Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(3), 255-261
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.153100

Hans汉斯

涉及Picard例外值和微分多项式的亚纯函数正规定则

陈　浩[*]，杨　祺[#]

新疆师范大学数学科学学院，新疆　乌鲁木齐

收稿日期：2025年2月7日；录用日期：2025年3月10日；发布日期：2025年3月25日

摘　要

本文研究有关Picard例外值和微分多项式有关的亚纯函数族的正规性，将陈玮和王琼等人的一些结论推广到微分多项式，得到了两个新的定理。

关键词

亚纯函数，正规族，Picard例外值，微分多项式

Involving Picard Exceptional Values and Normal Rules for Meromorphic Functions of Differential Polynomials

Hao Chen[*], Qi Yang[#]

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Feb. 7th, 2025; accepted: Mar. 10th, 2025; published: Mar. 25th, 2025

Abstract

This paper studies on Picard exceptional value and differential polynomial related normality of meromorphic function family, some conclusion of Chen Wei and Wang Qiong are extended to differential polynomials, two new theorems are obtained.

[*]第一作者。
[#]通讯作者。

文章引用: 陈浩, 杨祺. 涉及 Picard 例外值和微分多项式的亚纯函数正规定则[J]. 理论数学, 2025, 15(3): 255-261.
DOI: 10.12677/pm.2025.153100

Keywords

Meromorphic Function, Normal Family, Picard Exceptional Value, Differential Polynomial

1. 引言及主要结果

陈玮等人研究了徐炎在文[1]提出一个有关亚纯函数的正规族猜想(见[2]-[4])，我们在此基础上推广到微分多项式，得到两个新的定理。Picard 例外值是复分析中的一个概念，在复变函数理论中做出了重要贡献，特别是在全纯函数的值分布方面。设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为区域 $D\subset\mathbb{C}$ 内的两个非常数亚纯函数，a 是一个有穷复数，$\mathcal{F}$ 是定义在 D 内的一族亚纯函数，根据 Montel 定义，如果对于任意序列 $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$，都存在一个子列 $\{f_n\}$ 在 D 按球面距离内闭一致收敛到一个亚纯函数或趋于 ∞，称 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。其中 f 的微分多项式为 $L(f)(z)=f^{(k)}(z)+a_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z)+\cdots+a_1(z)f'(z)+a_0(z)f(z)$； $a_0(z),a_1(z),\cdots,a_{k-1}(z)$ 为区域 D 内的全纯函数。Picard 例外值揭示了亚纯函数值分布的局限性，微分多项式的亚纯函数正规性是研究微分方程解和函数紧性的重要工具。二者结合可以深入理解亚纯函数的性质，微分方程的解以及函数族的分类与紧性。对复分析，值分布理论研究中具有重要意义，为数学研究提供强有力的工具。

定义 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数。如果从 $\mathcal{F}$ 中任一函数序列 $\{f_n(z)\}$ 均可选出一个子序列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在区域 D 上按球距内闭一致收敛，则称 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规。

1994 年，叶[5]证明了下面的结果。

定理 1.1 [5] 设 f 为复域 $\mathbb{C}$ 上的一个超越亚纯函数，a 为非零有穷复数，n 为正整数。若 $n\geq 3$，则 $f+a(f')^n$ 可以取任意复数 b 无穷次。

2008 年，方和 Zalcman [6]证明了当 $n=2$ 时定理 1.1 成立，同时给出特例说明了当 $n=1$ 定理 1.1 不成立。

定理 1.2 [6] 设 $\mathcal{F}$ 为 D 内的一族亚纯函数，$n(\geq 2)$ 为正整数且 $a(\neq 0),b$ 为两个有穷复数。若对于任意 $f\in\mathcal{F}$，f 的零点均为重级零点且在 D 内有 $f+a\left(f^{(k)}\right)^n\neq b$，则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

后来，徐等人[1]考虑用 $f^{(k)}$ 代替 f'，获得了下面的结果。

定理 1.3 [1] 设 $\mathcal{F}$ 为 D 内的一族亚纯函数，$a(\neq 0),b$ 为两个复数，n 和 k 是两个满足 $n\geq k+1$ 的正整数。若对于任意 $f\in\mathcal{F}$，f 仅有重数至少为 $k+1$ 的零点且在 D 内有 $f+a\left(f^{(k)}\right)^n\neq b$，则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

