

具有双Herman环的有理函数的拓扑性质

梁陶然

北京邮电大学理学院, 北京

收稿日期: 2025年2月8日; 录用日期: 2025年3月10日; 发布日期: 2025年3月20日

摘要

本文研究了具有两个Herman环的有理函数的拓扑性质。之前的研究中, Wang和Zhang从有理函数的拓扑性质入手, 提出了构造具有一个Herman环有理函数的方法, 结合周弘毅在2023年的研究, 可以得到判断有理函数的拓扑等价类中是否有一个Herman环的充要条件。基于他们的研究, 本文进一步给出了具有次数大于或等于2的有理函数拓扑等价于具有两个Herman环的有理函数的必要条件。

关键词

有理函数, 拓扑等价, Herman环, 共形模, 临界点

Topological Properties of Rational Functions with Two Herman Rings

Taoran Liang

School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing

Received: Feb. 8th, 2025; accepted: Mar. 10th, 2025; published: Mar. 20th, 2025

Abstract

This paper studies the topological properties of rational functions with two Herman rings. In previous research, Wang and Zhang proposed a method for constructing rational functions with one Herman ring based on the topological properties of rational functions. Combined with Zhou Hongyi's research in 2023, a necessary and sufficient condition for determining whether there is a Herman ring in the topological equivalence class of rational functions can be obtained. Based on their research, this paper further presents the necessary condition for a rational function with a degree greater than or equal to 2 to be topologically equivalent to a rational function with two Herman rings.

Keywords

Rational Function, Topological Equivalence, Herman Ring, Conformal Modulus, Critical Point

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 f 是定义在扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}}$ 上次数大于等于 2 的有理函数。记 f 的 n 次迭代为

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

对于 $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$, 若存在 z_0 的邻域 U , 使得函数族 $\{f^n|_U\}$ 在 U 上为正规族, 则称 z_0 为 f 的正规点。所有正规点的全体是 f 的 Fatou 集, 记为 F_f , 其补集为 f 的 Julia 集, 记为 J_f 。显然, F_f 为开集, J_f 为闭集。

若存在正整数 p 使 $f^p(z_0) = z_0$, 则称 z_0 为 f 的周期点, 满足该式的最小正整数 p 称为其周期。特别地, 周期为 1 的周期点称为不动点。Fatou 分支是指 f 的 Fatou 集 F_f 的一个连通分支。由于 f 是有理函数, f 的 Fatou 分支在 f 作用下的像仍然是 Fatou 分支。若 Fatou 分支 $U \subset F_f$, 存在正整数 $p > 0$ 使

$$f^p(U) = U,$$

则称 U 为周期 Fatou 分支; 若 Fatou 分支 $V \subset F_f$ 非周期, 但存在正整数 q 使 $f^q(V)$ 是周期的, 则称 V 为最终周期的。Sullivan 证明了有理函数的所有 Fatou 分支都是最终周期性的, 即著名的无游荡域定理。

分类定理表明, 若 U 是一个不变 Fatou 分支, 则必属于吸性域、超吸性域、抛物域、Siegel 盘和 Herman 环五个类型之一[1]。其中, Herman 环的定义为: 存在一个共形映射 $\psi: U \rightarrow A$, 其中 $A = \{r < |z| < 1\}$ 是一个满足 $0 < r < 1$ 的环域, 且存在一个无理数 α , 使得

$$\psi \circ f \circ \psi^{-1}(z) = e^{2\pi i \alpha} z.$$

定义表明, Herman 环是一个二连通区域, 有理函数限制在其 Herman 环上可以共形共轭于标准环域上的旋转映射, 并且旋转的角度是一个无理数, 这也说明有理函数限制在 Herman 环上是共形映射。Herman 环与临界点有着紧密的联系, 在研究周期点和不动点的性质时 also 具有重要意义。

