

拓扑学中的同伦与基本群

杨秋花, 李进友*

广西民族师范学院数学与计算机科学学院, 广西 崇左

收稿日期: 2025年1月15日; 录用日期: 2025年2月25日; 发布日期: 2025年3月11日

摘要

本文主要研究拓扑空间中同伦的相关性质, 进而讨论道路的逆及乘法运算, 由此得到基本群, 通过证明知基本群为拓扑不变量, 最后利用基本群证明二维球面 S^2 不同胚于环面 T^2 。

关键词

拓扑空间, 同伦, 道路, 道路类, 基本群

Homotopy and Fundamental Group in Topology

Qiuhua Yang, Jinyou Li*

School of Mathematics and Computer Science, Guangxi Minzu Normal University, Chongzuo Guangxi

Received: Jan. 15th, 2025; accepted: Feb. 25th, 2025; published: Mar. 11th, 2025

Abstract

This article mainly studies the relevant properties of homotopy in topological spaces, and then discusses the inverse and multiplication operations of roads, thereby obtaining the fundamental group. By proving that the known fundamental group is a topological invariant, the fundamental group is finally used to prove that the two-dimensional sphere S^2 is different from the torus T^2 .

Keywords

Topological Space, Homotopy, Road, Road Class, Basic Group

*通讯作者。



1. 引言

道路本身就是一种映射, 由映射经过多次连续形变后得到同伦, 在拓扑学中一般会用道路替代曲线, 基本群便由此而来[1]。其中, 在闭曲面分类定理第二部分结论的证明中基本群起了很大的作用, 即要说明不同类型的闭曲面不同胚, 故只要说明它们的基本群不同构即可。本文给出同伦的定义及两个性质, 进而探讨了道路的逆和乘积两种运算, 得知道路的乘积运算具有连续性。通过对比发现道路乘法运算不满足结合律, 但对道路类乘法而言, 它可以满足结合律, 基本群便是在道路及其逆和乘法运算的基础上构建得到, 然后由定理 4.4 说明基本群为拓扑不变量, 最后利用乘积空间基本群的一个结论得出 T^2 的基本群同构于 $Z \times Z$, 从而证明 S^2 与 T^2 不同胚。

2. 同伦的定义与性质

已知 X 和 Y 分别为两个拓扑空间, 若把 X 到 Y 的全部集合记为 $C^0(X, Y) = \{f | f: (X, \tau_x) \rightarrow (Y, \tau_y)\}$, 其中 f 满足连续, 若要说明 f 与 g 具有同伦关系, 即说明映射 f 能够连续的形变为映射 g 。

定义 2.1 [1] 假定 $\forall f, g \in C^0(X, Y)$, 且 $f, g: X \rightarrow Y$ 为连续的映射, 假定有

$$H: X \times I \rightarrow Y \Rightarrow (x, t) \mapsto H(x, t) = H_t(x).$$

其中为 H 一个连续映射, $H_t: X \rightarrow Y, \forall t \in I = [0, 1]$ 或者 $H_t \in C(X, Y)$ 使得

$$H(x, 0) = H_0(x) = f(x), H(x, 1) = H_1(x) = g(x).$$

则 f 同伦于 g , 可符号化为 $f \simeq g$, 这时映射 H 便为连接 f 与 g 的一个同伦(或称为伦移), 简记为 $H: f \simeq g$ 或写为 $f \stackrel{H}{\simeq} g$ 。

命题 2.2 同伦为连续集 $C^0(X, Y)$ 上的一种等价关系。

证明 (1) 先证自反性。假定 $\forall f \in C^0(X, Y)$, 且 $f: X \rightarrow Y$, 若 $H(x, t) \equiv f(x), \forall t \in [0, 1]$, 因此

$$\begin{cases} t=0, H(x, 0) = f(x), \\ t=1, H(x, 0) = f(x). \end{cases} \Rightarrow f \stackrel{H}{\simeq} f.$$

这样的同伦称为常同伦。

(2) 再证对称性。设 $f \stackrel{H}{\simeq} g$, 则可得

$$\begin{cases} t=0, H(x, 0) = f(x), \\ t=1, H(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

