

互连网络 $C_n \times S_m$ 的谱特征及其能量

杨金娜, 陈语哲, 梁志鹏*

塔里木大学信息工程学院, 新疆 阿拉尔

收稿日期: 2025年2月6日; 录用日期: 2025年3月10日; 发布日期: 2025年3月25日

摘要

图的特征值集及其多重性称为谱, 它可以用来获得图的各种拓扑性质, 如连通性、韧性等。师海忠利用图的笛卡尔乘积方法构建了新的笛卡尔乘积互连网络 $C_n \times S_m$ 。本文根据分析研究互连网络的拓扑结构, 刻画了 $C_n \times S_m$ 的邻接谱和Laplace谱。进一步, 根据Laplace矩阵的Fiedler向量对 $C_n \times S_m$ 进行了图划分。另外, 我们还研究得到了谱能量表达式。

关键词

互连网络, 邻接谱, Laplace谱, 能量

Spectral Characteristics and Energy of Interconnected Networks $C_n \times S_m$

Jinna Yang, Yuzhe Chen, Zhipeng Liang*

College of Information Engineering, Tarim University, Alar Xinjiang

Received: Feb. 6th, 2025; accepted: Mar. 10th, 2025; published: Mar. 25th, 2025

Abstract

The eigenvalue set and its multiplicity of a graph are called spectra, which can be used to obtain various topological properties of the graph, such as connectivity, resilience, etc. Shi Haizhong used the Cartesian product method of graphs to construct a new Cartesian product interconnection network $C_n \times S_m$. This article describes the adjacency spectrum and Laplace spectrum of $C_n \times S_m$ based on the analysis and research of the topology structure of interconnected networks. Furthermore, $C_n \times S_m$ was graphically partitioned based on the Fiedler vector of the Laplace matrix. In addition, we have also studied the expression of spectral energy.

*通讯作者。

文章引用: 杨金娜, 陈语哲, 梁志鹏. 互连网络 $C_n \times S_m$ 的谱特征及其能量[J]. 理论数学, 2025, 15(3): 262-272.
DOI: 10.12677/pm.2025.153101

Keywords

Interconnected Network, Adjacency Spectrum, Laplace Spectrum, Energy

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

根据 Laplace 谱确定的 Fiedler 向量进行的图划分是一种有效的图分割方法[1], 它基于图的特征值分解和 Fiedler 向量的特性, 是网络分析及其应用有效研究方法之一。Laplace 能量在图论、信号处理、图像处理等多个领域也具有广泛的应用前景。因此, 深入研究 Laplace 谱与图能量及其关系对于推动相关领域的发展具有重要意义。

图的笛卡尔乘积方法是由 Sabidussi 在 1957 年和 1960 年提出的一种重要的构图方法, 它是从已知图构造更大图的有效手段, 也是网络设计的一种核心手段。基于笛卡尔乘积互连网络的谱对于研究图论之所以重要, 主要在于可以用其计算图的诸多不变量, 如特征值及其重数等关键参数。在文献[2]-[6]中, 对于一些著名的互连网络谱的研究, 如(广义)超立方体、折叠超立方体、增广超立方体的(拉普拉斯)谱等, 虽然给出了特征值, 但并未得到相应重数。而本文利用其公式进行了具体证明研究, 如互连网络 $C_n \times S_m$ 的邻接谱、拉普拉斯谱和能量公式, 我们先给出环网 C_n 和星图 S_m 的定义, 利用公式, 得到并证明研究 $C_n \times S_m$ 的邻接谱和 Laplace 谱, 并对其顶点进行了划分, 再利用互连网络 $C_n \times S_m$ 的特征谱, 计算得到了其能量。

下面给出本文所需的一些定义符号。

2. 基本概念

定义 1 [2] 环网 C_n 是无向图, 是循环无向图 $G(n, \pm 1)$, 也是 Cayley 图。

Cayley 图 Star 网络 S_m , 对于给定的 S_m Star 网络 ($m \geq 2$), 是如下 Cayley 图 $C_\Gamma(P)$, $\Gamma = S_m$ 是集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的对称群, $P = \{123 \dots (i-1)i(i+1) \dots n / 2 \leq i \leq n\}$ 即为图 S_m , 环网 C_n 与 Star 网络的笛卡尔乘积互连网络表示为 $C_n \times S_m$ 。

