Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(3), 248-254
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.153099

Bloch-Type空间B_α与Z_p空间上的超复合算子

何志坚

广东工业大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2025年2月11日；录用日期：2025年3月10日；发布日期：2025年3月25日

摘　要

复合算子在泛函分析与算子理论当中有丰富的应用与深厚的研究背景，在泛函分析中，人们关注各种函数空间的性质与结构，如L^p空间和连续函数空间$C(X)$等。复合函数作为一种将函数空间进行变换的工具，有助于深入理解函数空间之间的关系与结构，例如通过研究复合算子在不同函数空间上的作用，可以揭示函数空间的嵌入性、紧性以及有界性等等。不仅如此，复合算子在动力系统与遍历理论、量子力学、算子代数等数学分支当中也作为算子论的工具，推动其他数学分支的发展。而超复合算子是指以整函数作为复合子的特殊复合算子，推动着算子论的发展：超复合算子的有界性是研究复合算子当中比较重要的部分。近年来，有许多学者研究了超复合算子作用在一些经典的解析函数空间上的有界性。本文通过利用Z_p空间的定义与性质，讨论了超复合算子上Bloch-type空间B_α到Z_p空间的有界性问题以及Bloch-type空间B_α到Morrey空间上的有界性问题。

关键词

算子论，超复合算子，Bloch-Type空间，Z_p空间，莫比乌斯变换

Superposition Operators between Bloch-Type Spaces B_α and Z_p Spaces

Zhijian He

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: Feb. 11th, 2025; accepted: Mar. 10th, 2025; published: Mar. 25th, 2025

Abstract

Composite operators have extensive applications and a profound research background in functional

文章引用: 何志坚. Bloch-Type 空间B_α与Z_p空间上的超复合算子[J]. 理论数学, 2025, 15(3): 248-254.
DOI: 10.12677/pm.2025.153099

analysis and operator theory. In functional analysis, researchers focus on the properties and structures of various function spaces, such as L^p spaces and the continuous function space $C(X)$. As a tool for transforming function spaces, composite operators contribute to a deeper understanding of the relationships and structures among function spaces. For instance, by studying the actions of composite operators on different function spaces, one can reveal properties like the embedding, compactness, and boundedness of function spaces. Moreover, composite operators as tools in operator theory, also play a role in promoting the development of other mathematical branches, such as dynamical systems and ergodic theory, quantum mechanics, and operator algebras. Superposite operators are special composite operators with entire functions as the composition elements, and they also drive the development of operator theory. The boundedness of Superposite operators is a crucial part of the study of composite operators. In recent years, many scholars have investigated the boundedness of Superposite operators acting on some classical analytic function spaces. This paper, by making use of the definitions and properties of Z_p spaces, derives the boundedness problem of Superposite operators from the Bloch-type space B_α to the Z_p space and Bloch-type space B_α to Morrey space.

Keywords

Operator Theory, Superposition Operator, Bloch-Type Space, Z_p Space, Möbius Transform

1. 引言

超复合算子在泛函分析与算子理论中占据重要的地位，并且对研究算子理论有着很重要的作用，它是算子理论的研究对象。而超复合算子的有界性也被广泛学者研究，从而可以具体应用到泛函分析和解析函数空间等分析学分支当中。

令Δ是复平面$\mathbb{C}$上的单位圆盘，$H(\Delta)$表示为Δ上全体解析函数的集合，定义

$$\sigma_a(z)=\frac{a-z}{1-\bar{a}z}, a\in\Delta.$$

我们称σ_a为莫比乌斯变换。

对于$0\le p<\infty$且$f\in H(\Delta)$，若f满足下述范数

$$\|f\|_{Q_p}^2=|f(0)|+\sup_{a\in\Delta}\int_\Delta|f'(z)|^2\left(1-|\sigma_a(z)|^2\right)^p\mathrm{d}A(z)<\infty,$$