在上述五种类型中, Herman 环作为唯一一种不是直接由周期点导出的 Fatou 分支, 其存在性是最后一个被证明的。第一个 Herman 环的显式例子是 Herman 于 1984 年给出的。他的研究方法基于 Blaschke 乘积和 Arnold 的线性化定理[2]。随后, Shishikura 引入了一种新的方法——拟共形手术, 用于构造具有更灵活性质的 Herman 环[3]。

尽管在 Herman 环的构造方面学者们已经提出了一些灵活有效的方法, 但对于一个具体的有理函数, 如何能简洁有效地判断该函数或其同类型的函数是否有 Herman 环, 以及 Herman 环的数量情况, 仍然是一个重要且具有研究价值的问题。

在 Wang 和 Zhang 的工作中[4], 作者从有理函数的拓扑性质切入, 给出了从特殊性质的有理函数构造 Herman 环方法。更具体地说, 作者证明了以下分离定理:

定理 1. 设 $0 < \theta < 1$ 是一个 Diophantine 数, F 是一个有理函数。如果存在一个环域 H 满足以下条件:

(1) $F|_H$ 是一个同胚映射。

(2) H 的两个余集分支分别至少包含一个临界点。

那么, 存在一个有理函数 G , 它具有旋转数为 θ 的 Herman 环, 并且 G 拓扑等价于 F 。

上述定理中 f 和 g 拓扑等价是指, 存在 $\bar{\mathbb{C}}$ 到自身同胚映射 ϕ 和 ψ 使得 $\phi \circ f = g \circ \psi$ 。拓扑等价是拓扑共轭的一个推广。拓扑共轭具有更强的动力学意义, 因为拓扑共轭的有理函数有等价的动力系统。但一般拓扑共轭不易实现, 而拓扑等价的刚性较弱, 所以拓扑等价类中动力系统更加多样, 实现起来也更加容易。

Wang 和 Zhang 的研究成果也给出了一个判断有理函数拓扑等价类中是否存在 Herman 环的充分条件。2023 年, 周弘毅证明了上述分离定理中的条件的必要性[5]:

定理 2. 设 f 是扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的有理函数且次数至少为 2。若 $H \subset \bar{\mathbb{C}}$ 为 f 的一个 Herman 环, 则 H 在 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的两个余集分支分别至少包含两个临界点。

上述两个定理一同给出了判断有理函数所在的拓扑等价类是否具有 Herman 环的充要条件。根据上述定理, 可以通过判断是否存在上述分离临界点的特殊环境来快速判断其是否拓扑等价于具有 Herman 环的有理函数。然而研究清楚一个 Herman 环的判断方法后, 一个自然的问题是考虑多个 Herman 环的情形。

本文深入研究了具有两个 Herman 环的有理函数, 寻找其存在 Herman 环的必要条件, 着重研究其在拓扑等价下不变的性质, 引入了更加精细的变量对其进行刻画, 最终总结为以下定理作为 Herman 环存在的必要条件, 并推测其可能也具有充分性:

定理 3. 设 G 为具有两个 Herman 环的有理函数, 则对于任意与 G 拓扑等价的有理函数 R , 有以下四个性质成立:

- (1) 存在两个环域 $H_1, H_2 \subset \bar{\mathbb{C}}$, 使得它们的闭包及其闭包的像是互相不相交的。即 $\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 = \emptyset$ 且 $R(\bar{H}_1) \cap R(\bar{H}_2) = \emptyset$ 。
- (2) R 在 H_i 上的限制 $R|_{H_i}: H_i \rightarrow R(H_i)$, $i=1, 2$, 是一个同胚映射。
- (3) 对于 $\overline{H_1 \cup H_2}$ 的余集的三个连通分支, 其中每一个分支都包含至少两个临界点。
- (4) 设 Ω_1 是 $\overline{H_1 \cup H_2}$ 的双连通余集分支, Ω_2 是 $\overline{R(H_1) \cup R(H_2)}$ 的双连通余集分支。在 Ω_2 中存在不包含 R 的任何临界值且在 Ω_2 中非零伦的 Jordan 曲线 γ 使得