若假定 $\bar{H}(x, t) = H(x, 1-t)$, 则

$$\begin{cases} t=0, \bar{H}(x, 0) = H(x, 1) = g(x), \\ t=1, \bar{H}(x, 1) = H(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

$$\Rightarrow g \stackrel{\bar{H}}{\simeq} f.$$

这里记 $\bar{H}$ 为 H 的逆。

(3) 最后证传递性。设 $f \stackrel{H_1}{\simeq} g \stackrel{H_2}{\simeq} k$, 要得 $f \stackrel{H_1 H_2}{\simeq} k$ 。从 $f \stackrel{H_1}{\simeq} g \stackrel{H_2}{\simeq} k$ 得, $f, g, k: X \rightarrow Y$,

$$\text{又或者} \left(X \xrightarrow{f, g, k} Y \right), \quad f \stackrel{H_1}{\simeq} g \Rightarrow \begin{cases} H_1(x, 0) = f(x), \\ H_1(x, 1) = g(x). \end{cases} \quad g \stackrel{H_2}{\simeq} k \Rightarrow \begin{cases} H_2(x, 0) = g(x), \\ H_2(x, 1) = k(x). \end{cases}$$

其中 $H_3 = H_1 H_2: X \times I \rightarrow Y$ 且

$$H_3(x, t) = H_1 H_2(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t), \\ H_2(x, 2t-1). \end{cases}$$

当 t 为 $\frac{1}{2}$ 时, $H_1(x, 2t) = g(x) = H_2(x, 2t-1)$, 因此 $H_3 = H_1 H_2$ 的假设成立。

由粘合引理可知[1], 它满足连续。由于

$$\begin{cases} t=0, H_3(x, 0) = H_1(x, 0) = f(x), \\ t=1, H_3(x, 1) = H_2(x, 1) = k(x). \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \stackrel{H_3}{\simeq} k = f \stackrel{H_1 H_2}{\simeq} k.$$

因此, 命题 2.2 得证。

命题 2.3 若 $f_0 \simeq f: X \rightarrow Y$, $g_0 \simeq g_1: Y \rightarrow Z$, 则 $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1: X \rightarrow Z$ 。

证明 设 $F: X \times I \rightarrow Y$, $G: Y \times I \rightarrow Z$, 则 $F: f_0 \simeq f_1$, $G: g_0 \simeq g_1$,

$$f_0 \stackrel{F}{\simeq} f_1 \Rightarrow \begin{cases} F(x, 0) = f_0(x), \\ F(x, 1) = f_1(x). \end{cases}$$

$$g_0 \stackrel{G}{\simeq} g_1 \Rightarrow \begin{cases} G(y, 0) = g_0(y), \\ G(y, 1) = g_1(y). \end{cases}$$

假定映射满足

$$H: X \times I \rightarrow Y \times I, (x, t) \mapsto H(x, t) = (F(x, t), t),$$

$$\Rightarrow G \circ H: X \times I \rightarrow Z.$$

$$\begin{cases} t=0, H(x, 0) = (F(x, 0), 0) = (f_0(x), 0), \\ t=1, H(x, 1) = (F(x, 1), 1) = (f_1(x), 1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=0, G \circ H(x, 0) = G(F(x, 0), 0) = G(f_0(x), 0) = g_0(f_0(x)) = g_0 \circ f_0(x), \\ t=1, G \circ H(x, 1) = G(F(x, 1), 1) = G(f_1(x), 1) = g_1(f_1(x)) = g_1 \circ f_1(x). \end{cases}$$

$$\Rightarrow g_0 \circ f_0 \stackrel{G \circ H}{\simeq} g_1 \circ f_1.$$

3. 道路与道路类的相关知识

3.1. 道路的定义与性质

定义 3.1.1 [1] [2] 假定 X 为一个拓扑空间, $I=[0,1]$ 为一个单位闭区间, 此时将 I 到 X 的一个连续映射 $a: I \rightarrow X$ 称为 X 上的一条道路。其中, 道路 a 的起点与终点分别记为 $a(0)$ 和 $a(1)$, 它们统称道路端点。(注意, 这里的道路并不是映射的像集, 而是用道路代替映射)

例 3.1.2 假定拓扑空间 X 满足道路连通, $\sigma, \tau \in C^0(I, X)$ 为 X 中的两条道路, 则有 $\sigma \simeq \tau$ 。

证明 设 $\sigma(0)=\sigma_0$, $\tau(0)=\tau_0$, $\sigma(1)=\sigma_1$, $\tau(1)=\tau_1$, 其中, $\sigma_0, \tau_0, \sigma_1, \tau_1 \in X$, 由于 X 道路连通, 因此存在一条道路 $\alpha \in C^0(I, X)$ 使得 $\alpha(0)=\sigma_0, \alpha(1)=\sigma_1$, 下面假定

$$F_1: I \times I \rightarrow X \Rightarrow (s, t) \mapsto F_1(s, t) = \sigma(s(1-t)).$$

$$F_1(s, 0) = \sigma, F_1(s, 1) = C_{\sigma_0} \Rightarrow F_1: \sigma \simeq C_{\sigma_0}.$$