我们称$f\in Q_p$，其中$\mathrm{d}A(z)=1/\pi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$为单位圆盘上的正则面积测度。且在上述范数意义下，$Q_p$是一个完备的赋范线性空间，即巴拿赫空间。近年来，有许多学者对Q_p空间进行了许多研究，例如在Q_p空间上研究卷积奇异积分算子和分数次积分算子的有界性问题是重要的研究方向，通过建立Q_p空间的相关理论和方法，可以为这些算子的有界性提供新的判定条件和估计方法。并且，在广义 Navier-Stokes 方程等流体方程的研究中，Q_p空间可以用于研究方程解的整体存在性、唯一性和适定性等问题，如解决具有小初值的临界状态下 Navier-Stokes 方程的解的整体存在性和唯一性问题等。文献[1]中对Q_p空间有详细的描述。

而Z_p空间作为Q_p当中一类特殊的解析函数空间，也有着丰富的探讨价值与理论意义。设$0\le p<\infty$，

f 是 Δ 上全体解析函数空间的元素，则 Z_p 空间的范数表示如下

$$\|f\|_{Z_p}=|f(0)|+\sup_{a\in\Delta}\int_\Delta|f'(z)|\left(1-|z|^2\right)^{-1}\left(1-|\sigma_a(z)|^2\right)^p\mathrm{d}A(z)<\infty.$$

在上述范数意义下，Z_p 是一个巴拿赫空间。

Bloch-type 空间是一类在复分析中研究的函数空间，尤其在单复变和多复变函数论中占据着重要地位，通常称为 Bloch-type 空间或者加权 Bloch 空间。Bloch-type 空间作为一类重要的函数空间，为泛函分析中研究一般的函数空间理论提供了具体的例子和研究对象。其具有的巴拿赫空间结构，使得在研究泛函分析中如算子理论、对偶空间、弱收敛等概念和理论时，可以以 Bloch-type 空间为载体进行深入分析。不仅如此，在调和分析中，Bloch-type 空间可以用于对函数进行分解和刻画。例如，某些函数可以分解为 Bloch-type 空间中的函数与其他函数空间中的函数的组合，从而利用 Bloch-type 空间的性质来研究函数的整体性质，这种分解方法在研究调和函数的边界值问题、积分表示等方面有重要应用。若 $0<\alpha<1$，Bloch-type 空间 B_α 表示为单位圆盘上的满足所有满足以下条件

$$\|f\|_{B_\alpha}=\sup_{z\in\Delta}\left(1-|z|^2\right)^\alpha|f'(z)|<\infty,$$

的解析函数全体组成的空间。在自然范数 $\|f\|_{B_\alpha}=|f(0)|+\sup_{z\in\Delta}\left(1-|z|^2\right)^\alpha|f'(z)|$ 下，Bloch-type 空间构成巴拿赫空间。特别的，若 $\alpha=1$，则 $B_\alpha=B$ 为经典 Bloch 空间，并且当 $0<\alpha<1$ 时，Bloch-type 空间里的解析函数是有界的。[2]对 Bloch 空间有许多的介绍。

Morrey 空间最初由 Morrey 在 1938 年撰写文献[3]时引入。时至今日，Morrey 空间已经是研究调和分析与偏微分方程的重要工具之一。许多调和分析中的算子，如 Hardy-Littlewood 极大算子、奇异积分算子、分数次积分算子等在 Morrey 空间上的有界性是重要研究内容。研究这些算子在 Morrey 空间上的有界性，可以为进一步研究函数在这些算子作用下的性质提供基础，也有助于建立调和分析中的各种估计和不等式。而在几何分析中，许多问题可以归结为求解偏微分方程，Morrey 空间为这些方程的解提供了合适的函数空间框架。比如在研究极小曲面方程、Yamabe 方程等与几何密切相关的偏微分方程时，Morrey 空间的方法可以用于分析解的存在性、唯一性和正则性，从而得到几何对象的相关性质。设 $0<\lambda<1$ 且 $f\in H(\Delta)$。我们定义满足下述范数的全体解析函数空间：

$$\sup_{a\in\Delta}\left(1-|a|^2\right)^{1-\lambda}\int_\Delta|f'(z)|^2\left(1-|\sigma_a(z)|^2\right)\mathrm{d}A(z)$$

为 Morrey 空间，其中 $z\in\Delta$。一般我们记 Morrey 空间为 $\mathcal{L}^{2,\lambda}$。对于 Morrey 空间，具体贡献可以参考[4]-[7]。