根据定义, 互连网络 $C_n \times S_m$ 有如下性质:

1) $C_n \times S_m$ 有 $n \cdot m!$ 个顶点、 $\frac{1}{2}(m+1)! \cdot n$ 条边。

2) $C_n \times S_m$ 是 $m+1$ 正则的连通图。

为了方便, 互连网络 $C_n \times S_m$ 可用如下二元 n 序列来定义。

设有 C_n 的顶点为 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \dots, \textcircled{n} \in \{(0, n) / \textcircled{i} \in N\}$, S_m 的顶点为 $1, 2, \dots, N \in \{(0, m) / j \in N\}$, 当且仅当 $j\textcircled{i}$ 有且仅有一个坐标不同。具体示例如下图 1。

定义 2 [3] 设 G 是一个简单图, $A(G)$ 是对应的邻接矩阵。由特征多项式 $|\lambda E - A| = 0$ 的解构成所有特征值集合, 称为图 G 邻接矩阵的谱, 记作 $Sp(G)$ 。

$$Sp(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 为特征值, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为特征值对应的重数。

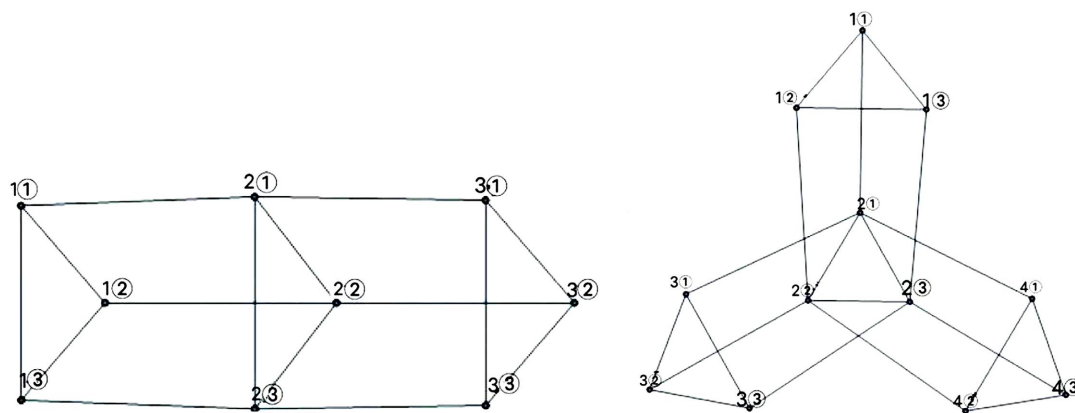


Figure 1. Interconnection network $C_3 \times S_3$ and interconnection network $C_3 \times S_4$

图 1. 互连网络 $C_3 \times S_3$ 和互连网络 $C_3 \times S_4$

定义 3 [3] 设 L 是 Laplace 矩阵, 由 $L = \Delta - A$, 以及特征方程 $|\lambda E - L| = 0$ 的解构成所有特征值的集合, 称为 Laplace 谱, 记作 $Sp(L)$ 。

$$Sp(L) = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

其中 D 与 A 分别是与 L 同阶的对角矩阵。矩阵 D 的对角线上的元素为对应的正则度, 矩阵 A 为邻接矩阵。

定义 4 [4] [5] 邻接谱能量为 $E(G) = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|$ 、Laplace 谱能量为 $LE(G) = \sum_{j=1}^n \left| \lambda_j - \frac{2m}{n} \right|$ 。

为了完成结论的证明, 先给出下述的三个引理。

$A(S_m)$ 为其对应的邻接矩阵。如:

$$A(S_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(S_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

经观察易得图 S_4 的邻接矩阵 $A(S_4)$ 为 $A(S_4) = \begin{pmatrix} A(S_3) & I_{1 \times 3} \\ I_{1 \times 3}^T & 0_1 \end{pmatrix}$ 。一般地, 图 S_m 的邻接矩阵 $A(S_m)$ 为

$$A(S_m) = \begin{pmatrix} A(S_{m-1}) & I_{1 \times (m-1)} \\ I_{1 \times (m-1)}^T & 0_1 \end{pmatrix}。$$

