乘法构成群，称为群 G_1 与 G_2 的外直积，记为 $G=G_1\times G_2$。

引理 2.8 [13]：特征标的基本定义及其性质：假设 (X,V) 是群 G 的在域 F 上的一个线性不可约表示，定义一个函数如下：$\chi_{\mathrm{X}}(g):=tr(\mathrm{X}(g))$，$\forall g\in G$，称 χ_{X} 是 G 的表示 X 提供的不可约特征标。

3. 推理证明

推理 3.1：结合引理 2.4 [8]，引理 2.5 [8]若 $\chi_{\omega1},\chi_{\omega2},\cdots,\chi_{\omega r}$ 是 G_1 的所有不等价的不可约的表示 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_r$ 提供的不可约特征标；$\chi_{\theta1},\chi_{\theta2},\cdots,\chi_{\theta s}$ 是 G_2 的所有不等价的不可约的表示的 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_s$ 提供的特征标，若 $G=G_1\times G_2$，G 的所有不可约特征标可表示为：

$$\{\chi_{\omega_i\#\theta_j}\,|\,i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s\}$$

且个数有 rs 个。

证明：

由于引理 2.5 [8]中提到 $\omega_i\#\theta_j$ 是 $G=G_1\times G_2$ 的所有不等价的不可约复表示(其中 i,j 具有任意性)，因此 $\chi_{\omega_i\#\theta_i}$ 是 $G=G_1\times G_2$ 的所有不等价的不可约复特征标(补充一点好理解的就是 $\chi_{\omega_i\#\theta_i}$ 覆盖了 $G=G_1\times G_2$ 的不可约不等价的复表示全集)，不仅如此，明显对于 $G_1\times G_2$ 的任意两个不可约特征标 $\chi_{\omega_i\#\theta_i}$ 和 $\chi_{\omega_s\#\theta_t}$，当不同时满足 $i=s$ 且 $j=t$ 时不可约特征标 $\chi_{\omega_i\#\theta_j}$ 和 $\chi_{\omega_s\#\theta_t}$ 不会是两个等价的特征标，因而推出了 $G=G_1\times G_2$，的不可约特征标(不可约表示)个数为 rs 个。

推理 3.2：若 $G=G_1\times G_2$，其中 α,ψ 分别是 G_1,G_2 的任意不可约复表示，则：

$$cod(\chi_{\alpha\#\psi})=cod(\chi_\alpha)cod(\chi_\psi)。$$

证明：

由引理 2.1 [9]，引理 2.2 [8]，引理 2.3 [8]，引理 2.4 [8]，引理 2.5 [8]，推论 3.1 知去定义群的直积的特征标余次数也是非常的合理的定义

$$cod(\chi_{\alpha\#\psi}):=\frac{|G_1\times G_2:\ker\chi_{\alpha\#\psi}|}{\chi_{\alpha\#\psi}(1)} \tag{2}$$

这样就得到了两个群直积的不可约特征标余次数的定义，并且记群 $G_1 \times G_2$ 的不可约特征标余次数的集合为 $cod\left(G_1 \times G_2\right)$，对于我们定义的(2)式里面的符号我们还是要加以理解的，其中：

$$G_1 \times G_2 = \left\{\left(g_1, g_2\right) \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\right\}$$

其实有的时候在一些书籍或者文献上简记 $G_1 \times G_2 = G$ 然后取一个 $\forall g \in G$，其实这时要知道 g 的本质形式是为 $\left(g_i, g_j\right)$，其中任意的 $g_i \in G_1, g_j \in G_2$，(2)式中：

$$\ker \chi_{\alpha\#\psi} = \left\{\left(g_1, g_2\right) \in G_1 \times G_2 \mid \chi_{\alpha\#\psi}\left(g_1, g_2\right) = \chi_\alpha\left(g_1\right)\chi_\psi\left(g_2\right) = \chi_{\alpha\#\psi}(1,1) = \chi_\alpha(1)\chi_\psi(1)\right\}$$

对于群直积的特征标 $\chi_{\alpha\#\psi}$ 其实在许多的文献中也是简记为 $\chi_\alpha\chi_\psi$ 或者 $\chi_\alpha \times \chi_\psi$ 当然还会有其他的表示，所以有的时候不必拘泥于符号的形式，只需要理解符号及引理 2.7 [10] [11]所表达的含义即可，但是这里是参考了[8]中邱维声老师方法加以标记的；(2)式中 $\chi_{\alpha\#\psi}(1) = \chi_{\alpha\#\psi}(1,1) = \chi_\alpha(1)\chi_\psi(1)$。