假设 φ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的解析函数(即 φ 在 $\mathbb{C}$ 上解析)，我们称 φ 是整函数，并且 $X,Y\subset H(\Delta)$ 是巴拿赫空间。如果对于 $f\in X$，有 $\varphi\circ f\in Y$，那么我们称 φ 诱导了一个从 $X\to Y$ 的超复合算子 S_φ。容易发现，超复合算子 S_φ 是一个线性算子当且仅当 $\varphi(z)=cz$，其中 c 为常数。对于复平面上的一个集合 A，其凸包指的是包含 A 的最小凸集，凸集指的是对于集合中的任意两点，连接这两点的线段完全包含在该集合内。

近年来，有许多关于超复合算子 S_φ 在哈代空间 H_P，Bloch 空间 B，Dirichlet 空间 $\mathcal{D}$ 和 Bergman 空间 A_p 的相关结论，参考如下[8] [9]。

在本文中，我们基于[10]当中 Q_p 与 Bloch-type 空间 B_α 上的超复合算子 S_φ 的有界性问题，进一步考虑 Z_p 与 Bloch-type 空间以及 Morrey 空间上的超复合算子 S_φ。问题如下：什么情况下 φ 诱导了一个从 $B_\alpha\to Z_p$ 或者从 $Z_p\to B_\alpha$ 的超复合算子 S_φ？什么时候 S_φ 是一个有界算子？

接下来的章节中，所以的 φ 都为整函数，用 C 表示非负常数且不同处的 C 值可以取值不同。对于两

个非负常数 X 和 Y，我们用 $X \lesssim Y$ 表示存在常数 $C>0$ 使得 $X \le CY$，用 $X \gtrsim Y$ 表示存在常数 $C>0$ 使得 $X \ge CY$。

2. 从 Z_p 空间到 Bloch-Type 空间 B_α 的超复合算子 S_φ

引理 2.1. $Z_p \subseteq Q_p$，**其中** $0 \le p < \infty$。

证明：令 $0 \le p < \infty$，且 $f \in Z_p$。只需证明 $\left|f'(z)\right| \le \frac{1}{1-|z|^2}$ 即可，由施瓦兹-皮卡定理我们可以从下式得到

$$\left|f'(z)\right| \le \frac{1-\left|f(z)\right|^2}{1-|z|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2}, \quad z \in \Delta.$$

证明完毕。

引理 2.2. 若 $f \in B_\alpha$，**其中** $0<\alpha<1$。**那么** f **有界。**

引理 2.2 的具体细节参考文献[2]。

假设 $0 \le p < \infty$ 并且 $0<\alpha<1$。那么由引理 2.1 可知，存在一个无界函数 $f \in Z_p \subseteq Q_p$，但在 Bloch-type 空间 B_α 中的解析函数都是有界的，其中 $0<\alpha<1$。由此，我们希望当 φ 诱导一个从 Z_p 空间到 Bloch-type 空间 B_α 的超复合算子 S_φ 时，φ 是一个常值函数。实际上，我们发现：

定理 2.3. 如果 φ **诱导一个从** Z_p **空间到 Bloch-type 空间** B_α **的超复合算子** S_φ**，那么** φ **是一个常值函数。**

证明：假设 φ 不是一个常值函数，由刘维尔定理我们可得 φ 是一个无界函数。由此，我们令 Z_n 为 Δ 上的复数列，使得 $\left|\varphi(z_n)\right| \ge n$ 并且 $\left|\varphi(z_{n+1})\right| \ge 2\left|\varphi(z_n)\right|$。令 $c_n = \left\{z : |z-z_n| \le 1/\left|\varphi(z_{n+1})\right|^3\right\}$，而 G_n 是由 c_n 与 c_{n+1} 所组成的凸包，那么我们发现 $z \in G_n$ 都有

$$|z| \le \frac{2}{\left|\varphi(z_{n+1})\right|^2} \le \frac{1}{2\left|\varphi(z_n)\right|^2} < \frac{1}{n^2}.$$

因此 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ 为一个单连通区域，从而由黎曼映射定理可以得到，存在一个共形映射 $f:\Delta \to G$ (即 f 在 Δ 上解析)，由引理 2.1，令 $f \in Z_p \subset Q_p$，而 G 是一个有限区域(单连通区域)。由引理 2.2，且 φ 是无界的，所以有 $\varphi \circ f \notin B_\alpha$，故得到矛盾。