同理可假设

$$F_2: I \times I \rightarrow X \Rightarrow (s, t) \mapsto F_2(s, t) = \alpha(t).$$

$$F_2(s, 0) = C_{\sigma_0}, F_2(s, 1) = C_{\tau_0} \Rightarrow F_2: C_{\sigma_0} \simeq C_{\tau_0}.$$

$$F_3: I \times I \rightarrow X \Rightarrow (s, t) \mapsto F_3(s, t) = \tau(st).$$

$$F_3(s, 0) = C_{\tau_0}, F_3(s, 1) = \tau \Rightarrow F_3: C_{\sigma_0} \simeq \tau.$$

综上所述, $\sigma \simeq C_{\sigma_0} \simeq C_{\tau_0} \simeq \tau$.

定义 3.1.3 [1] 已知 $a: I \rightarrow X$ 为一条道路, 则它的逆也是 X 上的道路, 将其记为 $\bar{a}$, 这时假定

$$\bar{a}(t) = a(1-t), \forall t \in I.$$

若 X 上的两条道路 a 与 b 如果满足 $a(1)=b(0)$, 可以规定它们的乘积 ab , 它也是上 X 的道路, 假定为

$$ab(t) = \begin{cases} a(2t), & t \in [0, 1/2], \\ b(2t-1), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

这是因为 $a(1)=b(0)$, 当 $t=1/2$ 时, 有 $a(2t)=a(1)=b(0)=b(2t-1)$ 。

定理 3.1.4 乘积 ab 具有连续性。

证明 假设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是拓扑空间 X 的一个有限闭覆盖, 则 X 可表示为 $X = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ (A_i 为闭集), 如果 $f: X \rightarrow Y$ 在每个 A_i 上的限制都满足连续, 即 $f|_{A_i}: A_i \rightarrow Y$ 连续, 则 $f: X \rightarrow Y$ 连续[2]。

已知 $ab: I \rightarrow X$, 由于 $[0, 1/2]$ 与 $[1/2, 1]$ 是 I 的相对闭集, 因为

$$\tau_I = \{[0, 1], \emptyset, [0, d)(0 < d < 1), (c, d)(0 < c, d < 1), (c, 1](0 < c, 1)\}.$$

所以, $[0, 1/2], (1/2, 1] \in \tau_I$, 则有 $[0, 1/2]^c = I - [0, 1/2] = [1/2, 1]$ 是 I 的闭集; $(1/2, 1]^c = I - (1/2, 1] = [0, 1/2]$ 是 I 的闭集, 若取 $A_1 = [0, 1/2]$, $A_2 = [1/2, 1]$, 则 $A_1 \cup A_2 = [0, 1] = I$, $f|_{A_1}: ab|_{[0, 1/2]} = a|_{[0, 1]}$ 连续, $f|_{A_2}: ab|_{[1/2, 1]} = b|_{[0, 1]}$ 连续, 故

$$f: A_1 \cup A_2 = [0, 1] \rightarrow X, \quad ab|_{[0, 1]} \rightarrow X.$$

连续。因此 $ab: I \rightarrow X$ 是连续的。

定义 3.1.5 [1] 假定 $A \subset X, f, g \in C(X, Y)$ 。已知 H 为 f 到 g 的一个同伦, 当 $a \in A$ 时如果满足 $H(a, t) = f(a) = g(a), \forall t \in I$, 则称 f 相对于 A 与 g 同伦, 将其记作 $f \simeq g \text{ rel } A$; 这时 H 为到 g 相对于 A 一个同伦, 符号化 $f \simeq g \text{ rel } A$ 。

定义 3.1.6 [1] 假定 X 的两条道路分别为 a 与 b , 若 a 与 b 满足 $a \simeq b \text{ rel } \{0, 1\}$, 则 a 与 b 为定端同伦, 符号化为 $a \simeq b$ 。