引理 1 Star 网络 S_m 的邻接矩阵为 $A(S_m) = \begin{pmatrix} A(S_{m-1}) & I_{1 \times (m-1)} \\ I_{1 \times (m-1)}^T & 0_1 \end{pmatrix}$, 邻接谱为表 1。

$$\text{证明: Star 网络 } S_m \text{ 的邻接谱为 } \lambda E - A(S_m) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - (m-1))\lambda^{m-2}, \text{ 当}$$

$(\lambda^2 - (m-1))\lambda^{m-2} = 0$, 得到 $\lambda_1 = 0$ (重数为 $m-2$), $\lambda_2 = \sqrt{m-1}$ (重数为 1), $\lambda_3 = -\sqrt{m-1}$ (重数为 1)。

同样地, 据文献[6] Star 网络 S_m 、环网 C_n 的邻接谱如表 1、表 2:

Table 1. Adjacency spectrum of Star network S_m

表 1. Star 网络 S_m 的邻接谱

m	特征值	重数
3	$\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0$	1, 1, 1
4	$\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0$	1, 1, 2
5	$\sqrt{4}, -\sqrt{4}, 0$	1, 1, 3
6	$\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0$	1, 1, 4
...	...	...
m	$\sqrt{m-1}, -\sqrt{m-1}, 0$	1, 1, $m-2$

Table 2. Adjacent spectrum of ring network C_n

表 2. 环网 C_n 的邻接谱

n	特征值	重数
3	2, -1	1, 2
4	3, -1	1, 3
5	4, -1	1, 4
6	5, -1	1, 5
...	...	...
n	$n-1, -1$	1, $n-1$

引理 2 [1] 设图 G 和图 H 的特征根分别是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 和 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, 则笛卡尔乘积图的特征值为 $\lambda_i + \mu_j$, 其中 $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ 。

引理 3 [3] 已知图的邻接矩阵为 A , 邻接谱

$$Sp(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_t \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_t \end{pmatrix},$$

正则度为 Δ , 则它的 Laplace 谱为

$$Sp(L) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \Delta & \lambda_2 + \Delta & \cdots & \lambda_t + \Delta \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_t \end{pmatrix}$$

3. 互连网络 $C_n \times S_m$ 的谱

本节主要刻画互连网络 $C_n \times S_m$ 的邻接谱和 Laplace 谱。进一步, 根据 Laplace 矩阵的 Fiedler 向量对 $C_n \times S_m$ 进行了图划分。

3.1. $C_n \times S_m$ 的邻接谱

引理 2.1 在图 $C_n \times S_m$ 中: 当 n 与 m 共同改变时, 图 $C_n \times S_m$ 的邻接矩阵可表示为

$$A(C_n \times S_m) = \begin{pmatrix} A_m & I_m & O_m & \cdots & I_m \\ I_m & A_m & I_m & \cdots & O_m \\ O_m & I_m & A_m & \cdots & O_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_m & O_m & O_m & \cdots & A_m \end{pmatrix}, \text{ 这是一个 } n \text{ 阶分块对角矩阵, 其中, } S_m \text{ 是 Star 网络 } S_m \text{ 的邻接矩}$$

阵, 而 I_m 与 A_m 分别是与 S_m 同阶的分块单位矩阵和零矩阵。

定理 2.2 对于给定的 n 与 m ($n \geq 3, m \geq 2$) 中, 互连网络 $C_n \times S_m$ 的邻接谱为

$$Sp(C_n \times S_m) = \begin{pmatrix} n-1-\sqrt{m-1} & n-1 & n-1+\sqrt{m-1} & -1-\sqrt{m-1} & -1 & -1+\sqrt{m-1} \\ 1 & m-2 & 1 & n-1 & (m-2)(n-1) & n-1 \end{pmatrix}$$

