Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(3), 225-230
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.153096

关于一类临界点在单位圆周的有理函数的存在性及构造

石蕴衡

北京邮电大学理学院，北京

收稿日期：2025年2月6日；录用日期：2025年3月10日；发布日期：2025年3月19日

摘　要

周宏毅在论文关于Herman环与临界点中给出了三次有理函数且其临界点严格位于Herman环的边界分支的例子。该构造中主要用到临界点都位于单位圆周且保持单位圆周不动的有理函数的存在性。本文给出了一般的有理函数临界点均在单位圆周且保持单位圆周不动的存在性证明。同时讨论了一般显示构造的方法。

关键词

有理函数，Herman环，临界点

On the Existence and Construction of Rational Functions with Critical Points on the Unit Circle

Yunheng Shi

School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing

Received: Feb. 6th, 2025; accepted: Mar. 10th, 2025; published: Mar. 19th, 2025

Abstract

In *A Note on Herman*, Hongyi Zhou gave an example of a cubic rational function whose critical points strictly lie on the boundary of the Herman ring. The construction mainly relies on the existence of rational functions whose critical points are located on the unit circle and keep the unit circle invariant. In this paper, we provide a general proof for the existence of rational functions whose critical points are all on the unit circle and keep the unit circle invariant. Additionally, we discuss the general methods for explicit constructions.

文章引用: 石蕴衡. 关于一类临界点在单位圆周的有理函数的存在性及构造[J]. 理论数学, 2025, 15(3): 225-230.
DOI: 10.12677/pm.2025.153096

Keywords

Rational Functions, Herman Ring, Critical Points

1. 引言

设 $f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ 为全纯映射，即 f 是有理函数。设 n 为非负整数，用 f^n 表示 f 的 n 次复合，其中 f^0 为恒等映射。设 z_0 是 $\overline{\mathbb{C}}$ 中的一点。若迭代序列 f^n 在 z_0 的某个领域 H 上是正规的，则称 z_0 是 f 的正规点集。所有 f 的正规点集称为 f 的 Fatou 集，记为 $\mathcal{F}_f$。Fatou 集在 $\overline{\mathbb{C}}$ 的余集称为 f 的 Julia 集，记为 $\mathcal{J}_f$。由定义可知，Fatou 集是开集。设 $H\subset\overline{\mathbb{C}}$ 是 f 的一个 Fatou 分支，即 H 是 $\mathcal{F}_f$ 的连通分支。若 $f(H)=H$ 且 f 限制在 H 上全纯共轭于平环到自身的无理旋转 f，其中 θ 为无理数，则称 H 为 f 的 Herman 环。Herman 环是一类特殊的 Fatou 分支，关于其存在性与构造目前已经有了很多研究([1]-[3])。其存在性由 Herman 最先给出，其后 Shishikura 引入拟共形手术，为 Herman 环的构造提供了新途径[1]。

2009 年，Wang 和 Zhang 发展了 Herman 的思想，给出了一个通过扭转平环上有理函数构造 Herman 环的方法。在[4]中，Wang 和 Zhang 证明了给定区间 $(0,1)$ 中的 Diophantine 数 θ，若 $\overline{\mathbb{C}}$ 上次数大于等于 2 的有理函数 f 存在环域 $H\subset\overline{\mathbb{C}}$ 分离 f 的两个临界点且 f 限制在 H 上有 $f|_H:H\to f(H)$ 为同胚，则 f 拓扑等价于有理函数 g 且 g 存在一个旋转数为 θ 的 Herman 环。

周弘毅[5]进一步证明了分离条件的必要性，即任何 Herman 环的余集分支必须包含至少两个临界点(计重数)。这一结果也说明了低次有理函数不存在 Herman 环。特别地，周弘毅构造了一个三次有理函数且其临界点严格位于 Herman 环边余集的边界分支上。