例 3.1.7 $\mathbb{R}^n$ 中 x_0 到 x_1 的任意 2 条道路 σ 与 τ 均有 $\sigma \simeq \tau$ 。

证明 假定 $F: X \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow (x, t) \mapsto F(x, t) = (1-t)\sigma(x) + t\tau(x)$ 。则有

$$F(x, 0) = \sigma, F(x, 1) = \tau.$$

$$F(0, t) = x_0, F(1, t) = x_1.$$

因此, $F: \sigma \simeq \tau$ 。如下图 1 所示。

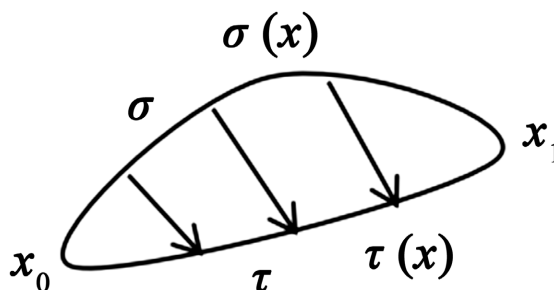


Figure 1. Homotopy diagram of fixed ends of roads σ and τ

图 1. 道路 σ 与 τ 定端同伦图

此时 F 的几何意义是随着时间 $t \in I$ 变化, $\sigma(x)$ 匀速直线运动到 $\tau(x)$ 。

3.2. 道路类的定义与性质

拓扑空间 X 的道路类定义为 X 的所有道路在定端同伦 $\simeq$ 下划分的等价类, 且将其可表示为 $[X] = \{\alpha = \langle a \rangle \mid \alpha \text{ 是 } X \text{ 的一条道路}\}$ 。其中, α 为一条道路, 将 α 所属的道路类简记为 $\langle a \rangle$, 此时道路 α 的起点与终点便是道路类 $\langle a \rangle$ 的起点与终点。特别地, 如果一条道路类的起点与终点满足重合, 则此类道路类称为闭路类, 即 $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, 此时把 x_0 点称为它的基本点, 其中 x_0 起点或终点。

基本群是在道路及道路的逆和乘积运算上得到的。由于道路的乘法没有结合律, 因此需要用道路类代替道路, 下面给出道路类的逆及乘积运算及其性质。

命题 3.2.1 (1) 如果 $a \simeq b$, 则 $\bar{a} \simeq \bar{b}$ 。

(2) 如果 $a \simeq b, c \simeq d$ 且 ac 有意义, 则 $ac \simeq bd$ 。

证明 (1) 因为 $a \simeq b$, 即 $a, b: I \rightarrow X$, 则存在连续伦移

$$H: I \times I \rightarrow X, (s, t) \mapsto H(s, t) = H_t(s).$$

使得

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= H_0(s) = a(s), & H(0, t) &= a(0) = b(0). \\ H(s, 1) &= H_1(s) = b(s), & H(1, t) &= a(1) = b(1). \end{aligned}$$

记

$$H': I \times I \rightarrow X, (s, t) \mapsto H'(s, t) = H(1-s, t).$$

则

$$\begin{aligned} H'(s, 0) &= H'_0(s) = H(1-s, 0) = a(1-s) = \bar{a}(s), \\ H'(s, 1) &= H'_1(s) = H(1-s, 1) = b(1-s) = \bar{b}(s), \\ H'(0, t) &= \bar{a}(0) = \bar{b}(0), H'(1, t) = \bar{a}(1) = \bar{b}(1) \Rightarrow \bar{a} \simeq \bar{b}. \end{aligned}$$

(2) 因为 $a \simeq b$, 则存在连续伦移

$$H_1: I \times I \rightarrow X, (s, t) \mapsto H_1(s, t).$$

使得

$$\begin{aligned} H_1(s, 0) &= a(s), & H_1(0, t) &= a(0) = b(0). \\ H_1(s, 1) &= b(s), & H_1(1, t) &= a(1) = b(1). \end{aligned}$$

又因为 $c \dot{\approx} d$, 则存在连续伦移

$$H_2: I \times I \rightarrow X, (s, t) \mapsto H_2(s, t).$$

使得

$$\begin{aligned} H_2(s, 0) &= c(s), & H_2(0, t) &= c(0) = d(0). \\ H_2(s, 1) &= d(s), & H_2(1, t) &= c(1) = d(1). \end{aligned}$$

ac 有意义的意思为 ac 是可乘的, 即 $a(1) = c(0)$, 因为 $a(1) = b(1), c(0) = d(0)$, 所以 $b(1) = d(0)$, 则 ac 也是可乘的。

由乘积道路的定义有

$$\begin{aligned} ac(s) &= \begin{cases} a(2s), & s \in [0, 1/2], \\ c(2s-1), & s \in [1/2, 1]. \end{cases} \\ bd(s) &= \begin{cases} b(2s), & s \in [0, 1/2], \\ d(2s-1), & s \in [1/2, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

假定 $H = H_1 H_2: I \times I \rightarrow X$, 则

$$H(s, t) = H_1 H_2(s, t) = \begin{cases} H_1(2s, t), & s \in [0, 1/2], \\ H_2(2s-1, t), & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

