

带有矩阵值灵敏度的趋化模型的快速信号扩散极限研究

伍皓睿

西华大学理学院, 四川 成都

收稿日期: 2025年2月11日; 录用日期: 2025年3月10日; 发布日期: 2025年3月20日

摘要

趋化性是最基本的细胞生理反应之一, 它能帮助生物寻找营养物质、逃避有害物质。Keller和Segel为描述细菌趋化性致使细菌种群聚集的现象, 首次提出了由两个抛物型偏微分方程组成、用来刻画盘基网柄菌趋化现象的趋化模型。本文研究带有矩阵值灵敏度的抛物-椭圆型趋化模型和抛物-抛物型趋化模型的初值问题, 并且在细胞初始质量适当小的条件下通过时空估计证明相应的初值问题存在整体解。此外, 本文还证明当细胞扩散函数与信号扩散函数的比例趋于零时, 抛物-抛物型趋化模型的解会收敛到相应的抛物-椭圆型趋化模型的解。

关键词

趋化模型, 初值问题, 快信号扩散极限

Study on the Fast Signal Diffusion Limit in Chemotaxis Model with Matrix-Valued Sensitivity

Haorui Wu

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Feb. 11th, 2025; accepted: Mar. 10th, 2025; published: Mar. 20th, 2025

Abstract

Chemotaxis is one of the most fundamental cellular physiological responses, which helps organisms to seek nutrients and avoid harmful substances. Keller and Segel first proposed a chemotaxis model

composed of two parabolic partial differential equations to describe the phenomenon of aggregation of bacterial populations caused by bacterial chemotaxis, which was used to characterize the chemotactic behavior of *Dictyostelium discoideum*. This paper investigates the initial value problem of parabolic-elliptic and parabolic-parabolic chemotaxis models with matrix value sensitivity, and proves the existence of global solutions for the corresponding initial value problems through spatio-temporal estimation under the condition that the initial mass of the cell is appropriately small. In addition, this article also proves that when the ratio of cell diffusivity function to signal diffusion function approaches zero, the solution of the parabolic-parabolic chemotaxis model will converge to the corresponding solution of the parabolic-elliptic chemotaxis model.

Keywords

Chemotaxis Model, Initial Value Problem, Fast Signal Diffusion Limit

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

趋化性是指身体细胞、细菌及其他单细胞、多细胞生物对化学信号浓度做出反应从而发生定向移动的行为，它是生物体在复杂环境中感知和响应环境化学刺激的机制之一[1]。例如，在动态环境中(如土壤或宿主组织)，大肠杆菌等菌体能感知营养物质(如葡萄糖)的浓度差并向高浓度的葡萄糖区域运动聚集，这表明趋化性可以使细菌快速适应化学梯度变化，避免因局部资源耗尽而停滞生长；在人体中，趋化性可以引导免疫细胞迁移到炎症部位，并引导成纤维细胞进入损伤区域以开始愈合，这些相同的机制在癌细胞生长过程中也有相似作用，如允许肿瘤细胞侵入周围环境或刺激新的血管生长等等。趋化运动对生物的发育和健康至关重要，在数学、生物学、医学等学科领域具有重要研究意义。

1970年 Keller 与 Segel [2]提出了刻画盘基网柄菌的趋化现象的 Keller-Segel 模型：

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (D(u, v) \nabla u) - \nabla \cdot (S(u, v) \nabla v), \\ v_t = \Delta v + f(u, v), \end{cases}$$

其中，未知函数 u 表示细胞或微生物的种群密度， v 表示化学信号的浓度， D 表示细胞扩散速率， S 表示趋化灵敏度函数， f 表示化学物质产生或消耗的速率。关于此类模型解的存在性、有界性以及大时间渐近行为等重要的理论研究结果见文献综述[3]及其中的参考文献。

在文献[4]的趋化迁移机制中，学者们发现生物的移动方向可能具有一定的旋转性，趋化灵敏度 S 为一个张量，当细胞受到外力时，这个张量不需要是对称的。例如，当细菌在靠近水面游动时会受到向右的净旋转力，这种游动偏向是解释细菌群螺旋形斑图形成的重要依据。Li 等[5]给出了二维情况下基于菌群移动现象的具有矩阵值灵敏度的抛物方程：

$$u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \chi \nabla v + u \beta (\nabla v)^\perp),$$

其中 $\chi > 0$ ， $\beta \in \mathbb{R}$ 是常数，

$$(\nabla v)^\perp = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} v \\ \partial_{x_2} v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} v \\ -\partial_{x_1} v \end{pmatrix},$$