由于函数 f 的动力学行为主要由临界点的前向轨道所主导([6]-[8])。例如 Yuming Fu，Fei Yang，Gaofei Zhang 等人证明了对于具有有界型 Siegel 圆盘的 2-周期的二次有理函数族的每个 Siegel 圆盘的边界最多包含一个临界点。在参数平面上，Siegel 圆盘 2-周期的边界包含两个临界点的轨迹是一条 Jordan 曲线[9]。Shuyi Wang，Fei Yang，Gaofei Zhang，Yanhua Zhang 也对临界点分布和 Sigel 盘和 Julia 集的性质进行了许多相关研究[10]。

基于周弘毅的研究结果，一个自然的问题是。是在更高次有理函数中是否存在所有临界点都严格位于 Herman 的环边界的情况？注意到周弘毅的构造中的关键是构造临界点仅在单位圆周上的有理函数且该有理函数在单位圆周上是实解析自同胚。本文试图通过拓扑的方法给出一个一般性的存在性证明，同时讨论一般的显示构造方法。我们有如下定理。

定理 1.1

对任意整数 $d\ge 2$，存在 d 次有理函数 $R(z)$ 使得 $R(z)$ 在单位圆周上为实解析自同胚且其所以临界点位于单位圆周 S^1 上。即 $R(z)$ 满足：

1) $R(S^1)=S^1$ 且 $R|_{S^1}$ 为实解析同胚；
2) 所有临界点 $R|_{S^1}$。

2. 主要定理的证明

本节给出主要定理的证明。

首先，考虑构造一个所有临界点都在单位圆上以及满足单位圆周到自身的实解析自同胚的拟正则映射。

以 5 次且单位圆周上的临界点均为 2 重的构造为例。更一般的情况可以类似证明。如图 1 所示，设 a_1,a_2,a_3,a_4 为单位圆周上的四个点。在单位圆内取互不相交的光滑的简单曲线 l_2,l_3 连接 a_1 与 a_3，取互不相交的光滑的简单曲线 l_4,l_5 连接 a_2 与 a_4。记由曲线 l_i， $l_{i+1}\left(i=1,2,3,4,5\right)$ 所围成的区域为 Ω_i.

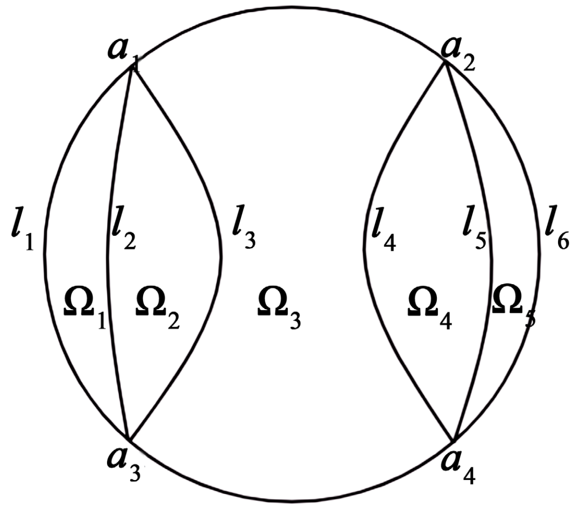

Figure 1. Mapping schematic diagram
图 1. 映射示意图

可以按如下方式定义映射：

1) 取 Ω_1 到 $\overline{\mathbb{D}}$ 的拟共形映射 f_1 且 f_1 保持 a_1 和 a_3 逐点不动。

2) 取 $\overline{\Omega}_2$ 到 $\overline{\mathbb{C}}-\mathbb{D}$ 的拟共形映射 f_2 且 f_2 在 l_2 上的限制与 f_1 相同。

3) 取 $\overline{\Omega}_3$ 到 $\overline{\mathbb{D}}$ 的拟共形映射 f_3 使得 f_3 在 l_3 上的限制与 f_2 相同且保持 a_2 和 a_4 逐点不动。