在文[1]中，徐等人猜测将定理 1.3 的条件 $n\geq k+1$ 替换为 $n\geq 2$ 时仍然成立。2013 年，雷等人对这一问题进行了解答并证明了该猜想。

定理 1.4 设 n,k 为两个正整数且 $n\geq 2$， a,b,c 为 3 个有穷复数且 $a\neq 0,c\neq 0,ac^n\neq b$。设 $\mathcal{F}$ 为 D 内的一族亚纯函数，若对于任意 $f\in\mathcal{F}$，f 仅有重数至少为 $k+1$ 的零点且在 D 内有

$$f+a\left(f^{(k)}\right)^n=b\Rightarrow f^{(k)}=c$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

定理 1.5 设 n,k 为两个正整数且 $n\geq 2$， a,b,c 为 3 个有穷复数且 $a\neq 0,c\neq 0$。设 $\mathcal{F}$ 为 D 内的一族亚纯函数，若对于任意 $f\in\mathcal{F}$，f 仅有重数至少为 $k+1$ 的零点且在 D 内有

$$f+a\left(f^{(k)}\right)^{n}=b\Rightarrow f=c$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

一个很自然的问题，我们能否将定理中的条件 $f^{(k)}$ 替换为 $L(f)$？得到以下定理并证明。

定理 A 设 $n,k\in N^{+},n\geq 2$，a,b,c 为 3 个有穷复数且 $a\neq 0,c\neq 0,ac^{n}\neq b$。设 $\mathcal{F}$ 为 D 内的一族亚纯函数，若对 $\forall f\in\mathcal{F}$，f 仅有重数至少为 $k+1$ 的零点且在 D 内满足

$$f+a\left(L(f)\right)^{n}=b\Rightarrow f^{(k)}=c$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

定理 B 设 $n,k\in N^{+},n\geq 2$，a,b,c 为 3 个有穷复数且 $a\neq 0,c\neq 0$。设 $\mathcal{F}$ 为 D 内的一族亚纯函数，若对 $\forall f\in\mathcal{F}$，f 仅有重数至少为 $k+1$ 的零点且在 D 内满足

$$f+a\left(L(f)\right)^{n}=b\Rightarrow f=c$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

2. 引理

引理 2.1 [7]设 $\mathcal{F}$ 为单位圆盘上的亚纯函数族且满足 $\mathcal{F}$ 中任意函数的零点重数至少为 p 以及极点重数至少为 q。设 α 为满足 $-q<\alpha<p$ 的实数，则 $\mathcal{F}$ 在 $z=0$ 处不正规的充要条件是存在：

(a) 一个实数 γ 满足 $0<\gamma<1$；

(b) 点列 z_n 满足 $|z_n|<\gamma$；

(c) 函数列 $f_n\in\mathcal{F}$；

(d) 正数序列 $\rho_n\to 0^{+}$，

使得 $g_n(\xi)=\rho_n^{-\alpha}f_n\left(z_n+\rho_n(\xi)\right)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上的任意紧子集按球面距离一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $g(\xi)$，其零点重数至少为 p，极点重数至少为 q，并且它的级至多为 2。

引理 2.2 [8] 设 f 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个全纯函数。如果 f 的球面导数 $f^{\#}$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界，则 f 的级至多为 1。

引理 2.3 [8] 设 f 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个超越亚纯函数，$a\in C\setminus\{0\},k,n\in N^{+}$ 满足 $n\geq 2$。如果 f 的零点重数至少为 $k+1$，则 $f+a\left(f^{(k)}\right)^{n}$ 有无穷多个零点。

引理 2.4 设 $f(z)$ 为非常数有理函数，$a\in C\setminus\{0\},k,n\in N^{+}$ 满足 $n\geq 2$。如果 f 的零点重数至少为 $k+1$，则 $f+a\left(f^{(k)}\right)^{n}$ 至少存在一个零点。

引理 2.5 [9] 设 $f(z)=a_nz^{n}+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0+\dfrac{q(z)}{p(z)}$，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为常数且 $a_n\neq 0$，q 和 p 是两个互素的非零多项式，且满足 $\deg q<\deg p$。设 k 为正整数，b 为非零复数。如果 $f^{(k)}\neq b$，且 f 的零点重数至少为 $k+1$，则

$$f(z)=\frac{b(z-d)^{k+1}}{k!(z-c)},$$

其中 c 和 d 为两个不同的复常数。

引理 2.6 [8] 设 g 为非常数亚纯函数，$n(\geq 2)$ 为正整数，$b\neq 0$ 为有限复常数。如果 g 的零点重数至少为 $k+1$，则 $\left(g^{(k)}(\xi)\right)^{n}-b$ 至少含有两个不同的零点。