灵敏度函数 $\mathcal{S}$ 具有下列形式:

$$\mathcal{S} = \chi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

最近, Espejo [6] 和 Li 等 [7] [8] 分别在二维全空间和二维有界域中讨论了灵敏度函数为具体矩阵

$$\mathcal{S} := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in (-\pi, \pi]$$

时 Keller-Segel 模型的初边值问题, 此外, 文献 [9]-[11] 的研究结果表明矩阵值灵敏度一定程度上抑制了解的爆破。

针对快速信号扩散极限问题, 许多学者对不同的模型进行了研究。例如, 对于全空间 $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$), Lemarié-Rieusset [12] 证明了当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时如下抛物 - 抛物型趋化模型

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), & t > 0, \\ \varepsilon v_t = \Delta v - \alpha v + u, & t > 0, \\ u = u_0, v = 0, & t = 0 \end{cases}$$

的解 $u_{\alpha, \varepsilon}$ 收敛到对应的抛物 - 椭圆型趋化模型的解 $u_{\alpha, 0}$, $\alpha \geq 0$, $\varepsilon > 0$ 。更多全空间相关结论详见 [13] [14]。

对于具有光滑边界的有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), 考虑如下抛物 - 抛物型趋化模型

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = \nabla \cdot (\Phi(u^\varepsilon) \nabla u^\varepsilon) - \nabla \cdot (u^\varepsilon \chi(v^\varepsilon) \nabla v^\varepsilon), & x \in \Omega, t > 0, \\ \varepsilon v_t^\varepsilon = \Delta v^\varepsilon - v^\varepsilon + u^\varepsilon, & x \in \Omega, t > 0, \\ \nabla u^\varepsilon \cdot \nu = \nabla v^\varepsilon \cdot \nu = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x), v^\varepsilon(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

当 $\Phi = 1$, $\chi(z) \leq \chi_0(a+z)^{-k}$ ($\chi_0 > 0, a \geq 0, k \in \{0\} \cup (1, \infty)$), χ_0 适当小时, Mizukami [15] [16] 对上述模型的快速信号扩散极限问题进行了严格的计算, 随后, Freitag [17] 研究了 $\Phi(z) = (z+1)^{m-1}$, $\chi = 1$ 的情况。

最近, Reisch, Tran 和 Yang [18] 研究了一个在二维域中的趋化模型, 该模型包括两个竞争性猎物和捕食者物种, 其中猎物(或捕食者)的运动是由捕食者(或猎物)分泌的化学物质驱动的, 称为相互排斥(或相互吸引)趋化效应。所有物种的动力学都是根据猎物的竞争性 Lotka-Volterra 方程和捕食者的 Holling 型功能反应来选择的。在生物学上相关的情况下, 化学物质的扩散速度远快于所有物种的个体扩散, 需要适当的重新缩放, 化学信号浓度的方程是抛物线型的且带有缓慢演化的系数 $0 < \varepsilon \ll 1$ 。他们证明了每个 ε 模型的唯一经典解的整体存在性, 且估计了快速信号扩散极限的关于时间变量的 L^∞ 收敛速率。更多有界域相关结论详见 [19]-[21]。

鉴于以上相关国内外研究现状可知, 目前对快速信号扩散极限问题的研究结果较少。此类快速信号扩散极限问题的相关研究说明抛物 - 椭圆型趋化模型的解与其对应的抛物 - 抛物型趋化模型的解有相似的性质, 因此可以通过考虑抛物 - 椭圆型趋化模型来得到与之对应的较为复杂的抛物 - 抛物型趋化模型的解的性质。

受上述工作启发, 本文将考虑如下两类相关的带有矩阵值灵敏度的非线性趋化模型的快速信号扩散极限问题:

第一类为抛物 - 椭圆型趋化模型

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \mathcal{S} \cdot \nabla v), & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ 0 = \Delta v + u, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^2; \end{cases} \quad (1)$$

第二类为抛物-抛物型趋化模型

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \mathcal{S} \cdot \nabla v), & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ \tau v_t = \Delta v + u, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (2)$$

其中, 未知函数 u 表示细胞或微生物的种群密度, v 表示化学信号的浓度, u_0 表示细胞初始质量, 细胞扩散函数与信号扩散函数的比例 $\tau > 0$ 为固定的参数。

假设灵敏度函数 $\mathcal{S}$ 满足

$$\mathcal{S} := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in (-\pi, \pi] \text{ 是一个常数.}$$