4) 取 $\overline{\Omega}_4$ 到 $\overline{\mathbb{C}}-\mathbb{D}$ 的拟共形映射 f_4 且 f_4 在 l_4 上的限制与 f_3 相同。

5) 取 $\overline{\Omega}_5$ 到 $\overline{\mathbb{D}}$ 的拟共形映射 f_5 且 f_5 在 l_5 上的限制与 f_4 相同。

由连续函数的粘合定理，上述构造得到闭单位圆 $\overline{\mathbb{D}}$ 到 $\overline{\mathbb{C}}$ 的拟正则映射，记为 f。

有 f 保持单位圆周不动且保持 a_1,a_2,a_3,a_4 逐点不动。定义：

$$F\left(z\right)=\begin{cases} f\left(z\right), & z\in\overline{\mathbb{D}}, \\ \dfrac{1}{\overline{f\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)}}, & z\notin\mathbb{D}. \end{cases}$$

则 F 是 $\overline{\mathbb{C}}$ 到自身的拟正则映射。由上述构造可知 F 保持单位圆周不动且 a_1,a_2,a_3,a_4 是 F 的临界点同时临界点重数为 2。

设 $\mu_F\left(z\right)$ 为 F 的复特征，由可测 Riemann 映射定理[11]可知，存在 $\overline{\mathbb{C}}$ 到自身的拟共形映射 $\Phi\left(z\right)$ 使得 $\Phi\left(z\right)$ 的复特征为 $\mu_{\Phi(z)}=\mu_F\left(z\right)$。[12] [13]注意到 F 的关于单位圆周的对称性可知 $\mu_F\left(z\right)$ 关于单位圆周的对称性。由可测 Riemann 映射定理可知 $\Phi\left(z\right)$ 保持单位圆周不变。令 $f=F\cdot\Phi^{-1}$，则 f 的复特征：

$$\mu_f=\frac{\mu_{\Phi^{-1}}+\mu_F\left(\Phi^{-1}\right)\tau}{1+\overline{\mu_{\Phi^{-1}}}\mu_F\left(\Phi^{-1}\right)\tau}$$

其中 $\tau=\overline{\Phi_w^{-1}}/\Phi_w^{-1}$ [12] [13]。又

$$\mu_{\phi^{-1}}=-\mu_\Phi\left(\Phi^{-1}\right)\frac{\overline{\Phi_w^{-1}}}{\Phi_w^{-1}}=-\mu_F\left(\Phi^{-1}\right)\tau.$$

由此可知，$\mu_f\equiv 0$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 几乎处处成立。所以 f 是有理函数，又 Φ 是拟共形同胚保持单位圆不动。故 f 保持单位圆不动且有四个二重临界点在单位圆周上。

上述构造具有一般性，由此可以证明存在高次有理函数满足是单位圆周的实解析自同胚且其临界点均位于单位圆周上。利用周弘毅在[1]中的方法，通过标准的拟共形手术可以得到所有临界点均在 Herman 环边界上高次有理函数[2]。即有如下定理。

定理 2.1

对任意整数 $d>2$，存在 d 次有理函数 R 使得其临界点均位于 Herman 环的边界分支上。

3. 高次有理函数的显示构造讨论

上面的证明给出了临界点位于单位圆周且保持单位圆周不动的有理函数的存在性。由于上述证明涉及到求解 Beltrami 方程，所以通常不能给出相应的有理函数的解析表达式。本节将讨论一般的临界点位于单位圆周且保持单位圆周不动的有理函数的显示构造。注意到单位圆盘与上半平面是共形等价的，所以可以将单位圆盘上的问题转化为上半平面考虑。类似于主要定理的证明。我们考虑构造临界点在实轴且重数均为 2 的保持上半平面的有理函数。事实上，我们有如下定理。

定理 3.1

给定正整数 n。设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 是实轴 $\mathbb{R}$ 上的点，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是位于上半平面的 n 个点。若 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 满足方程