证明: 对于给定的 n 与 m ($n \geq 3, m \geq 2$) 中, Star 网络 S_m 的特征值为: $0, -\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}$, 重数分别为 $m-2, 1, 1$ 环网 C_n 的特征值为: $n-1, -1$ 重数分别为 $1, n-1$ 。

由引理 2, 得到 $C_n \times S_m$ 的特征值为 $n-1-\sqrt{m-1}, n-1, n-1+\sqrt{m-1}, -1-\sqrt{m-1}, -1, -1+\sqrt{m-1}$ 。其重数分别为 $1, m-1, 1, n-1, (m-1)(n-1), n-1$

综上所述, $C_n \times S_m$ 的谱

$$Sp(C_n \times S_m) = \begin{pmatrix} n-1-\sqrt{m-1} & n-1 & n-1+\sqrt{m-1} & -1-\sqrt{m-1} & -1 & -1+\sqrt{m-1} \\ 1 & m-2 & 1 & n-1 & (m-2)(n-1) & n-1 \end{pmatrix}$$

通过利用定理 2.2 我们可以很容易的得到一些维数较低的互连网络的邻接谱。如:

$$Sp(C_3 \times S_3) = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 2 & 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} & -1 & -1+\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Sp(C_3 \times S_4) = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} & 2 & 2+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -1 & -1+\sqrt{3} \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2. $C_n \times S_m$ 的 Laplace 谱

根据引理 3, 互连网络的 Laplace 谱实际上是由网络的邻接谱的特征值与其正则度经过逐项相加确定的, 且对应特征值的重数不变。因此, 互连网络 $C_n \times S_m$ 的 Laplace 谱特征有如下结论:

定理 2.3 互连网络 $C_n \times S_m$ 的 Laplace 谱为

$$L(C_n \times S_m) = \begin{pmatrix} n-\sqrt{m-1}+m & n+m & n+\sqrt{m-1}+m & m-\sqrt{m-1} & m & m+\sqrt{m-1} \\ 1 & m-2 & 1 & n-1 & (m-2)(n-1) & n-1 \end{pmatrix}$$

证明: 根据定义性质, 互连网络 $C_n \times S_m$ 的正则度为 $m+1$, 邻接矩阵特征值为 $n-1-\sqrt{m-1}, n-1, n-1+\sqrt{m-1}, -1-\sqrt{m-1}, -1, -1+\sqrt{m-1}$ 。

由引理 3 可知:

$$L(C_n \times S_m) = \begin{pmatrix} n-\sqrt{m-1}+m & n+m & n+\sqrt{m-1}+m & m-\sqrt{m-1} & m & m+\sqrt{m-1} \\ 1 & m-2 & 1 & n-1 & (m-2)(n-1) & n-1 \end{pmatrix}$$

通过利用定理 2.3 我们可以很容易的得到一些维数较低的互连网络的 Laplace 谱。如:

$$L(C_3 \times S_3) = \begin{pmatrix} 6-\sqrt{2} & 6 & 6+\sqrt{2} & 3-\sqrt{2} & 3 & 3+\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L(C_3 \times S_4) = \begin{pmatrix} 7-\sqrt{3} & 7 & 7+\sqrt{3} & 4-\sqrt{3} & 4 & 4+\sqrt{3} \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

3.3. $C_n \times S_m$ 的顶点划分

与 Laplace 谱的第二小特征值相关的特征向量(称为 Fiedler 向量)可用于对图划分。为此,我们根据第二小特征值的 Fiedler 向量中的正负值对应的顶点划分,将互连网络 $C_n \times S_m$ 的顶点划分为两部分。根据 Fiedler 向量的值较大的顶点通常是图中的关键节点,去掉这些节点会显著影响图的连通性,如去掉这些关键节点会导致电力网络的断开,从而影响电力供应。

算法如下:

算法 2.4

输入: 互连网络 $C_n \times S_m$ 的邻接矩阵 A

$$V_1 \leftarrow \emptyset, V_2 \leftarrow \emptyset$$

计算度矩阵 Δ , $L = \Delta - A$

计算 L 的特征值与特征向量

记 e_2 为 L 的第二小特征值

记 c_2 为 e_2 对应的特征向量

对所有 $x \in c_2$

若 $x > 0$ 则 $V_1 \leftarrow V_1 \cup \{x\}$

若 $x < 0$ 则 $V_2 \leftarrow V_2 \cup \{x\}$

输出: 两个顶点集合 V_1 和 V_2

例 1 互连网络 $C_3 \times S_4$ 的顶点划分。

解: 根据上述算法 2.4, 我们设计了顶点划分程序代码(见附录), 得到了互连网络 $C_3 \times S_4$ 的顶点划分集 V_1 和 V_2 , 其中集合 V_1 是指互连网络 $C_3 \times S_4$ 的 Fiedler 向量中正值对应的顶点, 集合 V_2 是指互连网络 $C_3 \times S_4$ 的 Fiedler 向量中负值对应的顶点。具体对应顶点如下:

集合 V_1 : $\{(0,0), (0,2), (0,3), (1,0), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,0), (3,2), (3,3)\}$

集合 V_2 : $\{(0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (2,0)\}$

4. $C_n \times S_m$ 的能量

根据两个能量的定义公式, 由上节得到的谱特征值, 下面我们重点分类讨论邻接谱能量、Laplace 谱能量并得其能量公式。

4.1. 邻接谱能量

根据定义 4, 邻接谱的能量公式为 $E(G) = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|$, λ 为邻接谱特征值, 再由定理 2.2, 互连网络 $C_n \times S_m$ 的邻接谱为

$$Sp(C_n \times S_m) = \begin{pmatrix} n-1-\sqrt{m-1} & n-1 & n-1+\sqrt{m-1} & -1-\sqrt{m-1} & -1 & -1+\sqrt{m-1} \\ 1 & m-2 & 1 & n-1 & (m-2)(n-1) & n-1 \end{pmatrix}$$

($n \geq 3, m \geq 2$), 我们可以得到互连网络 $C_n \times S_m$ 的邻接谱特征值和重数并代入邻接谱的能量公式

$E(G) = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|$, 有互连网络 $C_n \times S_m$ 的邻接谱能量为

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \\ &= \sum_{i=1}^1 |n-1-\sqrt{m-1}| + \sum_{i=1}^{m-2} |n-1| + \sum_{i=1}^1 |n-1+\sqrt{m-1}| \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} |-1-\sqrt{m-1}| + \sum_{i=1}^{(m-2)(n-1)} |-1| + \sum_{i=1}^{n-1} |-1+\sqrt{m-1}| \\ &= |n-1-\sqrt{m-1}| + (m-2)|n-1| + |n-1+\sqrt{m-1}| \\ &\quad + (n-1)|-1-\sqrt{m-1}| + (m-2)(n-1) + (n-1)|-1+\sqrt{m-1}| \\ &= |n-1-\sqrt{m-1}| + (m-2)(n-1) + (n-1+\sqrt{m-1}) \\ &\quad + (n-1)(1+\sqrt{m-1}) + (m-2)(n-1) + (n-1)(-1+\sqrt{m-1}) \\ &= 2mn - 2m - 3n + 3 + (2n-1)\sqrt{m-1} + |n-1-\sqrt{m-1}| \end{aligned}$$

已知 $(n \geq 3, m \geq 2)$ 。下面分情况讨论:

1) 当 $n-1 > \sqrt{m-1}$, 即 $n > \sqrt{m-1} + 1 \geq 1$

$$\begin{aligned} E(G) &= 2mn - 2m - 3n + 3 + (2n-1)\sqrt{m-1} + (n-1-\sqrt{m-1}) \\ &= 2mn - 2m - 2n + 2 + (2n-2)\sqrt{m-1} \\ &= 2(m-1+\sqrt{m-1})(n-1) \end{aligned}$$

2) $n-1 \leq \sqrt{m-1}$, 即 $n \leq \sqrt{m-1} + 1$

$$\begin{aligned} E(G) &= 2mn - 2m - 3n + 3 + (2n-1)\sqrt{m-1} - (n-1-\sqrt{m-1}) \\ &= 2(m-2)(n-1) + 2n\sqrt{m-1} \end{aligned}$$

由上述讨论, 我们得到如下定理:

定理 3.1 1) 当 $n > \sqrt{m-1} + 1 \geq 1$, $E(G) = 2(m-1+\sqrt{m-1})(n-1)$

2) 当 $n \leq \sqrt{m-1} + 1$, $E(G) = 2(m-2)(n-1) + 2n\sqrt{m-1}$

4.2. Laplace 谱能量

根据定义 4, Laplace 谱能量为 $LE(G) = \sum_{j=1}^n \left| \lambda_j - \frac{2m}{n} \right|$, λ 为 Laplace 谱特征值, 再根据定理 2.3 互连网络 $C_n \times S_m$ 的 Laplace 谱为

$$L(C_n \times S_m) = \begin{pmatrix} n-\sqrt{m-1}+m & n+m & n+\sqrt{m-1}+m & m-\sqrt{m-1} & m & m+\sqrt{m-1} \\ 1 & m-2 & 1 & n-1 & (m-2)(n-1) & n-1 \end{pmatrix}$$

$(n \geq 3, m \geq 2)$, 我们可以得到互连网络 $C_n \times S_m$ 的 Laplace 谱特征值和重数并代入 Laplace 谱的能量公式 $LE(G) = \sum_{j=1}^n \left| \lambda_j - \frac{2m}{n} \right|$, 有

Laplace 谱能量为

$$\begin{aligned}
 LE(G) &= \sum_{j=1}^n \left| \lambda_j - \frac{2m}{n} \right| \\
 &= \sum_{i=1}^1 \left| n+m-\sqrt{m-1} - \frac{2m}{n} \right| + \sum_{i=1}^{m-2} \left| n+m - \frac{2m}{n} \right| + \sum_{i=1}^1 \left| n+m+\sqrt{m-1} - \frac{2m}{n} \right| \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \left| m-\sqrt{m-1} - \frac{2m}{n} \right| + \sum_{i=1}^{(m-2)(n-1)} \left| m - \frac{2m}{n} \right| + \sum_{i=1}^{n-1} \left| \sqrt{m-1} + m - \frac{2m}{n} \right| \\
 &= \left| n+m-\sqrt{m-1} - \frac{2m}{n} \right| + (m-2) \left| n+m - \frac{2m}{n} \right| + \left| n+m+\sqrt{m-1} - \frac{2m}{n} \right| \\
 &\quad + (n-1) \left| m-\sqrt{m-1} - \frac{2m}{n} \right| + (m-2)(n-1) \left| m - \frac{2m}{n} \right| + (n-1) \left| m+\sqrt{m-1} - \frac{2m}{n} \right|
 \end{aligned}$$

已知 $(n \geq 3, m \geq 2)$, n, m 为 N^+ , 故有 $m < m+n, -\sqrt{m-1} - \frac{2m}{n} < -\frac{2m}{n} < \sqrt{m-1} - \frac{2m}{n}$ 。下面分情况讨论:

1) 当 $n \geq 4$ 时, $m - \sqrt{m-1} - \frac{2m}{n} \geq m - \sqrt{m-1} - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} - \sqrt{m-1} \geq 0$

$$\begin{aligned}
 LE(G) &= \left(n+m-\sqrt{m-1} - \frac{2m}{n} \right) + (m-2) \left(n+m - \frac{2m}{n} \right) \\
 &\quad + \left(n+m+\sqrt{m-1} - \frac{2m}{n} \right) + (n-1) \left(m-\sqrt{m-1} - \frac{2m}{n} \right) \\
 &\quad + (m-2)(n-1) \left(m - \frac{2m}{n} \right) + (n-1) \left(m+\sqrt{m-1} - \frac{2m}{n} \right) \\
 &= m(nm-2m+n)
 \end{aligned}$$