因为 $a(1) = c(0)$, 当 $s = 1/2$ 时,

$$H_1\left(2 \times \frac{1}{2}, t\right) = H_1(1, t) = a(1) = c(0) = H_2\left(2 \times \frac{1}{2} - 1, t\right) = H_2(0, t).$$

所以 $H = H_1 H_2$ 是连续的。则

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \begin{cases} H_1(2s, 0), & s \in [0, 1/2], \\ H_2(2s-1, 0), & s \in [1/2, 1], \end{cases} = \begin{cases} a(2s), & s \in [0, 1/2], \\ c(2s-1), & s \in [1/2, 1], \end{cases} = ac(2s). \\ H(s, 1) &= \begin{cases} H_1(2s, 1), & s \in [0, 1/2], \\ H_2(2s-1, 1), & s \in [1/2, 1], \end{cases} = \begin{cases} b(2s), & s \in [0, 1/2], \\ d(2s-1), & s \in [1/2, 1], \end{cases} = bd(2s). \\ H(0, t) &= ac(0) = bd(0), \\ H(1, t) &= ac(1) = bd(1). \end{aligned}$$

定义 3.2.2 [1] (1) 规定道路类 α 的逆 $\alpha^{-1} = \langle a^{-1} \rangle$, 其中 $a \in \alpha$ 。

(2) 如果道路 α 的终点重合于道路 β 的起点, 则由此假设 α 和 β 的乘积为 $\alpha\beta = \langle ab \rangle, a \in \alpha, b \in \beta$ 。此时 a^{-1} 与 a 的起点和终点相同; 而道路 α 的起点和道路 β 的终点则是乘积 $\alpha\beta$ 的起点和终点, 因此我们可得两个结论: $\overline{a} = \alpha; \overline{ab} = b^{-1}a^{-1}$, 则 $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha; (\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$ 。

命题 3.2.3 假定 $f: X \rightarrow Y$ 是一个满足连续的映射, 已知在 X 上存在两条道路为 a, b 。

(1) 若 $a \dot{\approx} b$, 则得 $f \circ a \dot{\approx} f \circ b$ 。

(2) 如果 a 和 b 可乘, 则 $f \circ a$ 与 $f \circ b$ 也可乘, 且 $(f \circ a)(f \circ b) = f \circ (ab)$;

(3) $\overline{f \circ a} = \overline{f \circ b}$ 。

证明 (1) 因为 $a \dot{\approx} b$, 即 $a, b: I \rightarrow X$, 则存在连续伦移

$$H: I \times I \rightarrow X, (s, t) \mapsto H(s, t) = H_t(s).$$

使得

$$\begin{aligned} H(s, 0) = H_0(s) = a(s), & \quad H(0, t) = a(0) = b(0), \\ H(s, 1) = H_1(s) = b(s), & \quad H(1, t) = a(1) = b(1). \end{aligned}$$

作

$$\tilde{H}: I \times I \rightarrow Y, (s, t) \mapsto \tilde{H}(s, t) = f \circ H(s, t).$$

由复合映射连续可得 $f \circ H(s, t)$ 满足连续, 则

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s, 0) &= f \circ H(s, 0) = f(H(s, 0)) = f(a(s)) = f \circ a(s), \\ \tilde{H}(s, 1) &= f \circ H(s, 1) = f(H(s, 1)) = f(b(s)) = f \circ b(s). \end{aligned}$$

$$\tilde{H}(0, t) = f \circ a(0) = f \circ b(0), \tilde{H}(1, t) = f \circ a(1) = f \circ b(1) \Rightarrow f \circ a \dot{\approx} f \circ b.$$

(2) 因为 ab 可乘, $a(1) = b(0)$, 所以

$$f \circ b(0) = f(b(0)) = f(a(1)) = f \circ a(1).$$

所以 $f \circ a$ 与 $f \circ b$ 也可乘, 则 $\forall t \in I = [0, 1]$, 有

$$f \circ (ab)(t) = f(ab(t)) = \begin{cases} f(a(2t)), t \in [0, 1/2], \\ f(b(2t-1)), t \in [1/2, 1], \end{cases} = \begin{cases} f \circ a(2t), t \in [0, 1/2], \\ f \circ b(2t-1), t \in [1/2, 1], \end{cases} = (f \circ a)(f \circ b)(t).$$

(3) $\overline{f \circ a}(t) = f \circ a(1-t) = f(a(1-t)) = f(\bar{a}(t)) = f \circ \bar{a}(t)$ 。