3. 从 Bloch-Type 空间 B_α 到 Z_p 空间的超复合算子 S_φ

为了讨论从 Bloch-type 空间 B_α 到 Z_p 空间的超复合算子 S_φ，我们需要用到文献[11]]当中的一个引理：

引理 3.1. 令 $0<\alpha<\infty$。**那么存在** $f_1, f_2 \in B_\alpha$ **和** $\epsilon>0$，**我们有**

$$\left|f_1'(z)\right| + \left|f_2'(z)\right| > \epsilon.$$

如果 φ 是一个常值整函数，那么显然 S_φ 是 B_α 空间到 Z_p 空间上的超复合算子。如果 φ 是一个非常值的整函数，我们有下述发现：

定理 3.2. 令 $0 \le p < \infty$ **和** $0<\alpha<1$。**若** α **是一个非常值的整函数，那么** φ **诱导了从 Bloch-type 空间** B_α **到** Z_p **空间的超复合算子** S_φ **且** S_φ **是有界的当且仅当**

$$\sup_{a\in\Delta} \int_\Delta \frac{\left(1-\left|\sigma_a(z)\right|^2\right)^p}{\left(1-|z|^2\right)^{\alpha+1}} < \infty.$$

证明：对于任意 $f \in B_\alpha$，其中 $0<\alpha<1$，由引理 2.2 有 $|f(z)|$ 有界并且 $|\varphi'(f(z))|<C$ (这是因为整函数复合一个解析函数还是解析的)，其中 C 是依赖于 φ 和 $\|f\|_{B_\alpha}$ 的常数。从而有

$$\begin{aligned}\|S_\alpha(f)\|_{Z_p} &\lesssim \sup_{a\in\Delta}\int_\Delta |\varphi'(f(z))||f'(z)|\left(1-|z|^2\right)^{-1}\left(1-|\sigma_a(z)|^2\right)^p \mathrm{d}A(z)\\ &\le C\sup_{a\in\Delta}\int_\Delta |f'(z)|\left(1-|z|^2\right)^{-1}\left(1-|\sigma_a(z)|^2\right)^p \mathrm{d}A(z)\\ &\lesssim \sup_{a\in\Delta}\int_\Delta \frac{\left(1-|\sigma_a(z)|^2\right)^p}{\left(1-|z|^2\right)^{\alpha+1}}\mathrm{d}A(z)<\infty\end{aligned}$$

其中 C 是依赖于 a 的常数，因此，我们有 $\varphi\circ f\in Z_p$。另一方面，由 $|\varphi(f(0))|<C_1$，其中 C_1 是依赖于 φ 和 $\|f\|_{B_\alpha}$ 的常数，根据 Z_p 的范数定义，从而 S_φ 在 Z_p 上有界。

反之，假设 φ 是非常值的整函数，并且 φ 诱导了从 Bloch-type 空间 B_α 到 Z_p 空间的超复合算子 S_φ。由引理 3.1，存在 $f_1, f_2 \in B_\alpha$ 和 $\epsilon_1>0$，使得

$$\left(1-|z|^2\right)^\alpha\left(|f_1'(z)|+|f_2'(z)|\right)>\epsilon_1>0$$

不失一般地，根据引理 2.2，我们假定 $|f_1(z)|<M$，$|f_2(z)|<M$，即 f_1, f_2 有界，M 为常数。由于 φ 是非常值的整函数，由皮卡小定理可得，给定 $\epsilon_2>0$，存在一个圆盘 $\{z\in\Delta:|z-z_0|<r\}$ 使得 $|\varphi'(z)|>\epsilon_2>0$。令