现阶段在特征标余次数在得到推广得到了(2)式后，可以再对其进行更深一步的对(2)式子进行改良，首先回到原始的(1)式，反问特征标的余次数的本质是个什么，其实特征标余次数是一个数，看(2)式中的分子项是 $\left|G : \ker \chi\right|$，参考文献[7]，知 $\ker \chi \lhd G$，本质上来说：

$$\left|G : \ker \chi\right| = \left|G / \ker \chi\right| = \frac{|G|}{|\ker \chi|} \tag{3}$$

由此在回到(2)式中：

$$\begin{aligned} &\left|G_1 \times G_2 : \ker \chi_{\alpha\#\psi}\right| \\ &= \left|G_1 \times G_2 / \ker \chi_{\alpha\#\psi}\right| \\ &= \frac{\left|G_1 \times G_2\right|}{\left|\ker \chi_{\alpha\#\psi}\right|} \end{aligned} \tag{4}$$

因为：

$$G_1 \times G_2 = \left\{\left(g_1, g_2\right) \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\right\} \tag{5}$$

所以：

$$\left|G_1 \times G_2\right| = \left|G_1\right|\left|G_2\right| \tag{6}$$

因为：

$$\ker \chi_{\alpha\#\psi} = \left\{\left(g_1, g_2\right) \in G_1 \times G_2 \mid \chi_{\alpha\#\psi}\left(g_1, g_2\right) = \chi_{\alpha\#\psi}(1,1) = \chi_\alpha(1)\chi_\psi(1)\right\} \tag{7}$$

所以：

$$\left|\ker \chi_{\alpha\#\psi}\right| = \left|\ker \chi_\alpha\right|\left|\ker \chi_\psi\right| \tag{8}$$

又有：

$$\chi_{\alpha\#\psi}(1) = \chi_{\alpha\#\psi}(1,1) = \chi_\alpha(1)\chi_\psi(1) \tag{9}$$

现在结合(2)~(4)，(6)~(9)，可以推出：

$$
\begin{aligned}
cod\left(\chi_{\alpha\#\psi}\right) &:= \frac{\left|G_1 \times G_2 : \ker \chi_{\alpha\#\psi}\right|}{\chi_{\alpha\#\psi}(1)} \\
&= \frac{\left|G_1 \times G_2\right|}{\chi_{\alpha\#\psi}(1)\left|\ker \chi_{\alpha\#\psi}\right|} \\
&= \frac{\left|G_1\right|\left|G_2\right|}{\chi_\alpha(1)\chi_\psi(1)\left|\ker \chi_\alpha\right|\left|\ker \chi_\psi\right|}
\end{aligned} \tag{10}
$$

然而前面已经提到过了 χ_α, χ_ψ 分别是 G_1 和 G_2 的不可约特征标，则据(1)，(3)式可得到：

$$
cod\left(\chi_\alpha\right) := \frac{\left|G : \ker \chi_\alpha\right|}{\chi_\alpha(1)} = \frac{|G|}{\chi_\alpha(1)\left|\ker \chi_\alpha\right|} \tag{11}
$$

$$
cod\left(\chi_\psi\right) := \frac{\left|G : \ker \chi_\psi\right|}{\chi_\psi(1)} = \frac{|G|}{\chi_\psi(1)\left|\ker \chi_\psi\right|} \tag{12}
$$

结合(10)~(12)得到：

$$
\begin{aligned}
cod\left(\chi_{\alpha\#\psi}\right) &:= \frac{\left|G_1 \times G_2 : \ker \chi_{\alpha\#\psi}\right|}{\chi_{\alpha\#\psi}(1)} \\
&= \frac{\left|G_1\right|\left|G_2\right|}{\chi_\alpha(1)\chi_\psi(1)\left|\ker \chi_\alpha\right|\left|\ker \chi_\psi\right|} \\
&= \frac{\left|G_1\right|}{\chi_\alpha(1)\left|\ker \chi_\alpha\right|} \frac{\left|G_2\right|}{\chi_\psi(1)\left|\ker \chi_\psi\right|} \\
&= cod\left(\chi_\alpha\right) cod\left(\chi_\psi\right)
\end{aligned}
$$

则：

$$
cod\left(\chi_{\alpha\#\psi}\right) = cod\left(\chi_\alpha\right) cod\left(\chi_\psi\right) \tag{13}
$$