3. 定理 A 的证明

不失一般性，假设 $D=\Delta=\{z:|z|<1\}$。用反证法，不妨设 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规。

情形 1 当 $b=0$。显然，$f\neq 0$。否则 $f(z_0)=0$，因为 f 的所有零点的重数至少为 $k+1$ 则有 $L(f)(z_0)=0$。因此

$$f(z_0)+a(L(f))^n(z_0)=0$$

结合定理 A 的假设可推断出 $f^{(k)}(z_0)=c$，得到矛盾。因此 $f\neq 0$。利用引理 2.1，可得存在复数列 $\{z_j\}$ 满足 $z_j\to z_0$，以及正数列 $\{\rho_j\}$ 满足 $\rho_j\to 0^+$，使得

$$g_j(\xi)=\rho_j^{-\frac{nk}{n-1}}f_j(z_j+\rho_j\xi)\to g(\xi)$$

在 $\mathbb{C}$ 内局部一致收敛，其中 $g(\xi)$ 为 $\mathbb{C}$ 中的非常数亚纯函数，并且对于任意 $\xi\in\mathbb{C}$，$g^{\#}(\xi)\leq M$。由 Hurwitz 定理可知 $g\neq 0$。

$$\begin{aligned}&\rho_j^{-\frac{nk}{n-1}}\left\{f_j(z_j+\rho_j\xi)+a\left[L(f_j)(z_j+\rho_j\xi)\right]^n\right\}\\&=\rho_j^{-\frac{nk}{n-1}}\left\{\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}g_j(\xi)+a\left[\rho_j^{\frac{k}{n-1}}g_j^{(k)}(\xi)+\rho_j^{\frac{n+k-1}{n-1}}a_{k-1}(z_j+\rho_j\xi)g_j^{(k-1)}+\cdots+\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}a_0(z_j+\rho_j\xi)g_j(\xi)\right]^n\right\}\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{j\to\infty}\rho_j^{-\frac{nk}{n-1}}\left\{f_j(z_j+\rho_j\xi)+a\left[L(f_j)(z_j+\rho_j\xi)\right]^n\right\}=g(\xi)+a\left(g^{(k)}\right)^n(\xi)$$

下面我们断言

$$g(\xi)+a\left(g^{(k)}\right)^n(\xi)\neq 0$$

否则，假设存在 ξ_0，使得

$$g(\xi_0)+a\left(g^{(k)}\right)^n(\xi_0)=0$$

如果 $g+a\left(g^{(k)}\right)^n\equiv 0$，那么 g 不存在极点，由此可知 g 为全纯函数。由于 $g^{\#}(\xi)\leq M$，根据引理 2.2 可知 g 的级至多是 1。注意到 $g\neq 0$，可计算出 $g=\mathrm{e}^{c\xi+d}$，其中 $c\neq 0,d$ 为常数，那么

$$g+a\left(g^{(k)}\right)^n=\mathrm{e}^{c\xi+d}+a\left(c^k\mathrm{e}^{c\xi+d}\right)^n=\mathrm{e}^{c\xi+d}\left[1+ac^{nk}\mathrm{e}^{(n-1)(c\xi+d)}\right]\equiv 0$$

因此

$$\mathrm{e}^{(n-1)(c\xi+d)}\equiv-\frac{1}{ac^{nk}}$$

注意到 $n\geq 2$，所以上式是不可能成立的，因此 $g+a\left(g^{(k)}\right)^n\not\equiv 0$。注意到在 $\mathbb{C}$ 中任意一个不包含 g 的极点的紧集中，有

$$\rho_j^{-\frac{nk}{n-1}}\left[f_j(z_j+\rho_j\xi)+a\left(L(f_j)(z_j+\rho_j\xi)\right)^n\right]\to g(\xi)+a\left(g^{(k)}\right)^n(\xi)$$

利用 Hurwitz 定理，在 $\mathbb{C}$ 中存在收敛于 ξ_0 的序列 $\{\xi_j\}$，使得对任意足够大的 j，有

$$f_j(z_j+\rho_j\xi_j)+a\left(L(f_j)(z_j+\rho_j\xi_j)\right)^n=0$$

根据定理 A 的条件 $f+a\left(L\left(f\right)\right)^{n}=b\Rightarrow f^{(k)}=c$，可得 $f_j^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)=c$
因而

$$g^{(k)}\left(\xi_0\right)=\lim_{j\to\infty}g_j^{(k)}\left(\xi_j\right)=\lim_{j\to\infty}\rho_j^{-\frac{k}{n-1}}f_j^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)=\infty$$