命题 3.2.4 道路乘法没有结合律。

证明 设 a, b, c 是 X 上的三条道, $a, b, c: I \rightarrow X$ 这是因为

$$(ab)c(t) = \begin{cases} ab(2t), t \in [0, 1/2] \\ c(2t-1), t \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} a(4t), t \in [0, 1/4], \\ b(4t-1), t \in [1/4, 1/2], \\ c(2t-1), t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

$$a(bc)(t) = \begin{cases} a(2t), t \in [0, 1/2] \\ bc(2t-1), t \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} a(2t), t \in [0, 1/2], \\ b(4t-2), t \in [1/2, 3/4], \\ c(4t-3), t \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

$$\Rightarrow (ab)c(t) \neq a(bc)(t).$$

所以道路乘法没有结合律。

命题 3.2.5 道路类乘法有结合律。

证明 即证明当 $a(1) = b(0), b(1) = c(0)$ 时, $(ab)c \dot{\approx} a(bc)$ 。其中, a, b, c 分别是 X 的三条道路, 则 $a: [0, 1] \rightarrow X$, $b: [0, 1] \rightarrow X$, $c: [0, 1] \rightarrow X$ 规定 $f: [0, 3] \rightarrow X$ 为

$$f(t) = \begin{cases} a(t), t \in [0, 1], \\ b(t-1), t \in [1, 2], \\ c(t-2), t \in [2, 3]. \end{cases}$$

记 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ 是 $[0, 3]$ 上的道路, $\tilde{a}: [0, 1] \rightarrow [0, 3]$, $\tilde{b}: [0, 1] \rightarrow [0, 3]$, $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow [0, 3]$, 假定 $\tilde{a}(t) = t$, $\tilde{b}(t) = t+1$, $\tilde{c}(t) = t+2$, 则有

$$f \circ \tilde{a} = a, f \circ \tilde{b} = b, f \circ \tilde{c} = c.$$

假定 $(\tilde{a} \tilde{b})\tilde{c} = \tilde{a}(\tilde{b} \tilde{c})$ 是在凸集 $[0, 3] \subset E^1$ 上从 0 到 3 的两条道路, 由于

$$(\tilde{a} \tilde{b})\tilde{c}(t), \tilde{a}(\tilde{b} \tilde{c})(t) \in [0, 3],$$

作

$$\tilde{H}: I \times I \rightarrow [0, 3], (s, t) \mapsto \tilde{H}(s, t).$$

规定 $\tilde{H}(s, t) = (1-t)(\tilde{a} \tilde{b})\tilde{c}(s) + t\tilde{a}(\tilde{b} \tilde{c})(s)$,

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= (\tilde{a} \tilde{b})\tilde{c}(s) & H(0, t) &= (\tilde{a} \tilde{b})\tilde{c}(0) = (\tilde{a} \tilde{b})\tilde{c}(0), \\ H(s, 1) &= \tilde{a}(\tilde{b} \tilde{c})(s) & H(1, t) &= \tilde{a}(\tilde{b} \tilde{c})(1) = \tilde{a}(\tilde{b} \tilde{c})(1). \end{aligned} \Rightarrow (\tilde{a} \tilde{b})\tilde{c} = \tilde{a}(\tilde{b} \tilde{c}).$$

再由命题 3.2.3 的(1)和(2), 得到 $(ab)c = f \circ ((\tilde{a} \tilde{b})\tilde{c}) = f \circ (\tilde{a}(\tilde{b} \tilde{c})) = a(bc)$ 。

命题 3.2.6 [1] 假定 x_0 道路类 α 的起点, x_1 为 α 的终点, 命 e_{x_0}, e_{x_1} 分别为 x_0, x_1 处的点道路, 则有

- (1) $\alpha\alpha^{-1} = \langle e_{x_0} \rangle$, $\alpha^{-1}\alpha = \langle e_{x_1} \rangle$;
- (2) $\langle e_{x_0} \rangle\alpha = \alpha\langle e_{x_1} \rangle$ 。

综上, 由命题 3.2.5 便能确保有结合律, 而命题 3.2.6 则表明 $\langle e_{x_0} \rangle$ 为单位元, 且 α 的逆就是 α^{-1} , 接下来可以开始讨论基本群了。

4. 基本群的定义及性质

基本群是由空间与基点共同决定的。我们知道并不是任意两条道路都可相乘, 因此需要取定基点来克服这个困难。假定 X 为拓扑空间, 且 $x_0 \in X$ 。若以 x_0 为基点且关于 X 的全部闭路类的集合表示为 $\pi_1(X, x_0)$ 。若 $\forall x, y \in \pi_1(X, x_0)$, 且 a, b 可乘, 则 $a \cdot b \in \pi_1(X, x_0)$ 。