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{b_j-a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_j-\overline{b}_k}+\sum_{k=1,k\neq j}^{n}\frac{1}{b_j-b_k}\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\overline{b}_j-a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\overline{b}_j-b_k}+\sum_{k=1,k\neq j}^{n}\frac{1}{\overline{b}_j-\overline{b}_k}.\end{cases}$$

其中 $j=1,2,3,\cdots,n$，则存在有理函数 R 使得 R 的临界点为 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 且在实轴为同胚映射。

证：设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 是实轴 $\mathbb{R}$ 上的 $2n$ 个点。$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是位于上半平面的 n 个点。令

$$G(z)=\frac{(z-a_1)^2(z-a_2)^2\cdots(z-a_{2n})^2}{(z-b_1)^2(z-\overline{b}_1)^2(z-b_2)^2(z-\overline{b}_2)^2\ldots(z-b_n)^2(z-\overline{b}_n)^2}$$

则 $G(z)$ 是 $4n$ 次有理函数且以 $a_j\,(j=1,2,3,\cdots,2n)$ 为二阶零点 b_j 及 $\overline{b}_j\,(j=1,2,3,\cdots,n)$ 为二阶极点。记 $G(z)$ 的分母为 $f(z)$，分子为 $g(z)$，考虑 $G(z)$ 在 b_j 及 $\overline{b}_j\,(j=1,2,3,\cdots,n)$ 处的留数有

$$\begin{cases}\operatorname{Res}\left(G,b_j\right)=\lim\limits_{z\to b_j}\left(\left(z-b_j\right)^2\dfrac{g(z)}{f(z)}\right)'\\ \operatorname{Res}\left(G,\overline{b}_j\right)=\lim\limits_{z\to \overline{b}_j}\left(\left(z-\overline{b}_j\right)^2\dfrac{g(z)}{f(z)}\right)'.\end{cases}$$

设 $f(z)=\left(z-b_j\right)^2\phi_j(z)=\left(z-\overline{b}_j\right)^2\psi_j(z)$，则

$$\begin{cases}\operatorname{Res}(G,b_j)=\lim\limits_{z\to b_j}\dfrac{g'(z)\phi_j(z)-g(z)\phi_{j'}(z)}{\phi_j^2(z)}=\dfrac{g'(b_j)\phi_j(b_j)-g(b_j)\phi_{j'}(b_j)}{\phi_j^2(b_j)}\\ \operatorname{Res}(G,\bar{b}_j)=\lim\limits_{z\to \bar{b}_j}\dfrac{g'(z)\psi_j(z)-g(z)\psi_{j'}(z)}{\psi_j^2(z)'}=\dfrac{g'(\bar{b}_j)\psi_j(\bar{b}_j)-g(\bar{b}_j)\psi_{j'}(\bar{b}_j)}{\psi_j^2(\bar{b}_j)}.\end{cases}$$

注意到 $\operatorname{Res}(G,b_j)=0$， $\operatorname{Res}(G,\bar{b}_j)=0$ 等价于

$$\frac{g'(b_j)}{g(b_j)}=\frac{\phi_{j'}(b_j)}{\phi_j(b_j)} \text{ 且 } \frac{g'(\bar{b}_j)}{g(\bar{b}_j)}=\frac{\psi_{j'}(\bar{b}_j)}{\psi_j(\bar{b}_j)}.$$

利用对数导数可知，上式等价于，

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{b_j-a_k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{b_j-\bar{b}_k}+\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{n}\dfrac{1}{b_j-b_k}\\ \sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{\bar{b}_j-a_k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\bar{b}_j-b_k}+\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{n}\dfrac{1}{\bar{b}_j-\bar{b}_k}.\end{cases}$$

由此可知，$G(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 的所有极点处的留数为零。所以 $G(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的原函数存在。取 $G(z)$ 的一个原函数 $R(z)$。注意到在实轴上 $R'(x)\geq 0$ 且除去有限个点外严格大于 0，所以 $R(z)$ 是实轴 $\mathbb{R}$ 到自身的同胚映射。另一方面，由有理函数的不定积分理论，

$$G(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k z+B_k}{(z-b_k)(z-\bar{b}_k)}$$