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{d_i} < 1,$$

其中 k 是 $R^{-1}(\gamma)$ 在 Ω_1 中非零伦的连通分支的个数, d_i 是 R 限制在上述第 i 个分支上的映射次数。

相对于前两个定理, 定理 3 给出了 Herman 环增加到两个带来的更复杂的拓扑性质。特别地, 性质(4)体现出了两个 Herman 环之间的相互约束, 下文中性质(4)的证明过程也表明当不满足该性质时, 有理函数将不会存在两个 Herman 环, 这表明该性质是非平凡的。此外, 性质(4)的特殊形式也使我们猜测其可能可以作为充分条件的重要部分。

利用上述定理, 可以通过分析有理函数的覆盖结构来研究其 Herman 环, 即通过较为简单的覆盖性质来判断较为复杂的 Herman 环的存在性以及数量, 方便了对 Herman 环的研究。

2. 相关定义与定理

为了证明定理 3, 主要的两个工具是共形模和 Riemann-Hurwitz 公式。

环域 $A(z_0, r_1, r_2)$ 是由以 z_0 为中心, 半径为 r_1 和 r_2 的两条同心圆所围成的区域, 其中 $z_0 \in \mathbb{C}$ 且 $0 < r_1 < r_2$ 。如果 $z_0 = 0$, 则环域 $A(0, r_1, r_2)$ 可简记为 $A(r_1, r_2)$ 。对于每一个环域 H , 存在唯一的正数 $r > 1$, 使得 H 共形等价于标准环域 $A(1, r)$ [6], 其边界为曲线 $|z|=1$ 和 $|z|=r$ 。环域 H 的共形模定义为

$$\operatorname{mod}(H) = \frac{1}{2\pi} \log r.$$

环域的共形模是共形不变量。此外，对于共形模，有以下不等式：

定理 4. 设 H 是一个环域， $H_1, \dots, H_n$ 是 H 的互不相交的子环域。如果每个 H_i , $i=1, 2, 3, \dots, n$ 的一个余集分支包含 H 的一个余集分支，则有

$$\sum \operatorname{mod}(H_i) \leq \operatorname{mod}(H).$$

特别地，如果 H 是以原点为中心的标准环域，则当且仅当 H_n 也是以原点为中心的标准环域且它们的并集在 H 中稠密时，上式等号成立。

设 G 为扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的有理函数，若对于环域 H_1 和 H_2 有 $G(H_1) = H_2$ ，则根据 Riemann-Hurwitz 公式有

$$\chi(H_1) = d\chi(H_2) - r,$$

其中 $\chi(H_1)$ 和 $\chi(H_2)$ 分别为 H_1 和 H_2 的 Euler 示性数， r 为 G 在 H_1 内的临界点的个数。由于环域的欧拉示性数为 0，所以 $r=0$ ，即 H_1 上没有临界点，从而 $G|_{H_1}$ 是 H_1 到 H_2 的有限次覆盖映射。

3. 定理 3 的证明

设有理函数 R 与具有两个 Herman 环的有理函数 G 拓扑等价，则存在 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的两个自同胚映射，记为 φ 和 ψ ，满足

$$\varphi \circ R = G \circ \psi.$$

下面依次证明 R 满足性质(1)至性质(4)。

3.1. 性质(1)~(2)的证明

记 A_1 和 A_2 是 G 的两个 Herman 环。根据定义，存在共形映射 $g_i: A_i \rightarrow A(r_i, 1)$, $i=1, 2$ ，使得

$$G|_{A_i} = g_i^{-1} \circ R_{\theta_i} \circ g_i,$$

其中 $R_{\theta_i}(z) = e^{i\theta_i} z$, $i=1, 2$ 为旋转。适当选取 $\epsilon_i > 0$ 使得 $A(r_i + \epsilon_i, 1 - \epsilon_i)$ 仍为圆环，记其关于 g_i 的逆象为 B_i , $i=1, 2$ 。可以看出 $G(B_i) = B_i$, $i=1, 2$ ，且 $\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 = \emptyset$ 。