$$F_1(z)=z_0+\frac{rf_1(z)}{M},\quad F_2(z)=z_0+\frac{rf_2(z)}{M}$$

显然 $F_1, F_2\in B_\alpha$，从而我们有

$$\begin{aligned}\infty &> \|S_\varphi(F_1)\|_{Z_p}+\|S_\varphi(F_2)\|_{Z_p}\\ &=\int_\Delta\left(|\varphi'(F_1(z))||F_1'(z)|+|\varphi'(F_2(z))||F_2'(z)|\right)\left(1-|z|^2\right)^{-1}\left(1-|\sigma_a(z)|^2\right)^p \mathrm{d}A(z)\\ &\ge \frac{\epsilon_2 r}{M}\int_\Delta\left(|f_1'(z)|+|f_2'(z)|\right)\left(1-|z|^2\right)^{-1}\left(1-|\sigma_a(z)|^2\right)^p \mathrm{d}A(z)\\ &\ge \frac{\epsilon_1\epsilon_2 r}{M}\int_\Delta \frac{\left(1-|\sigma_a(z)|^2\right)^p}{\left(1-|z|^2\right)^{\alpha+1}}\mathrm{d}A(z)\\ &\gtrsim \int_\Delta \frac{\left(1-|\sigma_a(z)|^2\right)^p}{\left(1-|z|^2\right)^{\alpha+1}}\mathrm{d}A(z)\end{aligned}$$

故

$$\sup_{a\in\Delta}\int_\Delta \frac{\left(1-|\sigma_a(z)|^2\right)^p}{\left(1-|z|^2\right)^{\alpha+1}}<\infty.$$

证明完毕。

4. 从 Bloch-Type 空间 B_α 到 Morrey 空间的超复合算子 S_φ

接下来，我们讨论从 Bloch-type 空间 B_α 到 Morrey 空间的超复合算子 S_φ 的有界性：

定理 4.1. **令 $0<\lambda<1$ 和 $0<\alpha<1$。若 α 是一个非常值的整函数，那么 φ 诱导了从 Bloch-type 空间 B_α 到 Morrey 空间的超复合算子 S_φ 且 S_φ 是有界的当且仅当**

$$\sup_{a\in\Delta}\left(1-|a|^2\right)^{1-\lambda}\int_\Delta \frac{1-\left|\sigma_a(z)\right|^2}{\left(1-|z|^2\right)^{2\alpha}}<\infty.$$

证明：对于任意 $f\in B_\alpha$，其中 $0<\alpha<1$，类似的，由引理 2.2 有 $\left|f(z)\right|$ 有界并且 $\left|\varphi'(f(z))\right|<C$，其中 C 是依赖于 φ 和 $\|f\|_{B_\alpha}$ 的常数。从而有

$$\begin{aligned}\left\|S_\alpha(f)\right\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} &\lesssim \sup_{a\in\Delta}\left(1-|a|^2\right)^{1-\lambda}\int_\Delta\left|\varphi'(f(z))\right|^2\left|f'(z)\right|^2\left(1-\left|\sigma_a(z)\right|^2\right)\mathrm{d}A(z)\\ &\le C\sup_{a\in\Delta}\left(1-|a|^2\right)^{1-\lambda}\int_\Delta\left|f'(z)\right|^2\left(1-\left|\sigma_a(z)\right|^2\right)\mathrm{d}A(z)\\ &\lesssim \sup_{a\in\Delta}\left(1-|a|^2\right)^{1-\lambda}\int_\Delta\frac{1-\left|\sigma_a(z)\right|^2}{\left(1-|z|^2\right)^{2\alpha}}\mathrm{d}A(z)<\infty\end{aligned}$$

其中 C 是依赖于 a 的常数，因此，我们有 $\varphi\circ f\in Z_p$。另一方面，由 $\left|\varphi(f(0))\right|<C_1$，其中 C_1 是依赖于 φ 和 $\|f\|_{B_\alpha}$ 的常数，根据 Morrey 空间的范数定义，从而有 S_φ 在 Morrey 空间上有界。

反之，假设 φ 是非常值的整函数，并且 φ 诱导了从 Bloch-type 空间 B_α 到 Z_p 空间的超复合算子 S_φ 且 S_φ 有界。由引理 3.1，存在 $f_1,f_2\in B_\alpha$ 和 $\epsilon_1>0$，使得

$$\left(1-|z|^2\right)^\alpha\left(\left|f_1'(z)\right|+\left|f_2'(z)\right|\right)>\epsilon_1>0$$