4) 当 $n=3$ 时, $m - \sqrt{m-1} - \frac{2m}{n} = \frac{m}{3} - \sqrt{m-1}$

$$\begin{aligned}
 LE(G) &= \left| 3-\sqrt{m-1} + \frac{m}{3} \right| + (m-2) \left| 3 + \frac{m}{3} \right| + \left| 3+\sqrt{m-1} + \frac{m}{3} \right| + (n-1) \left| -\sqrt{m-1} + \frac{m}{3} \right| \\
 &\quad + (m-2)(n-1) \left| \frac{m}{3} \right| + (n-1) \left| \sqrt{m-1} + \frac{m}{3} \right| \\
 &= \left(3-\sqrt{m-1} + \frac{m}{3} \right) + (m-2) \left(3 + \frac{m}{3} \right) + \left(3+\sqrt{m-1} + \frac{m}{3} \right) + (n-1) \left| -\sqrt{m-1} + \frac{m}{3} \right| \\
 &\quad + (m-2)(n-1) \frac{m}{3} + (n-1) \left(\sqrt{m-1} + \frac{m}{3} \right)
 \end{aligned}$$

若 $-\sqrt{m-1} + \frac{m}{3} \geq 0$, 即 $m > \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}$, 则有 $LE(G) = m^2 + 3m$

若 $-\sqrt{m-1} + \frac{m}{3} < 0$, 即 $2 \leq m < \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}$, 则有 $LE(G) = m^2 + \frac{5m}{3} + 4\sqrt{m-1}$

由上述讨论, 我们得到如下定理:

定理 3.2

$$\text{当 } n=3, \quad LE(G) = \begin{cases} m^2 + 3m, & m > \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} \\ m^2 + \frac{5m}{3} + 4\sqrt{m-1}, & 2 \leq m < \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

当 $n \geq 4$, $LE(G) = m(nm-2m+n)$ 。

参考文献

- [1] Fiedler, M. (1973) Algebraic Connectivity of Graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **23**, 298-305.
<https://doi.org/10.21136/cmj.1973.101168>
- [2] 师海忠. 几类新的笛卡尔乘积互连网络[J]. 计算机科学, 2013, 40(S1): 265-270+306.
- [3] Brouwer, A.E. and Haemers, W.H. (2012) Spectra of Graphs. Springer.
- [4] Gutman, I. and Zhou, B. (2006) Laplacian Energy of a Graph. *Linear Algebra and Its Applications*, **414**, 29-37.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.09.008>
- [5] So, W., Robbiano, M., de Abreu, N.M. and Gutman, I. (2009) Applications of a Theorem by Ky Fan in the Theory of Graph Energy. *Linear Algebra and Its Applications*, **432**, 2163-2169.
- [6] Florkowski III, S.F. (2008) Spectral Graph Theory of the Hypercube. Naval Postgraduate School.

附 录

顶点划分程序代码:

```
import numpy as np
import networkx as nx
from scipy.sparse import csr_matrix
from scipy.sparse.linalg import eigsh

def create_node_index_map(graph):
    return {node: idx for idx, node in enumerate(graph.nodes())}

def laplacian_matrix(graph, node_index_map):
    n = len(node_index_map)
    row, col, data = [], [], []
    for u, nbrs in graph.adjacency():
        u_idx = node_index_map[u]
        degree_u = len(nbrs)
        for v in nbrs:
            v_idx = node_index_map[v]
            row.append(u_idx)
            col.append(v_idx)
            data.append(-1.0)
        row.append(u_idx)
        col.append(u_idx)
        data.append(degree_u)
    return csr_matrix((data, (row, col)), shape=(n, n), dtype=float)

def fiedler_vector_from_laplacian(L):
    eigvals, eigvecs = eigsh(L, k=2, which='SM')
    return eigvecs[:, 1].real

def partition_graph_by_fiedler_vector(fiedler_vec, node_index_map):
    partition = {+1: set(), -1: set()}
    for node, idx in node_index_map.items():
        sign = np.sign(fiedler_vec[idx])
        partition[sign].add(node)
    return partition

n = 4
m = 3
C = nx.cycle_graph(n)
```

```
S = nx.star_graph(m)

G = nx.cartesian_product(C, S)

node_index_map = create_node_index_map(G)

L = laplacian_matrix(G, node_index_map)

fiedler_vec = fiedler_vector_from_laplacian(L)

partition = partition_graph_by_fiedler_vector(fiedler_vec, node_index_map)

print("图的顶点划分结果: ")
for sign, nodes in partition.items():
    print(f"集合 {sign}: {nodes}")
```