令 $H_i = \psi^{-1}(B_i)$ ，容易得到 $R(H_i) = \varphi^{-1}(B_i)$, $i=1, 2$ 。从而有

$$\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 = \emptyset, \quad R(\bar{H}_1) \cap R(\bar{H}_2) = \emptyset.$$

这样我们找到了两个环域 $H_1, H_2 \subset \bar{\mathbb{C}}$ ，使得满足性质(1)的要求。根据构造不难看出， $R|_{H_i}: H_i \rightarrow R(H_i)$, $i=1, 2$ ，是同胚映射，从而满足性质(2)。

3.2. 性质(3)的证明

设 $\overline{B_1 \cup B_2}$ 的余集分支分别为 S_1, S_2 和 Ω ，其中 S_i 为单连通区域且与 B_i 有一个公共边界分支， $i=1, 2$ ， Ω 为环域。由定义有

$$\psi(\Omega_1) = \varphi(\Omega_2) = \Omega.$$

周弘毅已经证明了具有一个 Herman 环的有理函数分离临界点的情况。对于本文中具有两个 Herman 环的有理函数，我们从类似的证明出发。首先证明 S_1 中至少包含两个临界点， S_2 类似可得同样的结论。

根据 S_1 的定义， ∂S_1 在 Herman 环 A_1 中，并且有

$$G|_{\partial S_1} = g_1^{-1} \circ R_{q_1} \circ g_1,$$

即 ∂S_1 是 G 的不变曲线。这样, 记 $G^{-1}(S_1)$ 边界分支包含 ∂S_1 的连通分支记为 U_1 , 则 $G|_{U_1}$ 为 U_1 到 S_1 的分歧覆盖。由于 G 为有理函数, 所以 $G|_{U_1}$ 为有限次分歧覆盖。记 $G|_{U_1}$ 的覆盖次数为 d_{U_1} 。

若 $d_{U_1} = 1$, 则 $G|_{U_1}$ 为 U_1 到 S_1 的同胚映射。这说明 U_1 是单连通区域, 进而有 U_1 的边界为 ∂S_1 。根据 G 在 ∂S_1 的局部性质可得 $U_1 = S_1$, 从而 $G(S_1) = S_1$, 所以 S_1 包含在 G 的 Fatou 集 F_G 中。由于 Herman 环的边界包含于 G 的 Julia 集 J_G 中, 而 S_1 中包含了 Herman 环 A_1 的一个边界分支, 这与 $S_1 \subset F_G$ 矛盾, 从而有 $d_{U_1} \geq 2$ 。

根据 Riemann-Hurwitz 公式可得

$$\chi(U_1) = d_{U_1} \chi(S_1) - r_{U_1},$$

其中 $\chi(U_1)$ 和 $\chi(S_1)$ 分别为 U_1 和 S_1 的 Euler 示性数, r_{U_1} 为 G 在 U_1 中的临界点个数。由于 U_1 是多连通区域, $\chi(U_1) \leq 0$, 此外 $d_{U_1} \geq 2$, $\chi(S_1) = 1$, 从而有 $r_{U_1} \geq 2$, 即 U_1 中至少有两个临界点。由于 U_1 的一个边界分支 ∂S_1 是 G 的不变曲线以及其定向, 可得 $U_1 \subset S_1$ 。因此 S_1 中至少有两个 G 的临界点。

类似的, 可以用上述方法证明 S_2 中至少有两个 G 的临界点。下面我们证明 Ω 中至少包含两个 G 的临界点。

记 $\bar{\Omega}$ 的两个余集分支为 D_1 和 D_2 , 考虑 $G^{-1}(D_1)$ 和 $G^{-1}(D_2)$ 在 Ω 中的连通分支的存在情况。若 Ω 中不存在上述连通分支, 则 $G(\Omega) = \Omega$, 且 $G|_{\Omega}$ 是同胚映射, 这与已知条件矛盾。