假设 $\mathcal{X}$ 为由函数 $u = u(x, t)$ 构成的 Banach 空间, E 为由缓增广义函数 u_0 构成的 Banach 空间, 并定义范数:

$$\|u\|_{\mathcal{X}} = \operatorname{ess\,sup}_{t>0, x \in \mathbb{R}^2} (t + |x|^2) |u(x, t)|, \quad \|u_0\|_E = \|e^{t\Delta} u_0\|_{\mathcal{X}},$$

这里 $e^{t\Delta}$ 表示由 Gaussian 核 $e^{t\Delta} G(x, t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ 定义的热半群。

基于以上条件假设, 考虑模型(1)和模型(2)的解的存在性以及模型(2)的解是否收敛到模型(1)的解。本文的主要结果如下:

定理 1.1 设 $u_0 \in E$, 若 $\exists \varepsilon' > 0$, 使得 $\|u_0\|_E < \varepsilon'$ (ε' 小于引理 2.2 中的 ε 和引理 3.1 中的 ε^*), 且模型(1)的解 $u \in \mathcal{X}$ 和模型(2)的解 $u^\tau \in \mathcal{X}$ 分别满足引理 2.2 与引理 3.1, 那么当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 在空间 $\mathcal{X}$ 中

$$u^\tau \rightarrow u.$$

定理 1.2 设 $u_0 \in E \cap \mathcal{L}$, 其中 $\mathcal{L}$ 为局部测度的平移不变 Banach 空间或 L^1 空间, 若 $\exists \tilde{\varepsilon} > 0$, 使得 $\|u_0\|_E < \tilde{\varepsilon}$, 那么模型(1)和模型(2)存在解 u 和 u^τ 使得对于常数 $\tilde{\beta} > 0$, 有 $\|u\|_{\mathcal{X}} \leq \tilde{\beta} \tilde{\varepsilon}$, $\|u^\tau\|_{\mathcal{X}} \leq \tilde{\beta} \tilde{\varepsilon}$, 并且有

$$\sup_{t>0} \|u(t)\|_{\mathcal{L}} < \infty, \quad \sup_{t>0} \|u^\tau(t)\|_{\mathcal{L}} < \infty.$$

当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 定理 1.1 的结论 $\|u^\tau(t) - u(t)\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$ 也可以加强为

$$\sup_{t>0} \|u^\tau(t) - u(t)\|_{\mathcal{L}} \rightarrow 0.$$

上述结果说明, 当细胞初始质量适当小时, 抛物-抛物型趋化模型初值问题(2)的解 u^τ 在快速信号扩散极限过程中收敛到相应的抛物-椭圆型趋化模型(1)的解 u 。为了证明定理 1.1 与定理 1.2, 首先利用一系列先验估计证明上述两类趋化模型解的存在性。

2. 抛物-椭圆型趋化模型解的存在性

首先, 借鉴文献[22]中的方法, 定义合适的双线性形式

$$B_0(u, v)(t) := \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot \left[u \left(\mathcal{S} \cdot \nabla (-\Delta)^{-1} v \right) \right] (s) ds,$$

这里 $(-\Delta)^{-1}$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数的卷积算子, 其核为 $K(x) = -\frac{\log|x|}{2\pi}$ 。因此模型(1)的 Duhamel 公式可记为

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 - B_0(u, u). \quad (3)$$

现给出并证明如下压缩不动点定理, 它是证明模型(1)与模型(2)解的存在性的关键一步, 将应用到后文引理 2.2 与引理 3.1 的证明过程中。

引理 2.1 设 $\mathcal{X}$ 为 Banach 空间, $u, v \in \mathcal{X}$, 且 $\exists C > 0$ 使得有界双线性形式 $B: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 满足 $\|B(u, v)\|_{\mathcal{X}} \leq C \|u\|_{\mathcal{X}} \|v\|_{\mathcal{X}}$, 那么如果 $0 < \delta < \frac{1}{4C}$ 和 $u_0 \in \mathcal{X}$ 使得 $\|u_0\|_{\mathcal{X}} \leq \delta$, 方程 $u = u_0 - B(u, u)$ 的解存在并且

$$\|u\|_{\mathcal{X}} \leq 2\delta.$$

证明 利用归纳法, 定义序列 $u_{n+1} = u_0 - B(u_n, u_n)$, 假设 $\|u_n\|_{\mathcal{X}} \leq 2\delta$ 成立, 结合定义式可以得到

$$\|u_{n+1}\|_{\mathcal{X}} \leq \|u_0\|_{\mathcal{X}} + C \|u_n\|_{\mathcal{X}}^2 \leq \delta + 4C\delta^2 \leq 2\delta$$