所以，ξ_0 为 g 的一个极点。这与 $g\left(\xi_0\right)+a\left(g^{(k)}\right)^{n}\left(\xi_0\right)=0$ 矛盾。因此 $g+a\left(g^{(k)}\right)^{n}\neq 0$。这与引理 2.3 和引理 2.4 的结论矛盾。

情形 2 当 $b\neq 0$。由引理 2.1 可知，存在一个复数序列 $\left\{z_j\right\}$，满足 $z_j\to z_0$，和一个正数序列 $\left\{\rho_j\right\}$，满足 $\rho_j\to 0^{+}$，使得 $g_j\left(\xi\right)=\rho_j^{-k}f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)\to g\left(\xi\right)$。在 $\mathbb{C}$ 的紧子集内局部一致收敛，其中 $g\left(\xi\right)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个非常数亚纯函数并且 $g\left(\xi\right)$ 的所有零点的重数至少为 $k+1$，$g\left(\xi\right)$ 的级至多为 2。

$$\begin{aligned}&f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)+aL\left(f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)\right)^{n}\\&=\rho_j^{k}g_j\left(\xi\right)+a\left(g_j^{(k)}\left(\xi\right)+\rho_j a_{k-1}\left(z_j+\rho_j\xi\right)g_j^{(k-1)}\left(\xi\right)+\cdots+\rho_j^{k}a_0\left(z_j+\rho_j\xi\right)g_j\left(\xi\right)\right)^{n}\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{j\to\infty}f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)+aL\left(f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)\right)^{n}=a\left(g^{(k)}\right)^{n}\left(\xi\right)$$

我们断言

$$a\left(g^{(k)}\right)^{n}\left(\xi\right)\neq b$$

否则，假设存在序列 ξ_0，使得 $a\left(g^{(k)}\right)^{n}\left(\xi_0\right)=b$。若 $a\left(g^{(k)}\right)^{n}\left(\xi_0\right)\equiv b$，则 g 是级为 k 的多项式。但这与 f 的所有零点重数至少为 $k+1$ 矛盾，因此 $a\left(g^{(k)}\right)^{n}\left(\xi\right)\not\equiv b$。注意到在 $\mathbb{C}$ 中任意一个不包含 g 的极点的紧集中，有

$$\begin{aligned}\rho_j^{k}g_j\left(\xi\right)+a\left(g_j^{(k)}\right)^{n}\left(\xi\right)-b&=f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)+a\left(L\left(f_j\right)\left(z_j+\rho_j\xi\right)\right)^{n}-b\\&\to a\left(g^{(k)}\right)^{n}-b\end{aligned}$$

因此，通过 Hurwitz 定理，在 $\mathbb{C}$ 中存在收敛于 ξ_0 的序列 $\left\{\xi_j\right\}$，使得对于足够大的 j，有

$$f_j\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)+a\left(L\left(f_j\right)\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)\right)^{n}=b$$

按照定理 A 中的条件可知 $f+a\left(L\left(f\right)\right)^{n}=b\Rightarrow f^{(k)}=c$，得到 $f_j^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)=c$
因此

$$g^{(k)}\left(\xi_0\right)=\lim_{j\to\infty}g_j^{(k)}\left(\xi_j\right)=\lim_{j\to\infty}f_j^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi\right)=c$$

由此意味着 $ac^{n}=b$，这与 $ac^{n}\neq b$ 矛盾。因此 $a\left(g^{(k)}\right)^{n}\neq b$。然而这与引理 2.6 的结论矛盾。

4. 定理 B 的证明

不失一般性，我们假设 $D=\Delta=\left\{z:\left|z\right|<1\right\}$。假设定理结论不成立，不妨设 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规。

情形 1 当 $b=0$。显然，$f\neq 0$。否则，若 $f\left(z_0\right)=0$，因为 f 的所有零点的重数至少为 $k+1$。则有 $L\left(f\right)\left(z_0\right)=0$。因此 $f\left(z_0\right)+a\left(L\left(f\right)\right)^{n}\left(z_0\right)=0$。