若 Ω 中存在 $G^{-1}(D_1)$ 或 $G^{-1}(D_2)$ 的连通分支, 且非单连通的, 不妨设其为 $G^{-1}(D_1)$ 的一个连通分支, 记为 V , 则由 Riemann-Hurwitz 公式可得

$$\chi(V) = d_V \chi(D_1) - r_V.$$

由于 V 至少为双连通, 所以 $\chi(V) \leq 0$, 而 $\chi(D_1) = 1$ 且 $d_V \geq 2$, 计算可得 Ω 中至少有两个临界点。

若 Ω 中的上述连通分支都是单连通的, 则由于 ∂D_1 和 ∂D_2 为 $\partial \Omega$ 的逆像分支, 在 Ω 中成对出现, 从而 $G^{-1}(D_1)$ 和 $G^{-1}(D_2)$ 分别至少有一个分支在 Ω 中。记这些分支的闭包在 Ω 中的余集为 W , 则 $G|_W$ 是 W 到 Ω 的分歧覆盖, 且 W 至少是四连通的, 由 Riemann-Hurwitz 公式可得 Ω 上至少有两个临界点。

由于临界点定义为有理函数导数为零的点, 函数在临界点附近表现出多对一的局部特征。因为 ψ 是同胚映射保持拓扑结构, 所以它不改变分歧覆盖的临界点数量。而 ψ 分别把 S_1 , S_2 和 Ω 上的临界点映射到对应的 $\overline{H_1 \cup H_2}$ 的余集的三个连通分支上, 所以 $\overline{H_1 \cup H_2}$ 的余集分支均有至少两个临界点, 性质(3)得证。

3.3. 性质(4)的证明

假设 Ω 中任何不经过 G 的临界值的非零伦的 Jordan 曲线 γ 有不等式

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{d_i} \geq 1$$

成立, 其中 k 是 $G^{-1}(\gamma)$ 在 Ω_1 中非零伦的连通分支的个数, d_i 是 G 限制在上述第 i 个分支上的映射次数。

对于环域 Ω , 存在共形映射

$$h: \Omega \rightarrow A(1, r).$$

设 Ω 上的临界值的像位于 $A(1, r)$ 中以原点为中心的 m 个同心圆上, 将其分割为 $m+1$ 个同心圆环。记这些圆环关于 h 的逆像为 $\omega_1, \dots, \omega_{m+1}$ 。于是有

$$\sum_{i=1}^{m+1} \text{mod}(\omega_i) = \text{mod}(\Omega).$$

对于每个 $\omega_i \in \{\omega_1, \dots, \omega_{m+1}\}$, $G^{-1}(\omega_i)$ 的连通分支有两种情况。一种为其核曲线在 Ω 中零伦, 一种为其核曲线在 Ω 中非零伦。设非零伦的分支为 $\tilde{\omega}_{i1}, \dots, \tilde{\omega}_{ik}$, 其中 $k = k(i)$ 。则 $G|_{\tilde{\omega}_{ij}}$ 是从 $\tilde{\omega}_{ij}$ 到 ω_i 的覆盖映射。

因为 $\tilde{\omega}_{ij}$ 上没有 G 的临界点, 根据 Riemann-Hurwitz 公式, $\tilde{\omega}_{ij}$ 的欧拉示性数为 0, 这表明 $\tilde{\omega}_{ij}$ 也是一个环域。

对于 ω_i 中任意非零伦的 Jordan 曲线 γ_i , 令 $\tilde{\gamma}_{ij} = G^{-1}(\gamma_i) \cap \tilde{\omega}_{ij}$ 。如果 $\tilde{\gamma}_{ij}$ 不是连通的, 考虑其在 $\tilde{\omega}_{ij}$ 中的余集分支, 其中一定存在一个分支, 其边界至少包含 $\tilde{\gamma}_{ij}$ 的两个分支, G 限制在这个分支上是 γ_i 在 ω_i 中的某个余集分支的覆盖。根据 Riemann-Hurwitz 公式, 其必须有至少一个临界点, 但这与 $\tilde{\omega}_{ij}$ 上没有临界点的假设相矛盾。因此, $\tilde{\gamma}_{ij}$ 是连通的。