以及

$$\|u_{n+1} - u_n\|_{\mathcal{X}} \leq \|B(u_n - u_{n-1}, u_n) + B(u_{n-1}, u_n - u_{n-1})\|_{\mathcal{X}} \leq 4C\delta \|u_n - u_{n-1}\|_{\mathcal{X}} \leq (4C\delta)^n \|u_1 - u_0\|_{\mathcal{X}},$$

又因为 $4C\delta < 1$, 所以 u_n 收敛到极限 u , 解的存在性得证。

接下来利用双线性形式 B_0 以及 Gaussian 核 G 的性质进行一系列时空估计, 以证明初值问题(1)解的存在性。

引理 2.2 设 $u_0 \in E$, 若 $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $\|u_0\|_E < \varepsilon$, 那么模型(1)存在解 $u \in \mathcal{X}$, 并且 $\exists \beta > 0$ 使得 $\|u\|_{\mathcal{X}} \leq \beta \varepsilon$ 。

证明 设 $u, v \in \mathcal{X}$, 由于 v 满足 Poisson 方程 $-\Delta v = u$, 因此 $\exists C > 0$ 使得

$$\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{\mathcal{X}} t^{-\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

不失一般性, 可以假设 $\|u\|_{\mathcal{X}} = \|v\|_{\mathcal{X}} = 1$, 那么根据 $|\mathcal{S}| = \sqrt{2}$ 和(4)可得

$$\left| u \left(\mathcal{S} \cdot \nabla (-\Delta)^{-1} v \right) (x, t) \right| \leq C |x|^{-\frac{3}{2}} t^{-\frac{3}{4}} \quad (5)$$

和

$$\left| u \left(\mathcal{S} \cdot \nabla (-\Delta)^{-1} v \right) (x, t) \right| \leq C |x|^{-2} t^{-\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

令

$$\tilde{G}(\cdot, t) \equiv \nabla_x \left(\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right),$$

我们可以将 B_0 改写为

$$\begin{aligned} B_0(u, v)(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{G}(x-y, t-s) \left[u \left(\mathcal{S} \cdot \nabla (-\Delta)^{-1} v \right) \right] (y, s) dy ds \\ &= \int_0^t \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} \tilde{G}(x-y, t-s) \left[u \left(\mathcal{S} \cdot \nabla (-\Delta)^{-1} v \right) \right] (y, s) dy ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{|y| > \frac{|x|}{2}} \tilde{G}(x-y, t-s) \left[u \left(\mathcal{S} \cdot \nabla (-\Delta)^{-1} v \right) \right] (y, s) dy ds \\ &=: J_1 + J_2. \end{aligned}$$

一方面, 结合不等式(5)及 $|\tilde{G}(x-y, t-s)| \leq C|x-y|^{-\frac{5}{2}}(t-s)^{-\frac{1}{4}}$ 可得

$$|J_1(x, t)| \leq C|x|^{-2}, \quad (7)$$

结合不等式(5)和 $|\tilde{G}(x-y, t-s)| \leq C|x-y|^{-2}(t-s)^{-\frac{1}{2}}$ 可得

$$|J_1(x, t)| \leq C|x|^{-\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{4}}. \quad (8)$$

另一方面, 结合性质 $\|\tilde{G}(\cdot, t-s)\|_{L^1} = c(t-s)^{-\frac{1}{2}}$ 与不等式(6)可得

$$|J_2(x, t)| \leq C|x|^{-2}, \quad (9)$$

与不等式(5)可得

$$|J_2(x, t)| \leq C|x|^{-\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{4}}. \quad (10)$$

根据(7)和(9)可以得到关于空间的衰减估计

$$|B_0(u, v)(x, t)| \leq C|x|^{-2}. \quad (11)$$

根据(8)和(10)可以得到关于时间的衰减估计

$$\|B_0(u, v)(t)\|_{L^{\frac{4}{3}, \infty}} \leq Ct^{-\frac{1}{4}}.$$

注意到 B_0 还可以表示为

$$B_0(u, v)(t) = e^{\frac{t}{2}\Delta} B_0(u, v)\left(\frac{t}{2}\right) + \int_{\frac{t}{2}}^t \tilde{G}(t-s) * \left[u \left(\mathcal{S} \cdot \nabla (-\Delta)^{-1} v \right) \right](s) ds,$$

因此利用 Lorentz 空间中卷积 $L^{\frac{4}{3}, \infty} * L^{4,1} \subset L^\infty$ 的弱 Young 不等式可以得到

$$\|G\|_{L^{4,1}} = ct^{-\frac{3}{4}}.$$

综上可得

$$\|B_0(u, v)(t)\|_{L^\infty} \leq Ct^{-1} + C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \left\| u \left(\mathcal{S} \cdot \nabla (-\Delta)^{-1} v(s) \right) \right\|_{L^\infty} ds \leq Ct^{-1}. \quad (12)$$