定义 4.1 X 为拓扑空间, 且 $x_0 \in X$ 。将 X 在满足道路类乘法条件下得到的群 $\pi_1(X, x_0)$ 记为以 x_0 基点 X 的基本群。

设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射, 建立保持乘法运算的对应为 $f_\pi: [X] \rightarrow [Y]$ 。如果 $x_0 \in X$, 记 $y_0 = f(x_0)$, 则当 $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ 时, $f_\pi(\alpha) \in \pi_1(Y, y_0)$ 。因此, 由映射 f_π 在基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 的条件限制下可得到 $f_\pi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ 为一个同态。

定义 4.2 若映射 $f: X \rightarrow Y$ 满足连续, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, 则称同态

$$f_\pi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

为 f 诱导出的基本群同态。(这里基点 x_0 是可以任取的, 因此 f 可以诱导出许多基本群同态)

命题 4.3 [2] 设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ 都是连续映射, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, $z_0 = g(y_0)$ 。则

$$(g \circ f)_\pi = g_\pi \circ f_\pi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)。$$

定理 4.4 若 $f: X \rightarrow Y$ 是同胚映射, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, 则

$$f_{\pi} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

是同构。

证明 由条件知 $f: X \rightarrow Y$ 是一个同胚映射, 则存在逆映射 $g = f^{-1}: Y \rightarrow X$, 由定义 4.2 可知 g 可诱导出一个基本群同态 $g_{\pi}: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ 。再由命题 4.3, 复合映射的诱导同态满足

$$(g \circ f)_{\pi} = g_{\pi} \circ f_{\pi}, (f \circ g)_{\pi} = f_{\pi} \circ g_{\pi}.$$

由于 $(g \circ f) = id: X \rightarrow X, (f \circ g) = id: Y \rightarrow Y$, 其诱导同态为恒等同构:

$$g_{\pi} \circ f_{\pi} = (g \circ f)_{\pi} = id: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0), f_{\pi} \circ g_{\pi} = \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

因此 f_{π} 与 g_{π} 是一对互逆的同构。

定理 4.4 说明基本群为拓扑不变量, 所谓拓扑不变量是指在同胚变换下保持不变的量或结构。比如, 空间的连通性、紧致性等都是拓扑不变量。基本群作为代数结构, 如果同胚的空间其基本群同构, 那么基本群就成为了拓扑不变量。

定理 4.4 的核心在于: 同胚映射诱导基本群的同构, 且该同构的逆由逆映射诱导。这严格证明了基本群在同胚下保持不变, 从而成为拓扑不变量。反之, 通过比较基本群的同构性, 可直接判断空间是否同胚, 这体现了其在拓扑分类中的核心作用。

例 4.5 考虑 X 是一个实线 R , 由于 R 是可缩的, 所有环路都可以收缩到一点, 它的基本群是平凡群。而圆环 S^1 的基本群是自由循环群, 即同构于整数加群 Z [1], 因此 R 和 S^1 不同胚。这说明基本群能够区分可缩空间和不可缩空间。

例 4.6 考虑平面去掉一个点, 比如 $R/\{0\}$, 因为可以绕洞转圈, 类似于圆环的情况, 它的基本群也是 Z 。而平面本身的基本群也是平凡的, 所以 R^1 和 $R^2/\{0\}$ 不同胚, 这也符合我们的直觉, 因为平面没有洞, 而平面去掉一个点有一个洞。

例 4.7 考虑球面 S^2 , 所有环路可收缩, 它的基本群为平凡群[1]; R 为可缩空间, 基本群也是平凡群, 尽管它们基本群相同, 但并不同胚, 因为紧致性与维度存在差异, 这也表明基本群虽是不变量, 但需结合其他不变量才能完全区分空间。

有了上述分析, 下面利用基本群证明球面 S^2 不同胚于环面 T^2 。证前先求 T^2 的基本群。然而, 要求 T^2 的基本群[3]-[5]需用到乘积空间基本群的一个性质。乘积空间基本群定理是代数拓扑中的基础工具, 其历史可追溯至庞加莱对同伦群的探索, 并在 20 世纪中叶通过范畴论和同伦论得以形式化。它在高维流形分类、物理紧致化模型及纤维丛分析中具有重要应用, 但也受限于严格乘积结构的条件。综上, 乘积空间基本群定理可用来简化高维空间的基本群计算, 特别是求 T^2 的基本群。

定理 4.8 假定 $x_0 \in X, y_0 \in Y$, 则 $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ 。(右边记号“ $\times$ ”表示群的直积运算)