不失一般地，根据引理 2.2，我们假定 $\left|f_1(z)\right|<M$，$\left|f_2(z)\right|<M$，即 f_1,f_2 有界，M 为常数。由于 φ 是非常值的整函数，由皮卡小定理可得，给定 $\epsilon_2>0$，存在一个圆盘 $\left\{z\in\Delta:\left|z-z_0\right|<r\right\}$ 使得 $\left|\varphi'(z)\right|>\epsilon_2>0$。令

$$F_1(z)=z_0+\frac{rf_1(z)}{M},\quad F_2(z)=z_0+\frac{rf_2(z)}{M}$$

显然 $F_1,F_2\in B_\alpha$，从而我们有

$$\begin{aligned}&\infty>\left\|S_\varphi(F_1)\right\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}}+\left\|S_\varphi(F_2)\right\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}}\\ &=\sup_{a\in\Delta}\left(1-|a|^2\right)^{1-\lambda}\int_\Delta\left(\left|\varphi'(F_1(z))\right|\left|F_1'(z)\right|+\left|\varphi'(F_2(z))\right|\left|F_2'(z)\right|\right)^2\left(1-\left|\sigma_a(z)\right|^2\right)\mathrm{d}A(z)\\ &\gtrsim\sup_{a\in\Delta}\left(1-|a|^2\right)^{1-\lambda}\int_\Delta\left(\left|f_1'(z)\right|+\left|f_2'(z)\right|\right)^2\left(1-\left|\sigma_a(z)\right|^2\right)\mathrm{d}A(z)\\ &\gtrsim\sup_{a\in\Delta}\left(1-|a|^2\right)^{1-\lambda}\int_\Delta\frac{1-\left|\sigma_a(z)\right|^2}{\left(1-|z|^2\right)^{2\alpha}}\mathrm{d}A(z)\end{aligned}$$

故

$$\sup_{a\in\Delta}\left(1-|a|^2\right)^{1-\lambda}\int_\Delta\frac{1-\left|\sigma_a(z)\right|^2}{\left(1-|z|^2\right)^{2\alpha}}<\infty.$$

5. 结语

由定理 3.2 与定理 4.1，我们可以发现：通过整函数的性质，我们可以对一类特殊的复合算子进行估

计，得出一些经典的解析函数空间有界性的充分必要条件，从而有助于建立算子论与调和分析以及泛函分析里面的不等式理论和估计理论。

参考文献

[1] Xiao, J. (2001) Holomorphic Q Classes. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/b87877

[2] Zhu, K. (1993) Bloch Type Spaces of Analytic Functions. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **23**, 1143-1177. https://doi.org/10.1216/rmjm/1181072549

[3] Morrey, C.B. (1938) On the Solutions of Quasi-Linear Elliptic Partial Differential Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **43**, 126-166. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1938-1501936-8

[4] Taylor, M. (1992) Analysis on Morrey Spaces and Applications to Navier-Stokes and Other Evolution Equations. *Communications in Partial Differential Equations*, **17**, 1407-1456. https://doi.org/10.1080/03605309208820892

[5] Olsen, P. (1995) Fractional Integration, Morrey Spaces and a Schrödinger Equation. *Commun Partial Differential Equations*, **20**, 2005-2055. https://doi.org/10.1080/03605309508821161

[6] Kukavica, I. (2008) Regularity for the Navier-Stokes Equations with a Solution in a Morrey Space. *Indiana University Mathematics Journal*, **57**, 2843-2860. https://doi.org/10.1512/iumj.2008.57.3628

[7] Palagachev, D. and Softova, L. (2004) Singular Integral Operators, Morrey Spaces and Fine Regularity of Solutions to PDE's. *Potential Analysis*, **20**, 237-263. https://doi.org/10.1023/B:POTA.0000010664.71807.f6

[8] Alvarez, V., Marquez, M.A. and Vukotic, D. (2004) Superposition Operators between the Bloch Space and Bergman Spaces. *Arkiv for Matematik*, **42**, 205-214. https://doi.org/10.1007/BF02385476

[9] Cámera, G.A. (1995) Nonlinear Superposition on Spaces of Analytic Functions, Harmonic Analysis and Operator Theory (Caracas, 1994). *Contemporary Mathematics*, **189**, 103-116.

[10] Xiong, C. (2006) Superposition Operators between Q_p Spaces and Bloch-Type Spaces. *Complex Variables*, *Theory and Application*, **50**, 935-938. https://doi.org/10.1080/02781070500139740

[11] Zhao, R. (1996) On a General Family of Function Spaces. Suomalainen Tiedeakatemia, 1-56.