结合(11)与(12)可知 $B_0(u, v) \in \mathcal{X}$, 且

$$\|B_0(u, v)\|_{\mathcal{X}} \leq C\|u\|_{\mathcal{X}}\|v\|_{\mathcal{X}}.$$

至此已证得引理 3.1 的所需条件, 显然, 抛物-椭圆型趋化模型(1)的解存在。

3. 抛物-抛物型趋化模型解的存在性

我们首先定义合适的双线性形式

$$B_\tau(u, v)(x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{G}(x-y, t-s) \left[u \left(\mathcal{S} \cdot W_\tau(v) \right) \right](y, s) dy ds, \quad (13)$$

其中 $\tilde{G}(\cdot, t) \equiv \nabla_x \left(\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}} \right)$, 对于任意 $\tau > 0$,

$$W_\tau(v)(x, t) := \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[\tilde{G}\left(\frac{t-\sigma}{\tau}\right) * v(\sigma) \right](x, \sigma) d\sigma, \quad (14)$$

且

$$W_0(v)(x,t) := (\nabla(-\Delta)^{-1}v)(x,t). \quad (15)$$

因此模型(2)的 Duhamel 公式可记为

$$u = e^{t\Delta}u_0 - B_\tau(u,u). \quad (16)$$

与第二节类似, 将利用双线性形式 B_τ 的结构特征进行先验估计, 以证明初值问题(2)解的存在性。

引理 3.1 设 $u_0 \in E$, 若 $\exists \varepsilon^* > 0$, 使得 $\|u_0\|_E < \varepsilon^*$, 那么模型(2)存在解 $u^\tau \in \mathcal{X}$, 并且 $\exists \beta^* > 0$ 使得 $\|u^\tau\|_{\mathcal{X}} \leq \beta^* \varepsilon^*$.

证明 设 $u \in \mathcal{X}$ 且 $\tau > 0$, 根据文献[22]引理 3.1 可知, $\exists C^*(u, \tau) > 0$, 使得

$$\|W_\tau(u)(t)\|_{L^\infty} \leq C^* t^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathcal{X}}.$$

因此, 若 $u, v \in \mathcal{X}$, $\|u\|_{\mathcal{X}} = \|v\|_{\mathcal{X}} = 1$, 那么有

$$|u \mathcal{S} \cdot W_\tau(v)|(x,t) \leq C |x|^{-\frac{3}{2}} t^{-\frac{3}{4}},$$

$$|u \mathcal{S} \cdot W_\tau(v)|(x,t) \leq C |x|^{-2} t^{-\frac{1}{2}}.$$

这些估计与本文上一小节引理 2.2 证明过程中的(5)和(6)类似, 用相同的步骤便可推得结论。

4. 主要结果的证明

本小节主要讨论当细胞扩散函数与信号扩散函数的比例 τ 趋于零时, 抛物-抛物型趋化模型(2)的解 u^τ 是否会收敛到相应的抛物-椭圆型趋化模型(1)的解 u 。为此, 首先给出对线性算子 W_τ 的渐近分析:

引理 4.1 令 $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$ 为在 $[0,1]$ 上严格增的连续函数, 且 $\varepsilon(0) = 0$ 。设 $1 < r < 2$, 若存在常数 $C > 0$, 对于每个 $0 < t' < t$ 都有

$$\|u(t)\|_{L^{r,\infty}} \leq C t^{\frac{1}{r}-1}, \quad \|u(t) - u(t')\|_{L^{r,\infty}} \leq C(t-t')^{\frac{1}{2}}(t')^{\frac{1}{r}-\frac{3}{2}},$$

那么对于所有 $t > 0$, $\tau \in [0,1]$, 有

$$\varepsilon(\tau) \sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}} \|(W_\tau(u) - W_0(u))(t)\|_{L^\infty} \leq C \tau^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}}, \quad (17)$$

特别的, 若 $\|u_0\|_E$ 足够小, 那么有对应的模型(1)的解满足

$$\limsup_{\tau \rightarrow 0} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}} \|(W_\tau(u) - W_0(u))(t)\|_{L^\infty} = 0. \quad (18)$$