证明 假设 $\varphi: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ 为

$$\varphi(\gamma) = ((j_x)_{\pi}(\gamma), (j_y)_{\pi}(\gamma)).$$

$\forall \gamma \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$, 其中 $j_x: X \times Y \rightarrow X, j_y: X \times Y \rightarrow Y$ 。显然 φ 是同态。

(1) φ 是满同态。 $\forall \alpha = \langle 2 \rangle \in \pi_1(X, x_0), \forall \beta = \langle b \rangle \in \pi_1(Y, y_0)$, 作 $X \times Y$ 的闭路 c 为 $c(t) = (\alpha(t), b(t))$, 则 $(j_x)_{\pi}(\langle c \rangle) = \langle j_x \circ c \rangle = \langle \alpha \rangle = 2$; 同样地 $(j_y)_{\pi}(\langle c \rangle) = \langle j_y \circ c \rangle = \langle b \rangle = \beta$ 。于是有 $\varphi(\langle c \rangle) = (2, \beta)$ 。

(2) φ 是单同态。设 $\varphi(\gamma) = (\langle e_{x_0}, e_{y_0} \rangle)$ (群的直积中的单元), $c \in \gamma$ 。于是 $j_x \circ c \doteq e_{x_0}, j_y \circ c \doteq e_{y_0}$ 。

记 $H: j_x \circ c \doteq e_{x_0}, G: j_y \circ c \doteq e_{y_0}$ 。规定 $F: I \times I \rightarrow X \times Y$ 为 $F(s, t) = (H(s, t), G(s, t))$ 。

下面验证 $F: c \simeq e = (e_{x_0}, e_{y_0})$ 。

$$F(s, 0) = (H(s, 0), G(s, 0)) = (j_x \circ c(s), j_y \circ c(s)) = c(s),$$

$$F(s, 1) = (H(s, 1), G(s, 1)) = (e_{x_0}(s), e_{y_0}(s)) = (e_{x_0}, e_{y_0})(s).$$

所以

$$F(i, t) = (H(i, t), G(i, t)) = (j_x \circ c(i), j_y \circ c(i)) = (e_{x_0}(i), e_{y_0}(i)) = c(i) = (e_{x_0}, e_{y_0})(i), i = 0, 1$$

因此, $\gamma = \langle c \rangle = \langle (e_{x_0}, e_{y_0}) \rangle$ 是 $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ 中的单位圆, 故 φ 是单同态, 从而 φ 满足同构的性质, 故得以证明。

定理 4.9 环面 T^2 不同胚于二维球面 S^2 。

证明 环面 T^2 通常可以表示为 $T^2 = S^1 \times S^1$, 我们可以更加通俗直观的将环面 T^2 理解为两个圆周的笛卡尔积, 即乘积空间, 其中“ $\times$ ”表示群的直积运算, 根据定理 4.8 基本群的性质知, 乘积空间的基本群是各自基本群的直积, 即 $X \times Y$ 它的基本群 $\pi_1(X \times Y)$ 等于 $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$, 故 $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ 。由于在乘积空间中, 路径可以分解为在两个分量上的独立路径, 因此可得环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 的基本群为 $\pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1)$, 由[1]知 $\pi_1(S^1)$ 同构于整数加群 Z , 即 $\pi_1(S^1) \cong Z$ 。因此环面 T^2 的基本群为两个整数群的直积 $Z \times Z$, 即 $\pi_1(T^2) \cong Z \times Z$ 。

也可以换个思路理解, 即环面上有两条不可收缩的生成回路, 分别沿着经线和纬线绕行, 对应的基本群的生成元为这两个方向的环绕数, 组合起来就是 $Z \times Z$ 的结构, 由于两个方向的环绕可以交换顺序而不影响结果, 因此环面 T^2 的基本群还是交换群。

而二维球面 S^2 的基本群 $\pi_1(S^2)$ 中只有一个元素(单位元), 则 $\pi_1(S^2)$ 为平凡群, 因此环面 T^2 与球面 S^2 的基本群不同构, 由基本群的拓扑不变性可得到 T^2 不同胚于 S^2 。至此, 证毕。

基金项目

课题受到广西民族师范学院 2024 年度校级科研项目(项目编号: 2024YB123)的资助。

参考文献

- [1] 尤承业. 基础拓扑学讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1997.
- [2] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [3] 张立东. 一、二维球面乘积的连通和的映射类群[D]: [硕士学位论文]. 北京: 首都师范大学, 2006.
- [4] 张浩. 关于二维环面 T^2 的几个结论[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京农业大学, 2008.
- [5] 张海芳. 群在拓扑学中的应用[J]. 科教导刊(电子版), 2015(1): 77-78.