$G|_{\tilde{\gamma}_{ij}}: \tilde{\gamma}_{ij} \rightarrow \gamma_i$ 是有限次覆盖映射, 记次数为 d_{ij} 。由于有限次覆盖映射中的每一点都有相同的逆像个数, 所以 $G|_{\tilde{\omega}_{ij}}$ 的覆盖次数是 d_{ij} 。于是有

$$\sum_{j=1}^k \text{mod}(\tilde{\omega}_{ij}) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{d_{ij}} \text{mod}(\omega_i) \geq \text{mod}(\omega_i),$$

因此

$$\begin{aligned} \text{mod}(\Omega) &\geq \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^k \text{mod}(\tilde{\omega}_{ij}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{m+1} \text{mod}(\omega_i) \\ &= \text{mod}(\Omega). \end{aligned}$$

从而

$$\text{mod}(\Omega) = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^k \text{mod}(\tilde{\omega}_{ij}).$$

根据共形模的性质得

$$\bigcup_{ij} \tilde{\omega}_{ij} = \Omega.$$

此外 $\{\tilde{\omega}_{ij}\}$ 中的任意一对相邻的连通分支之间所夹的都是一条解析 Jordan 曲线。因此, 在 Ω 上不存在临界点, 而 3.2 节证明了 Ω 上至少有一个临界点, 矛盾! 从而 Ω 中存在满足不等式 $\sum_{i=1}^k \frac{1}{d_i} < 1$ 的 γ 。

覆盖次数刻为分歧覆盖在局部将原空间映射到目标空间时的层数, 而同胚映射不改变其层数, 所以拓扑等价的有理函数具有相同的覆盖次数。由于 φ 和 ψ 是同胚映射, 取 $\gamma' = \varphi^{-1}(\gamma) \subset \Omega_2$, 则 γ' 不经过 R 的临界值, 且满足 $\sum_{i=1}^k \frac{1}{d_i} < 1$, 其中 k 是 $R^{-1}(\gamma)$ 中在 Ω_1 中不是同伦于点的连通分支的数量, d_i 是 R 限制在第 i 个分支上的映射次数。性质(4)得证。

4. 总结与展望

本文研究了具有双 Herman 环的有理函数的拓扑性质, 给出了这些有理函数满足拓扑等价关系的必要条件, 明确了拓扑等价于具有两个 Herman 环的有理函数应具备的四个具体性质, 加深了对具有两个 Herman 环的拓扑性质的理解以及 Herman 环的增加带来的更强约束的认识, 为研究具有两个甚至更对 Herman 环的有理函数的拓扑结构提供了重要的理论依据。

在未来将深入探索更多的 Herman 环带来的更加复杂的拓扑性质, 并寻求有两个以及多个 Herman 环的有理函数拓扑性质的最佳描述, 以找到其拓扑刻画充要条件。

参考文献

- [1] Ahlfors, L.V. (2006) Lectures on Quasiconformal Mappings. *American Mathematical Society*, **38**.
<https://doi.org/10.1090/ulect/038>
- [2] Carleson, L. and Gamelin, T. (1996) Complex Dynamics. Springer Science & Business Media.
- [3] Shishikura, M. (1987) On the Quasiconformal Surgery of Rational Functions. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **20**, 1-29. <https://doi.org/10.24033/asens.1522>
- [4] Wang, X.M. and Zhang, G.F. (2009) Constructing Herman Rings by Twisting Annulus Homeomorphisms. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **86**, 139-143. <https://doi.org/10.1017/S1446788708000621>
- [5] 周弘毅. 关于 Herman 环与临界点[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3736-3741.
<https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312386>
- [6] 李忠. 复分析导引[M]. 北京: 北京大学出版社, 2004.