证明 定义函数 $\tilde{\varepsilon}(\tau)$ 使得 $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}}$, 并估计

$$W_\tau(u) - W_0(u) \equiv J_1 + J_2 + J_3,$$

其中

$$J_1(t) = \int_0^{t(1-\tilde{\varepsilon}(\tau))} \left[\frac{1}{\tau} \tilde{G}\left(\frac{t-s}{\tau}\right) * u(s) \right] ds,$$

$$J_2(t) = \int_{t(1-\tilde{\varepsilon}(\tau))}^t \left[\frac{1}{\tau} \tilde{G}\left(\frac{t-s}{\tau}\right) * u(t) \right] ds - W_0(u)(t),$$

$$J_3(t) = \int_{t(1-\tilde{\varepsilon}(\tau))}^t \left[\frac{1}{\tau} \tilde{G}\left(\frac{t-s}{\tau}\right) * [u(s) - u(t)] \right] ds.$$

对于 J_1 , 根据 $\|u(t)\|_{L^{r,\infty}} \leq Ct^{\frac{1}{r}-1}$ 和 Lorentz 空间中的 Young 不等式可得

$$\|J_1(t)\|_{L^\infty} \leq C\tau^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}} \int_0^{t(1-\tilde{\varepsilon}(\tau))} (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} s^{\frac{1}{r}-1} ds \leq C\left(\frac{\tau}{\tilde{\varepsilon}(\tau)}\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}.$$

对于 J_2 , 作傅里叶变换得到 $J_2(t) = -g_{t\tilde{\varepsilon}(\tau)/\tau} * W_0(u)(t)$, 利用 Young 不等式可得

$$\|J_2(t)\|_{L^\infty} \leq C\left(\frac{\tau}{\tilde{\varepsilon}(\tau)}\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}.$$

对于 J_3 , 由 $\|u(t) - u(t')\|_{L^{r,\infty}} \leq C(t-t')^{\frac{1}{2}}(t')^{\frac{1}{r}-\frac{3}{2}}$ 便可推得

$$\|J_3(t)\|_{L^\infty} \leq C\tau^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}.$$

通过放缩估计可知, J_1 , J_2 和 J_3 皆满足不等式(17), 它们的和显然也满足不等式(17)。

最后, 可以选取适当大小的 r 与 $\varepsilon(\tau)$ 使极限(18)成立, 例如 $r = \frac{3}{2}$, $\varepsilon(\tau) = \frac{\tau^{\frac{1}{12}}}{2}$

借助引理 4.1, 给出本文第一个主要结论的证明:

定理 1.1 的证明 结合积分式(3)和(16)以及定义式(14)和(15)可得

$$\begin{aligned} \|u^\tau(t) - u(t)\|_{\mathcal{X}} &\leq C\|B_\tau(u, u)(t) - B_0(u, u)(t)\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq C\int_0^t \|\tilde{G}(t-s) * [u(\mathcal{S} \cdot (W_\tau(u) - W_0(u)))](s)\|_{\mathcal{X}} ds \\ &\leq C\|u\|_{\mathcal{X}} \left\{ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}} \|(W_\tau(u) - W_0(u))(t)\|_{L^\infty} \right\}, \end{aligned}$$

若 $\|u_0\|_{\mathbb{E}} < \varepsilon'$, 我们可以将引理 4.1 应用到抛物-椭圆型趋化模型(1)的解 u 上, 即证得当 $\tau \rightarrow 0$ 时,

$$\|u^\tau(t) - u(t)\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0.$$

接下来, 将讨论在 $L^\infty((0, \infty); L^1(\mathbb{R}^2))$ 空间中抛物-抛物型趋化模型(2)的解 u^τ 是否仍然收敛到相应的抛物-椭圆型趋化模型(1)的解 u 。为此, 我们给出 Banach 空间中范数的一些性质以便后续进行先验估计, 更多详细定义及性质请参看文献[23]。

命题 4.1 若 $\mathcal{L}$ 为局部测度的平移不变 Banach 空间, 那么以下性质成立:

- (1) 对于任意 $f \in \mathcal{L}$, $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$, 有 $\|f * g\|_{\mathcal{L}} \leq C\|f\|_{\mathcal{L}}\|g\|_{L^1}$;
- (2) 对于任意 $f \in \mathcal{L}$, $h \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, 有 $\|fh\|_{\mathcal{L}} \leq C\|f\|_{\mathcal{L}}\|h\|_{L^\infty}$;
- (3) 每个有界序列 $\{f_k\} \subset \mathcal{L}$ 都有一个收敛子列 $\{f_{k_i}\} \subset \mathcal{L}$ 。

最后, 借助引理 2.2, 引理 3.1, 引理 4.1 以及命题 4.1, 我们给出定理 1.2 的证明过程:

定理 1.2 的证明 首先, 显然存在常数 $C_0(t) > 0$ 使得

$$\|e^{-\Lambda} u_0\|_{\mathcal{L}} \leq C_0,$$

且对于所有 $\tau \geq 0$, $\exists \tilde{C}(\mathcal{L}) > 0$ 使得

$$\|B_\tau(u, v)(t)\|_{\mathcal{L}} \leq \tilde{C} \left\{ \sup_{t>0} \|u(t)\|_{\mathcal{L}} \right\} \|v(t)\|_{\mathcal{X}}, \quad (19)$$

根据(13)和 $\|\tilde{G}(\cdot, t-s)\|_{L^1} = c(t-s)^{-\frac{1}{2}}$, 有

$$\|B_\tau(u, v)(t)\|_{\mathcal{L}} \leq C \left\{ \sup_{t>0} \|u(t)\|_{\mathcal{L}} \right\} \left\{ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}} \|W_\tau(v)(s)\|_{L^\infty} \right\}.$$

然后, 结合不等式(4)及文献[22]引理 3.1 中

$$\|W_\tau(u)(t)\|_{L^\infty} \leq C^* t^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathcal{X}},$$

可推得 $\|v\|_{\mathcal{X}}$ 有界。

一方面, 由引理 2.2 和引理 3.1 的证明过程可知, 当 $\tilde{\varepsilon} < \min\{\varepsilon, \varepsilon^*\}$ 时, 序列

$$u_k^\tau = e^{tA} u_0 - B_\tau(u_{k-1}^\tau, u_{k-1}^\tau), \quad k = 1, 2, \dots$$

在 $\mathcal{X}$ 中收敛到模型(1)或模型(2)的解;

另一方面, 根据(19)可知, 对于所有 k , 设 $\tilde{\beta} = \max\{\beta, \beta^*\}$, 若 $\tilde{\beta}\tilde{C}\tilde{\varepsilon} < 1$, 则有 $C'(\tau) > 0$ 使得

$$\sup_{t>0} \|u_k^\tau(t)\|_{\mathcal{L}} \leq C_0 + \tilde{\beta}\tilde{C}\tilde{\varepsilon} \left\{ \sup_{t>0} \|u_{k-1}^\tau(t)\|_{\mathcal{L}} \right\} \leq C' < \infty.$$

最后将讨论包含 $\mathcal{L} = L^1$ 这一情况在内的稳定性。与定理 1.1 的证明过程类似, 结合不等式(19)有

$$\|u^\tau(t) - u(t)\|_{\mathcal{L}} \leq C \sup_{t>0} \|B_\tau(u, u)(t) - B_0(u, u)(t)\|_{\mathcal{L}} \leq C \left\{ \sup_{t>0} \|u(t)\|_{\mathcal{L}} \right\} \left\{ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}} \|(W_\tau(u) - W_0(u))(t)\|_{L^\infty} \right\},$$

根据引理 4.1, 结论得证。

5. 结论

本文主要讨论了带有矩阵值灵敏度的趋化模型的快速信号扩散极限问题。本文首先在初始质量满足一定的小性条件时, 通过一系列先验估计证明了抛物-抛物型和抛物-椭圆型的趋化模型的二维初值问题解的整体存在性。其次, 本文基于热核的性质, 证明了当细胞扩散函数与信号扩散函数的比例 τ 趋于零时, 抛物-抛物型趋化模型(2)的解 u^τ 会收敛到相应抛物-椭圆型趋化模型(1)的解 u 。鉴于以上研究工作, 未来可以进一步考虑此类模型在二维或三维有界域上的快速信号扩散极限问题。

参考文献

- [1] Horstmann, D. (2004) From 1970 until Present: The Keller-Segel Model in Chemotaxis and Its Consequences II. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **106**, 51-69. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:17677364>
- [2] Keller, E.F. and Segel, L.A. (1971) Model for Chemotaxis. *Journal of Theoretical Biology*, **30**, 225-234. [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(71\)90050-6](https://doi.org/10.1016/0022-5193(71)90050-6)
- [3] Bellomo, N., Bellouquid, A., Tao, Y. and Winkler, M. (2015) Toward a Mathematical Theory of Keller-Segel Models of Pattern Formation in Biological Tissues. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **25**, 1663-1763. <https://doi.org/10.1142/s021820251550044x>
- [4] DiLuzio, W.R., Turner, L., Mayer, M., Garstecki, P., Weibel, D.B., Berg, H.C., et al. (2005) Escherichia Coli Swim on the Right-Hand Side. *Nature*, **435**, 1271-1274. <https://doi.org/10.1038/nature03660>
- [5] Li, T., Suen, A., Winkler, M. and Xue, C. (2015) Global Small-Data Solutions of a Two-Dimensional Chemotaxis System with Rotational Flux Terms. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **25**, 721-746. <https://doi.org/10.1142/s0218202515500177>
- [6] Espejo, E. and Wu, H. (2020) Optimal Critical Mass for the Two-Dimensional Keller-Segel Model with Rotational Flux Terms. *Communications in Mathematical Sciences*, **18**, 379-394. <https://doi.org/10.4310/cms.2020.v18.n2.a5>
- [7] Li, Y. and Wang, W. (2022) Finite-Time Blow-Up and Boundedness in a 2D Keller-Segel System with Rotation. *Nonlinearity*, **36**, 287-318. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/aca3f6>
- [8] Daba, A., Li, Y. and Wang, W. (2025) Finite-Time Blow-Up in a 2D Keller-Segel System with Spatially Dependent Rotational Flux. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **48**, Article No. 196. <https://doi.org/10.1007/s40840-024-01807-z>
- [9] Wang, Y. and Xiang, Z. (2015) Global Existence and Boundedness in a Keller-Segel-Stokes System Involving a Tensor-Valued Sensitivity with Saturation. *Journal of Differential Equations*, **259**, 7578-7609. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.08.027>