结合定理 B 的条件可推断出 $f\left(z_0\right)=c$，注意到 $c\neq 0$，矛盾。因此 $f\neq 0$ 利用引理 2.1，可得存在复数列 $\left\{z_j\right\}$ 满足 $z_j\to z_0$，以及正数列 $\left\{\rho_j\right\}$ 满足 $\rho_j\to 0^{+}$，使得

$$g_j(\xi)=\rho_j^{-\frac{nk}{n-1}}f_j(z_j+\rho_j\xi)\to g(\xi)$$

在$\mathbb{C}$内局部一致收敛，其中$g(\xi)$为$\mathbb{C}$中的非常数亚纯函数，并且对于任意$\xi\in\mathbb{C}$，$g^{\#}(\xi)\le M$。由Hurwitz定理可知$g\ne 0$。

$$\rho_j^{-\frac{nk}{n-1}}\left\{f_j(z_j+\rho_j\xi)+a\left[L(f_j)(z_j+\rho_j\xi)\right]^n\right\}$$
$$=\rho_j^{-\frac{nk}{n-1}}\left\{\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}g_j(\xi)+a\left[\rho_j^{\frac{k}{n-1}}g_j^{(k)}(\xi)+\rho_j^{\frac{n+k-1}{n-1}}a_{k-1}(z_j+\rho_j\xi)g_j^{(k-1)}+\cdots+\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}a_0(z_j+\rho_j\xi)g_j(\xi)\right]^n\right\}$$

所以

$$\lim_{j\to\infty}\rho_j^{-\frac{nk}{n-1}}\left\{f_j(z_j+\rho_j\xi)+a\left[L(f_j)(z_j+\rho_j\xi)\right]^n\right\}=g(\xi)+a\left(g^{(k)}\right)^n(\xi)$$

我们断言

$$g(\xi)+a\left(g^{(k)}\right)^n(\xi)\ne 0$$

否则，假设存在ξ_0，使得$g(\xi_0)+a\left(g^{(k)}\right)^n(\xi_0)=0$。如果$g+a\left(g^{(k)}\right)^n\equiv 0$，那么$g$不存在极点，由此可知$g$为全纯函数。由于$g^{\#}(\xi)\le M$，根据引理2.2可知$g$的级至多是1。注意到$g\ne 0$，可计算出$g=\mathrm{e}^{c\xi+d}$，其中$c\ne 0$，$d$为常数，那么

$$g+a\left(g^{(k)}\right)^n=\mathrm{e}^{c\xi+d}+a\left(c^k\mathrm{e}^{c\xi+d}\right)^n=\mathrm{e}^{c\xi+d}\left[1+ac^{nk}\mathrm{e}^{(n-1)(c\xi+d)}\right]\equiv 0$$

因此

$$\mathrm{e}^{(n-1)(c\xi+d)}\equiv-\frac{1}{ac^{nk}}$$

注意到$n\ge 2$，所以上式是不可能成立的，因此$g+a\left(g^{(k)}\right)^n\not\equiv 0$注意到在$\mathbb{C}$中任意一个不包含$g$的极点的紧集中，有

$$g_j(\xi)+a\left(g_j^{(k)}\right)^n(\xi)=\rho_j^{-\frac{nk}{n-1}}\left[f_j(z_j+\rho_j\xi)+a\left(L(f_j)(z_j+\rho_j\xi)\right)^n\right]$$
$$\to g(\xi)+a\left(g^{(k)}\right)^n(\xi)$$

利用Hurwitz定理，在$\mathbb{C}$中存在收敛于ξ_0的序列$\{\xi_j\}$，使得对任意足够大的j，有

$$f_j(z_j+\rho_j\xi_j)+a\left(L(f)(z_j+\rho_j\xi_j)\right)^n=0$$

根据定理B的条件$f+a\left(L(f)\right)^n=b\Rightarrow f=c$，可得$f_j(z_j+\rho_j\xi_j)=c$

因此

$$g(\xi_0)=\lim_{j\to\infty}g_j(\xi_j)=\lim_{j\to\infty}\rho_j^{-\frac{nk}{n-1}}f_j(z_j+\rho_j\xi_j)=\infty$$

由此可知ξ_0是g的一个极点，这与我们的假设条件$g(\xi_0)+a\left(g^{(k)}\right)^n(\xi_0)=0$矛盾。因此，$g+a\left(g^{(k)}\right)^n\ne 0$。然而这与引理2.3和引理2.4的结论矛盾。