这个结论确定了两个群的不可约特征标余次数与它们直积的不可约特征标之间的一个重要关系，通过上面这个关系我们知道，在求一个群 G 的不可约特征标的余次数的时候，假如对于群 G 的未知项比较多，或者我们很难去求 G 的所有的不可约特征标，此时可考虑极其重要的一个问题，可不可以，能不能够把 G 进行分解表示，用它的子群进行表示，假设 K,H 均是 G 的子群，然而恰好 G 可以表示为两个子群，即 $G = H \times K$，对 G 进行这样的分解表示以后，恰好已知或者容易求出群 K,H 的所有不可约特征标，然后通过参考文献[8]，我们求出了求 $H \times K$ 出所对应的不可约特征标，进而求出了其不可约特征标对应的余次数，这样假设 α_i, ψ_j 分别为两个子群 K,H 的不可约表示，且因为 i,j，具有任意性，则通过(13)这个重要推论可以得出了 $cod\left(\chi_{\alpha_i\#\psi_j}\right) = cod\left(\chi_{\alpha_i}\right) cod\left(\chi_{\psi_j}\right)$，由于 i,j 的任意性，就求出了 $H \times K$ 所有的不可约特征标的余次数，这样就求出了 G 所有的不可约特征标的余次数，现在再考虑另外一个问题，就是已知群 G_1 和 G_2 的所有不可约特征标的余次数，构建一个新的群 $G_1 \times G_2$，过(13)这个重要推论就可以完全的求出群 $G_1 \times G_2$ 的所有的不可约特征标对应特征标余次数，了解到某个群特征标余次数后其实和掌握该群一组不可约特征标对探索该群结构有一定的意义(知道某群的一组不可约特征标可确定该群结构[14])。

推理 3.3：假设 G_1 和 G_2 是两个有限群，p,q 是两个素数，如果 $p \in \pi\left(G_1\right)$，$q \in \pi\left(G_2\right)$，则可推出 pq 是群 $G = G_1 \times G_2$ 某一个不可约特征标余次数的因子。

证明：应用引理 2.6 [1]的充分性，因为 p,q 是两个素数，如果 $p \in \pi(G_1)$，则我们可推出素数 p 是 G_1 的某个不可约特征标余次数的因子，反正存在性是必然的，不妨把这个存在的 G_1 不可约特征标余次数先确定下来，这样做法是合理的，假设素数 p 是 $cod(\chi_\mu)$ 的因子，其中 $\chi_\mu \in Irr(G_1)$，则：

$$p \mid cod(\chi_\mu) \tag{14}$$

同理素数 q 是 G_2 的某个不可约特征标余次数的因子，假设素数 q 是 $cod(\chi_\zeta)$ 的因子，$\chi_\zeta \in Irr(G_2)$，则：

$$q \mid cod(\chi_\zeta) \tag{15}$$

结合(14)式，(15)式以及推理 3.1，推论 3.3 的(13)式我们可得到：

$$pq \mid cod(\chi_\mu)cod(\chi_\zeta) \Rightarrow pq \mid cod(\chi_{\mu\#\zeta})$$

因而我们证明了 pq 是群 $G = G_1 \times G_2$ 某一个不可约特征标余次数的因子；证明完毕。

参考文献

[1] Qian, G., Wang, Y. and Wei, H. (2007) Co-Degrees of Irreducible Characters in Finite Groups. *Journal of Algebra*, **312**, 946-955. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.11.001

[2] 卢家宽, 王宇, 张博儒, 等. 有限群不可约特征标的余次数[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2022, 40(5): 160-167.

[3] Chillag, D. and Herzog, M. (1990) On character degrees quotients. *Archiv der Mathematik*, **55**, 25-29. https://doi.org/10.1007/bf01199110

[4] Chillag, D., Mann, A. and Manz, O. (1991) The Co-Degrees of Irreducible Characters. *Israel Journal of Mathematics*, **73**, 207-223. https://doi.org/10.1007/bf02772950

[5] 钱国华. 特征标的算术条件与有限群结构[D]: [博士学位论文]. 武汉: 武汉大学, 2002.

[6] 钱国华. 有限群的特征标与共轭类[D]: [博士学位论文]. 广州: 中山大学, 2007.

[7] 钱国华. 有限群特征标次数商的几点注记[J]. 数学杂志, 2002, 22(2): 217-220.

[8] 邱维声. 群表示论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011: 12.

[9] 钱国华. 有限群的特征标余次数[J]. 数学进展, 2023, 52(1): 1-13.

[10] 南基洙, 王颖. 有限群表示论[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 3.

[11] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[12] 崔学伟. 两个群之直积的子群与正规子群的结构[J]. 曲阜师院学报(自然科学版), 1984(4): 49-50.

[13] Isaacs, I.M. (1976) Character Theory of Finite Groups. Academic Press.

[14] Çinarci, B. (2021) Monomial and Monolithic Characters of Finite Solvable Groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **105**, 440-448. https://doi.org/10.1017/s0004972721000770