由于 $G(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 的所有极点处的留数为零，所以 $G(z)$ 的原函数 $R(z)$ 可取为实系数有理函数。有理函数 $R(z)$ 保持上半平面其临界点为 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 且是实轴保向自同胚。

上述方程组的由于比较复杂，所以要求解一般情况比较困难，下面仅对 $n=1$ 的情况做一个讨论。

当 $n=1$ 时，

$$\frac{1}{b_1-a_1}+\frac{1}{b_1-a_2}=\frac{1}{b_1-\bar{b}_1}$$

设 $b_1=x+yi$ 则：

$$\frac{1}{(x-a_1)+yi}+\frac{1}{(x-a_2)+yi}=\frac{1}{2yi}$$

即，

$$\frac{(x-a_1)-yi}{(x-a_1)^2+y^2}+\frac{(x-a_2)-yi}{(x-a_2)^2+y^2}=\frac{-i}{2y}$$

取 b_1 的实部，

$$\operatorname{Re}(b_1)=\frac{a_1+a_2}{2},$$

则，

$$\frac{2y^2}{(x-a_1)^2+y^2}=\frac{1}{2}$$

即，

$$3y^2 = (x - a_1)^2$$

由此可以找到一系列的 a_1， a_2， b_1 满足上式。例如：

$$b_1 = 2 + \mathrm{i}/3, \quad a_1 = 1, \quad a_3 = 3$$

对其进行积分则得到所求的有理函数。

4. 小结

本文给出了一般的有理函数临界点均在单位圆周且保持单位圆周不动的存在性证明，并探讨了其显式构造方法。未来的研究者可以继续研究如何将这些构造方法推广到包含多个环形区域的更一般情形，以及进一步讨论这类函数的显式构造方法。

基金项目

国家自然科学基金青年基金(11701039)。

参考文献

[1] Shishikura, M. (1987) On the Quasiconformal Surgery of Rational Functions. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, **20**, 1-29. https://doi.org/10.24033/asens.1522

[2] Chu, H. (2018) Surgery on Herman Rings of the Standard Blaschke Family. *Discrete & Continuous Dynamical Systems A*, **38**, 63-74. https://doi.org/10.3934/dcds.2018003

[3] Molino, P. (1977) Étude des feuilletages transversalement complets et applications. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, **10**, 289-307. https://doi.org/10.24033/asens.1328

[4] Wang, X. and Zhang, G. (2009) Constructing Herman Rings by Twisting Annulus Homeomorphisms. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **86**, 139-143. https://doi.org/10.1017/s1446788708000621

[5] 周弘毅. 关于 Herman 环与临界点[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3736-3741.

[6] Lyubich, M. (1983) On Typical Behavior of the Trajectories of a Rational Mapping of the Sphere. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **268**, 29-32.

[7] Milnor, J. (2006) Dynamics in One Complex Variable. 3rd Edition, Princeton University Press.

[8] Milnor, J. (1994) Complex Dynamics and Renormalization. Princeton University Press.

[9] Fu, Y.M., Yang, F. and Zhang, G.F. (2022) Quadratic Rational Maps with a 2-Cycle of Siegel Disks.

[10] Wang, S.Y., Yang, F., Zhang, G.F. and Zhang, Y.H. (2023) Local Connectivity of Julia Sets of Some Rational Maps with Siegel Disks.

[11] Beurling, A. and Ahlfors, L. (1956) The Boundary Correspondence under Quasiconformal Mappings. *Acta Mathematica*, **96**, 125-142. https://doi.org/10.1007/bf02392360

[12] Branner, B. and Fagella, N. (2014) Quasiconformal Surgery in Holomorphic Dynamics. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9781107337602

[13] Ahlfors, L.V. (1966) Lectures on Quasiconformal Mappings. University of California Press.