情形2 当$b\ne 0$。由引理2.1可知，存在一个复数序列$\{z_j\}$，满足$z_j\to z_0$，和一个正数序列$\{\rho_j\}$，满足$\rho_j\to 0^+$，使得$g_j(\xi)=\rho_j^{-k}f_j(z_j+\rho_j\xi)\to g(\xi)$，在$\mathbb{C}$的紧子集内局部一致收敛，其中$g(\xi)$是$\mathbb{C}$中

的一个非常数亚纯函数并且 $g(\xi)$ 的所有零点的重数至少为 $k+1$。此外，$g(\xi)$ 的级至多为 2。

$$\begin{aligned}&f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)+aL\left(f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)\right)^n\\&=\rho_j^k g_j(\xi)+a\left(g_j^{(k)}(\xi)+\rho_j a_{k-1}\left(z_j+\rho_j\xi\right)g_j^{(k-1)}(\xi)+\cdots+\rho_j^k a_0\left(z_j+\rho_j\xi\right)g_j(\xi)\right)^n\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{j\to\infty} f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)+aL\left(f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)\right)^n=a\left(g^{(k)}\right)^n$$

我们断言

$$a\left(g^{(k)}\right)^n(\xi)\neq b$$

否则，假设存在序列 ξ_0，使得 $a\left(g^{(k)}\right)^n(\xi_0)=b$。若 $a\left(g^{(k)}\right)^n(\xi)\equiv b$，则 g 是级为 k 的多项式。但这与 f 的所有零点重数至少为 $k+1$ 矛盾，因此 $a\left(g^{(k)}\right)^n(\xi)\not\equiv b$。注意到在 $\mathbb{C}$ 中任意一个不包含 g 的极点的紧集中，有

$$\rho_j^k g_j(\xi)+a\left(g_j^{(k)}\right)^n(\xi)-b=f_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)+a\left(L\left(f_j\right)\left(z_j+\rho_j\xi\right)\right)^n-b\to a\left(g^{(k)}\right)^n-b$$

因此，通过 Hurwitz 定理，在 $\mathbb{C}$ 中存在收敛于 ξ_0 的序列 $\left\{\xi_j\right\}$，使得对于足够大的 j，有

$$f_j\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)+a\left(L\left(f_j\right)\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)\right)^n=b$$

按照定理 B 中的条件可知 $f+a\left(L(f)\right)^n=b\Rightarrow f=c$，得到 $f_j\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)=c$

因此

$$g(\xi_0)=\lim_{j\to\infty} g_j\left(\xi_j\right)=\lim_{j\to\infty}\rho_j^{-k} f_j\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)=\infty$$

这意味着 ξ_0 是 g 的一个极点。这与 $a\left(g^{(k)}\right)^n(\xi_0)=b$ 矛盾。所以，$a\left(g^{(k)}\right)^n\neq b$。然而这又与引理 2.6 矛盾。

基金项目

国家自然科学基金资助(11961068)。

参考文献

[1] Xu, Y., Wu, F. and Liao, L. (2009) Picard Values and Normal Families of Meromorphic Functions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*: *Section A Mathematics*, **139**, 1091-1099. https://doi.org/10.1017/s0308210508000462

[2] Hayman, W.K. (1964) Meromophic Functions. Clarendon Press.

[3] 陈玮，王琼，袁文俊. 涉及 Picard 例外值的亚纯函数正规族[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2021, 42(1): 47-58.

[4] 胡雅倩. 关于亚纯函数正规族与正规函数的几个结果[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京师范大学, 2021.

[5] Ye, Y.S. (1994) A Picard Type Theorem and Bloch Law. *Chinese Annals of Mathematics*, **1**, 75-80.

[6] Fang, M. and Zalcman, L. (2008) On the Value Distribution of $f + a(f')^n$. *Science in China Series A*: *Mathematics*, **51**, 1196-1202. https://doi.org/10.1007/s11425-008-0022-2

[7] Zalcman, L. (1998) Normal Families: New Perspectives. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **35**, 215-230. https://doi.org/10.1090/s0273-0979-98-00755-1

[8] Yang, L. (1991) Presice Fundamental Inequalities and Sum of Deficiences. *Science in China*, *Series A*, **34**, 157-165.

[9] Wang, Y.F., Fang, M.L. and Drasin, D. (1998) Normal Families and the Nevanlinna Theory. *Acta Mathematica Scientia*, **14**, 17-26.