-
- [10] Wang, Y. and Xiang, Z. (2016) Global Existence and Boundedness in a Keller-Segel-Stokes System Involving a Tensor-Valued Sensitivity with Saturation: The 3D Case. *Journal of Differential Equations*, **261**, 4944-4973. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.07.010>
 - [11] Zheng, J. (2022) Eventual Smoothness and Stabilization in a Three-Dimensional Keller-Segel-Navier-Stokes System with Rotational Flux. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **61**, Article No. 52. <https://doi.org/10.1007/s00526-021-02164-6>
 - [12] Lemarié-Rieusset, P.G. (2013) Small Data in an Optimal Banach Space for the Parabolic-Parabolic and Parabolic-Elliptic Keller-Segel Equations in the Whole Space. *Advances in Differential Equations*, **18**, 1189-1208. <https://doi.org/10.57262/ade/1378327383>
 - [13] Kurokiba, M. and Ogawa, T. (2020) Singular Limit Problem for the Two-Dimensional Keller-Segel System in Scaling Critical Space. *Journal of Differential Equations*, **269**, 8959-8997. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.06.012>
 - [14] Ogawa, T. and Suguro, T. (2022) Maximal Regularity of the Heat Evolution Equation on Spatial Local Spaces and Application to a Singular Limit Problem of the Keller-Segel System. *Mathematische Annalen*, **387**, 389-431. <https://doi.org/10.1007/s00208-022-02469-7>
 - [15] Mizukami, M. (2018) The Fast Signal Diffusion Limit in a Chemotaxis System with Strong Signal Sensitivity. *Mathematische Nachrichten*, **291**, 1342-1355. <https://doi.org/10.1002/mana.201700270>
 - [16] Mizukami, M. (2019) The Fast Signal Diffusion Limit in a Keller-Segel System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **472**, 1313-1330. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.11.077>
 - [17] Freitag, M. (2020) The Fast Signal Diffusion Limit in Nonlinear Chemotaxis Systems. *Discrete & Continuous Dynamical Systems B*, **25**, 1109-1128. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2019211>
 - [18] Reisch, C., Tran, B. and Yang, J. (2025) Rigorous Fast Signal Diffusion Limit and Convergence Rates with the Initial Layer Effect in a Competitive Chemotaxis System. <https://arxiv.org/abs/2405.17392>
 - [19] Wang, Y., Winkler, M. and Xiang, Z. (2019) The Fast Signal Diffusion Limit in Keller-Segel (-Fluid) Systems. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **58**, Article No. 196. <https://doi.org/10.1007/s00526-019-1656-3>
 - [20] Li, M. and Xiang, Z. (2020) The Convergence Rate of the Fast Signal Diffusion Limit for a Keller-Segel-Stokes System with Large Initial Data. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **151**, 1972-2012. <https://doi.org/10.1017/prm.2020.88>
 - [21] Li, M., Xiang, Z. and Zhou, G. (2022) The Stability Analysis of a 2D Keller-Segel-Navier-Stokes System in Fast Signal Diffusion. *European Journal of Applied Mathematics*, **34**, 160-209. <https://doi.org/10.1017/s0956792522000067>
 - [22] Biler, P. and Brandolese, L. (2009) On the Parabolic-Elliptic Limit of the Doubly Parabolic Keller-Segel System Modelling Chemotaxis. *Studia Mathematica*, **193**, 241-261. <https://doi.org/10.4064/sm193-3-2>
 - [23] Lemarie-Rieussé, P.G. (2002) Recent Developments in the Navier-Stokes Problem. Chapman & Hall/CRC Press, 31-34.